Nicht-algorithmisches Rechnen im Bereich der Multiplikation im dritten Schuljahr

Was ist im Unterricht alles möglich?

MMag. Martina Greiler-Zauchner
Pädagogische Hochschule Kärnten

Was erwartet Sie?

- Begriffsdefinition – nicht-algorithmisches Rechnen
- Vorstellung des Forschungsprojektes und der Forschungsinteressen
- Vorstellung des Lernarrangements zum Forschungsprojekt
- Vorstellung eines ausgewählten Ergebnisses
- Diskussion

Was ist nicht-algorithmisches Rechnen?

Zu Beginn eine Aufgabe …

Lösen Sie folgende Aufgaben (einmal nicht-algorithmisch, einmal algorithmisch)

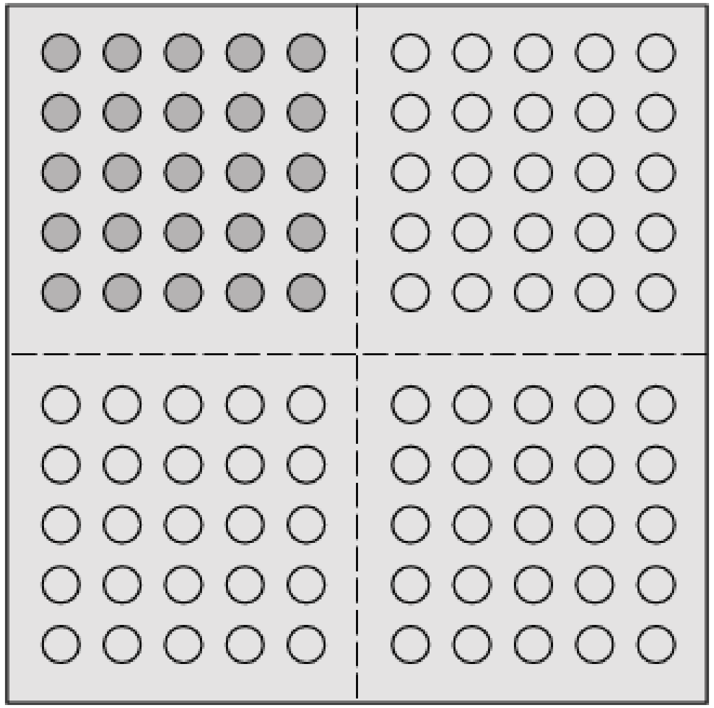
$25 \cdot 36$

$6 \cdot 249$

Welche Lösungsstrategie haben Sie verwendet?

Warum denken Sie, sind diese (nicht)-algorithmisch?

Eine mögliche Veranschaulichung einer „nicht-algorithmischen“ Denkweise zu 25·36



25 als ein Viertel von 100

36-mal einen 25er-Quadranten

↓

36 Hunderterfelder, von jedem aber nur 1/4

↓

also: 9 komplette Hunderterfelder

$25 \cdot 36 = 100 \cdot 9 = 900$

$a \cdot b = (a \cdot n) \cdot (b : n)$ für $n \neq 0$

Eine nicht-algorithmische Strategie zu 6·249

1. Anstelle von $6 \cdot 249$ berechne ich $6 \cdot 250$

2. $6 \cdot 250 = 3 \cdot 500 = 1500$

3. $6 \cdot 249 = 1500 - 6 = 1494$

$a \cdot (b-c) = a \cdot b - a \cdot c$

$a \cdot b = (a:n) \cdot (b \cdot n)$ für $n \neq 0$

Nutzen von Rechengesetzen und Rechenvorteile

Was ist nicht-algorithmisches Rechnen?

Definition Algorithmus

„Algorithmen sind eine endliche Folge von eindeutig bestimmten Elementaranweisungen, die den Lösungsweg eines Problems exakt und vollständig beschreiben."

(ZIEGENBALG, ZIEGENBALG & ZIEGENBALG, 2016, 26)

Charakterisierung des nicht-algorithmischen Rechnens

- Nicht-algorithmisches Rechnen gibt keinen bestimmten Rechenweg vor, sondern der Rechenweg wird in Abhängigkeit von den Zahlen und unter freier Nutzung von Rechengesetzen und Rechenvorteilen gewählt.
- Nicht-algorithmisches Rechnen kann sich (zur Entlastung der Gedächtnisleistung) einer Notation von Zwischenschritten, Zwischenrechnungen und Zwischenergebnissen bedienen, diese Notation ist nicht festgelegt.
- Nicht-algorithmisches Rechnen strebt keine Mechanisierung der Rechenwege an, sondern es geht darum Rechengesetze und Rechenvorteile explizit (gebunden an Einsicht und Verständnis) zu nutzen.
- Nicht-algorithmisches Rechnen rechnet mit Zahlen als Ganzheiten (nicht mit Ziffern).

Was ist dann Kopfrechnen, halbschriftliches Rechnen und schriftliches Rechnen?

Kopfrechnen

NICHT-ALGORITHMISCHES RECHNEN

halbschriftliches Rechnen

= "schrift-gestütztes Kopfrechnen" (Schipper)

$399 \cdot 3 = 1200 - 3 = 1197$

$65 \cdot 4 = 130 + 130$

$5 \cdot 34 = 5 \cdot 30 + 5 \cdot 4 = 150 + 20 = 170$

$18 \cdot 25 = 9 \cdot 50 = 450$

schriftliches Rechnen

("Normalverfahren")

(„Rechnen nach Algorithmen“)

$$\begin{array}{r} \underline{3\;9\;9 \cdot 3} \\ 1\;{}_2 1\;{}_2 9\;\;7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underline{18 \cdot 25} \\ 36 \\ \underline{90} \\ 450 \end{array}$$

(vgl. KRAUTHAUSEN & SCHERER, 2014, 43)

Andere Begriffe für nicht-algorithmisches Rechnen

- Zahlenrechnen (Selter, 2000)
- Informelle Arithmetik (Selter, 2003)
- Invented strategies (van de Walle, Karp & Bay-Williams, 2013)
- Informal strategies (Anghileri, Beishuizen & van Putten, 2002)
- Mental calculation (with jottings/pencil-and-paper recordings/written recordings) (Threlfall, 2009, Anghileri, 2006, McIntosh, 2005)

Die Bedeutung des nicht-algorithmischen Rechnens aus Sicht der Fachdidaktik

- Nicht-algorithmisches Rechnen ist Grundlage für Schätzen und Überschlagen
- Nicht-algorithmisches Rechnen hilft schriftliche Normalverfahren leichter zu verstehen
- Nicht-algorithmisches Rechnen fördert algebraisches Denken
- Nicht-algorithmisches Rechnen fördert Kopfrechnen
- Nicht-algorithmisches Rechnen fördert flexibles/aufgabenadäquates Rechnen
- Nicht-algorithmisches Rechnen betont den prozesshaften Charakter von Mathematik

Nicht-algorithmisches Rechnen ist Grundlage für Schätzen und Überschlagen

$$\begin{array}{r} \underline{16 \cdot 21} \\ 32 \\ \underline{\;\;16} \\ 336 \end{array}$$

- Normalverfahren in Österreich von rechts nach links
- Abschätzung des Ergebnisses erst nach Beendigung des Rechenvorgangs

$$\begin{array}{l} \underline{16 \cdot 21 = 336} \\ 16 \cdot 20 = 320 \\ 16 \cdot \;\;1 = \;\;\,16 \end{array}$$

- Zerlegen mit Hilfe des Distributivgesetzes
- (meistens) von links nach rechts
- die größeren Zahlen werden (meistens) zuerst verarbeitet Abschätzen durch z.B.: Abbruch

(vgl. PADBERG & BENZ, 2011, WITTMANN, 1999)

Nicht-algorithmisches Rechnen hilft schriftliche Normalverfahren leichter zu verstehen

$\underline{16\cdot 21}$	$\underline{16\cdot 21=336}$
320	$16\cdot 20=320$
$\underline{\ \ 16}$	$16\cdot\ \ 1=\ \ \ 16$
336	

“The main focus in teaching the standard algorithm is not as a memorized series of steps but as making sense of the procedure as a process.”
(VAN DE WALLE, KARP & BAY-WILLIAMS, 2013, 219)

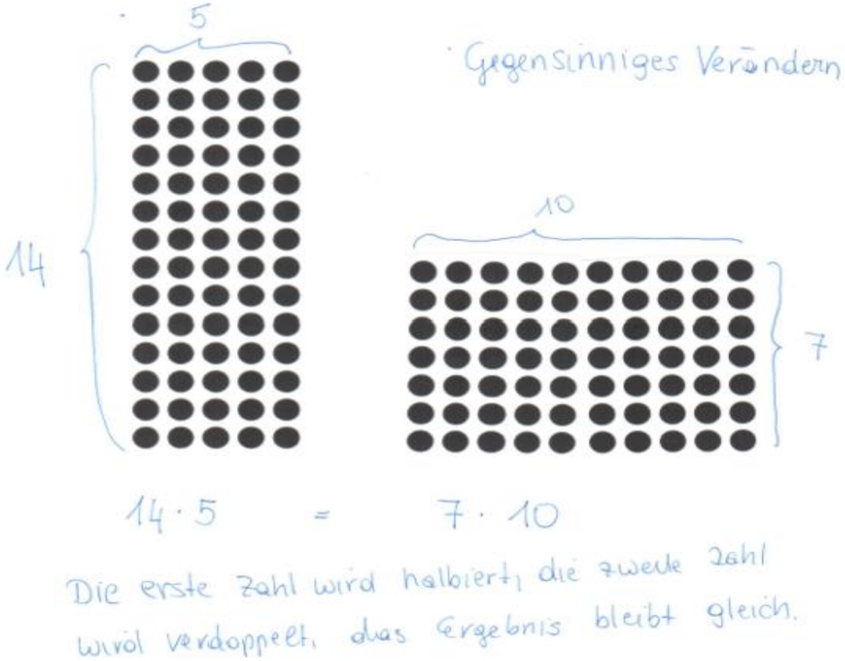
Lehrplan Grundstufe 4

– Schriftliches Rechnen im additiven und multiplikativen Bereich	Erweitern der schriftlichen Verfahren: – Addieren und Subtrahieren mehrstelliger Zahlen – Multiplizieren mit ein- und zweistelligem Multiplikator, Dividieren durch ein- und zweistelligen Divisor (ohne und mit Rest) mit sinnvollen Schwierigkeitsgraden Begründen der Rechenschritte durch Einsicht in die den Operationen zu Grunde liegenden Rechenregeln (zB Bündelungsprinzip, Verteilungsregel)

Volksschullehrplan (BGBl. Nr. 134/1963 in der Fassung BGBl. II Nr. 303/2012 vom 13. September 2012)

Nicht-algorithmisches Rechnen fördert algebraisches Denken

Eigenschaften der Rechenoperationen (Kommutativität, Assoziativität, Distributivität, Konstanzgesetze) oder Beziehungen zwischen Rechenoperationen (Operation und Gegenoperation) rücken selbst als „Objekte des Denkens“ in den Mittelpunkt.



„Begründen auf anschaulicher Ebene und Thematisierung der Generalisierbarkeit“

(vgl. Steinweg, 2013, Wittmann, 1999)

Nicht-algorithmisches Rechnen betont den prozesshaften Charakter von Mathematik

„Mathematik ist keine Menge von Wissen. **Mathematik** ist eine **Tätigkeit**, eine **Verhaltensweise**, eine **Geistesverfassung**. ... Eine Geisteshaltung lernt man aber nicht, indem einer einem schnell erzählt, wie er sich zu benehmen hat. Man lernt sie im **Tätigsein**, indem man Probleme löst, allein oder in seiner Gruppe – Probleme, in denen Mathematik steckt“.

(FREUDENTHAL, 1982)

Vorstellung des Forschungsprojektes und der Forschungsinteressen

Nicht-algorithmisches Rechnen im Bereich der Multiplikation im dritten Schuljahr
–
Entwicklung und Beforschung eines Lernarrangements

Warum dieses Thema?

- Vermutung – nicht-algorithmisches Multiplizieren hat im österreichischen Grundschulunterricht nicht den Stellenwert, den sich die Fachdidaktik wünscht!
- Nicht-algorithmisches Multiplizieren hat in vielen österreichischen Schulbüchern nicht den Stellenwert, den sich die Fachdidaktik wünscht!
- Es gibt kaum empirische Forschung zum nicht-algorithmischen Multiplizieren (zumindest im deutschsprachigen Raum)!

Methodische Anknüpfungspunkte

Educational design research

Ziel: Unterricht und Forschung eng verzahnt weiter zu entwickeln

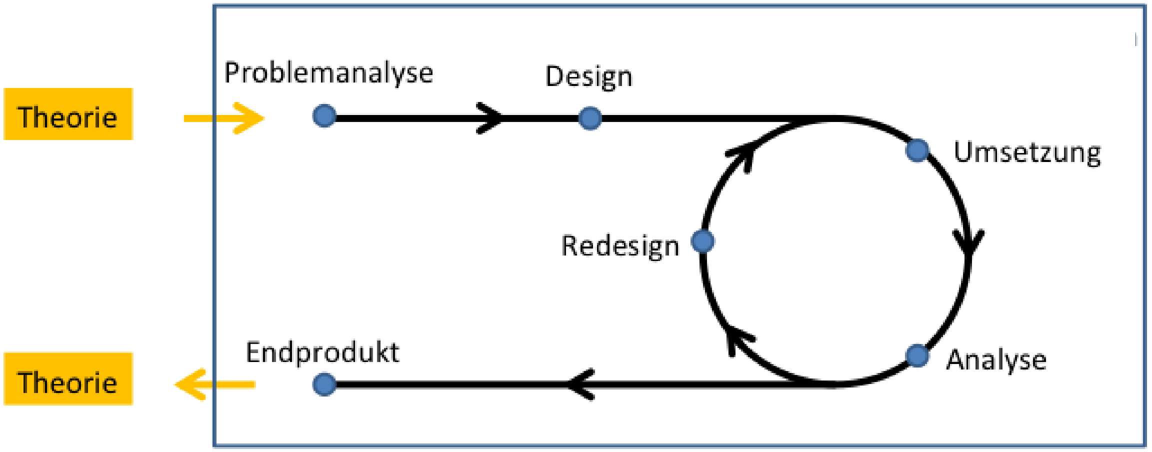


Bild: http://educationaldesignresearch.de/wasistedr/

(vgl. Plomp & Nieveen, 2013)

Entwicklungsebene und Forschungsebene

	Entwicklungsebene (Lernarrangement)	Forschungsebene (Erhebungen)
	Entwicklung eines Lernarrangements zum halbschriftlichen Multiplizieren auf Basis fachdidaktischer Überlegungen	
ZYKLUS 1		Interviews in den Klassen
	Fortbildung für die am Projekt beteiligten Klassenlehrerinnen und Klassenlehrern	
	Umsetzung des Lernarrangement in den Klassen	Dokumentation des Unterrichts (Analyse der Schulübungshefte und Arbeitsblätter – Interviews mit den Klassenlehrerinnen und Klassenlehrern)
		Interviews in den Klassen
	Überarbeitung des Lernarrangements aufgrund der Ergebnisse aus Zyklus 1	
ZYKLUS 2		Interviews und paper-pencil Erhebungen in den Klassen
	Fortbildung für die am Projekt beteiligten Klassenlehrerinnen und Klassenlehrern	
	Umsetzung des Lernarrangement in den Klassen	Dokumentation des Unterrichts (Analyse der Schulübungshefte und Arbeitsblätter – Interviews mit den Klassenlehrerinnen und Klassenlehrern)
		Interviews und paper-pencil Erhebungen in den Klassen

Forschungsinteressen 1

Rechenstrategien zur Lösung von Multiplikationen vor einer expliziten Behandlung des Themas im Unterricht

Forschungsinteressen 2

Lokalen Theorien zu Wirkungsweisen, Verläufe und Hürde aufgrund der beobachteten Lernprozesse

Wirkungsweisen in Bezug auf…

- … Verwendung der Rechenstrategien
- … aufgabenadäquate Verwendung der Rechenstrategien
- … Variation von Rechenstrategien
- … Argumentieren und Begründen von Rechenstrategien
- … Veranschaulichungen der Rechenstrategien am 400-Punktefeld

Forschungsinteressen 2 - Fortsetzung

Verläufe und Hürde in Bezug auf…

- … Individuelle Lernverläufe von Kindern – Versuch einer Typisierung
- … Hürden im Lernprozess
- … Hürden und Verlauf aus Sicht der Lehrpersonen

Vorstellung des Lernarrangements zum Forschungsprojekt

Designprinzip

- einführende Phase - Kinder entwickeln ihre eigenen Strategien
- anschließende (lehrerzentrierte) Phase - Fragestellungen und Impulse
  - Die entwickelten Strategien werden strukturiert und auf Hauptstrategien reduziert.
  - Konzeptionelles Wissen zu den Hauptstrategien wird aufgebaut.
- Übungsphasen
  - Die Kinder erlangen Routine in der Anwendung der Strategien.
  - Die Kinder werden angeregt über eine aufgabenadäquate Verwendung der Strategien nachzudenken.

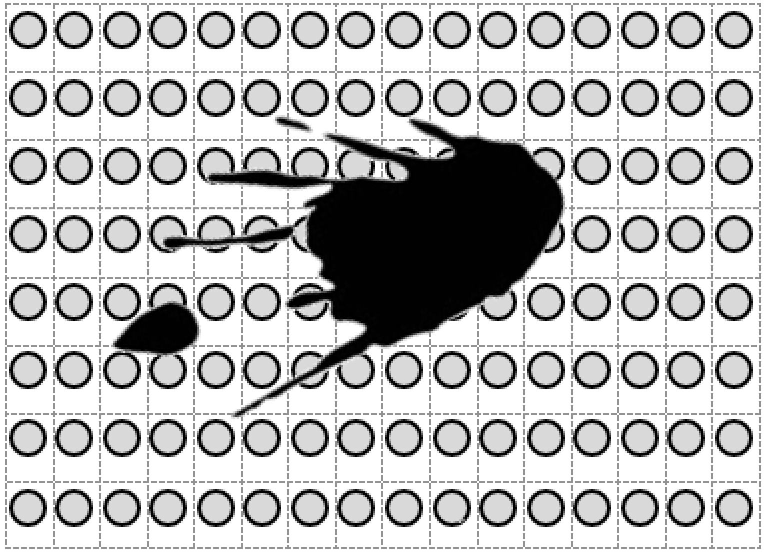
Strategien, die Kinder nicht selbst entwicklen, können auch vom Lehrer eingeführt werden.

(vgl. Baroody 2003)

Ausgewählte Aktivitäten: Kommunizieren und Argumentieren - Rechenkonferenzen

Auf einem Punktefeld ist ein großer Fleck. Wie viele Punkte waren insgesamt vor dem Fleck zu sehen?

Wie kannst du das berechnen?



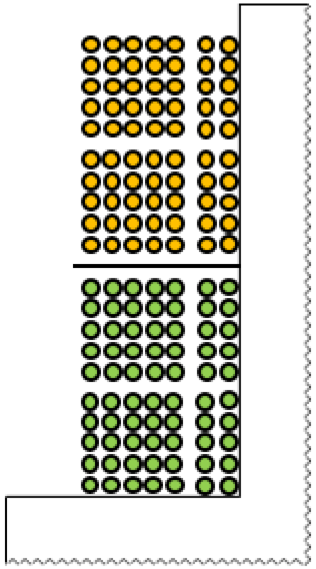
Umsetzung des Lernarrangements – Arbeiten mit dem Punktefeld

Ausgewählte Aktivitäten: Spezielle Strategien gezielt erarbeiten – Zerlegen und Minus

Name:____________________

Jonas weiß:

$20 \cdot 7 = 140$



1. Wie hilft ihm das für $19 \cdot 7$?
2. Kannst du am 400-Punktefeld zeigen, wie du dabei denkst?
3. Versuche auf ähnliche Weise $19 \cdot 5$ zu rechnen.
4. Funktioniert diese Denkweise auch bei $16 \cdot 9$?

Ausgewählte Aktivitäten: Operative Zusammenhänge entdecken

Name:___________________

Immer 1000

1	·	1000	=	1000
2	·	500	=	1000

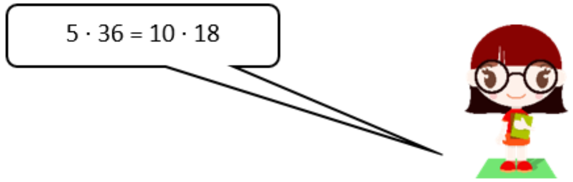
Finde möglichst viele Malaufgaben mit dem Ergebnis 1000!

Was fällt dir auf?

Ausgewählte Aktivitäten: Vorteilhaftes Rechnen

Name:____________________

Zahlenblick 2



Welche Aufgaben kannst du geschickt mit **Verdoppeln und Halbieren** lösen?
Trage Sie in die Tabelle ein und schreibe die Hilfsaufgabe dazu:

15 · 8	**5 · 48**	**4 · 25**	**46 · 4**	**94 · 3**
6 · 43	**89 · 7**	**35 · 12**	**37 · 5**	**37 · 4**

Aufgabe	Diese Rechnung hilft mir

Ausgewählte Aktivitäten: Vorteilhaftes Rechnen

Verena rechnet $4 \cdot 79$:

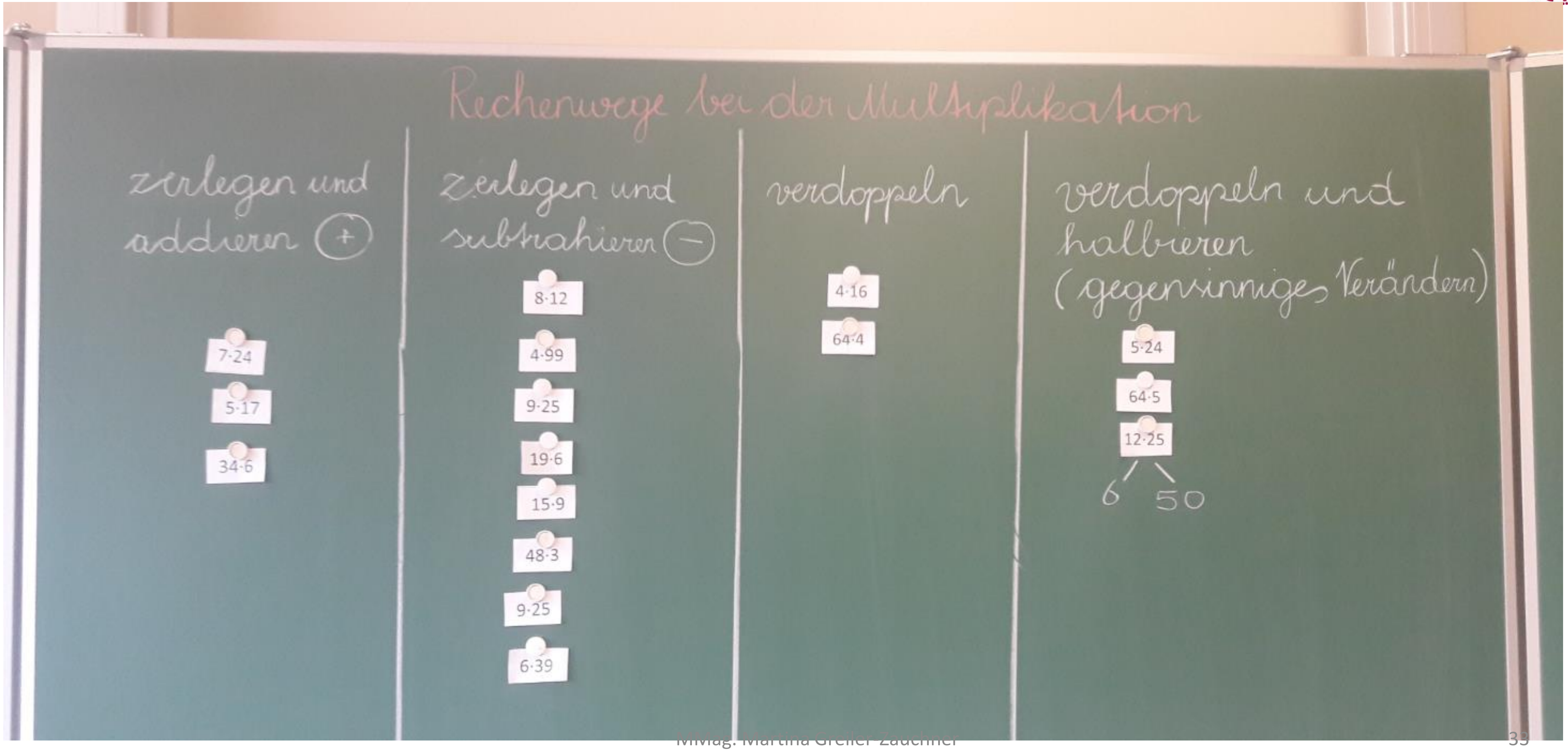
$4 \cdot 79 = 4 \cdot 70 + 4 \cdot 9$

$4 \cdot 79 = 4 \cdot 70 + 4 \cdot 9$

Da muss ich viel zu viel rechnen!

Jonas sagt, da muss ich viel zu viel rechnen, ich kann es schneller.
Was könnte Jonas meinen?

Ausgewählte Aktivitäten: Vorteilhaftes Rechnen



Verfügen Kinder zu einer gegebenen Aufgabe über mehrere Rechenstrategien?

Mehrere Rechenstrategien zu einer Aufgabe

Aufgaben aus dem Interview:

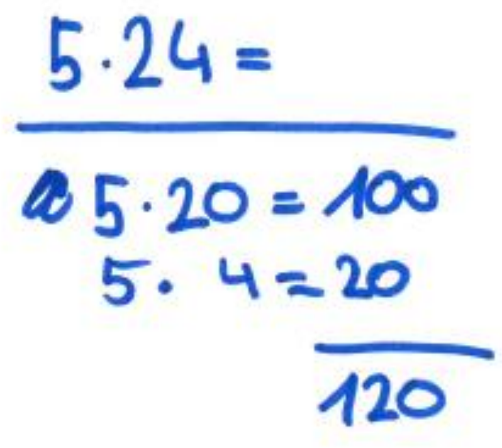
$$17 \cdot 4$$

$$5 \cdot 24$$

- Wie würdest du die Aufgabe rechnen?
- Kennst Du eine andere Art, wie man das noch rechnen kann?
- Kennst Du auch eine dritte, vierte… Art diese Rechnung auszurechnen?
- Welcher Rechenweg ist für dich der einfachste? (Bei mehreren genannten Rechenwegen)

Rechenstrategien der Kinder zu 5·24 - Zerlegen in eine Summe

- 5·20 + 5·4
- 2·24 + 3·24
- 5·22 (als Halbierung von 10·22) + 5·2



Rechenstrategien der Kinder zu 5·24 – gegensinniges Verändern

- 10·12

10·12 = 120

Rechenstrategien der Kinder zu 5·24 – Zerlegen in eine Differenz

- 5·30 - 5·6

- 5·25 – 5·1

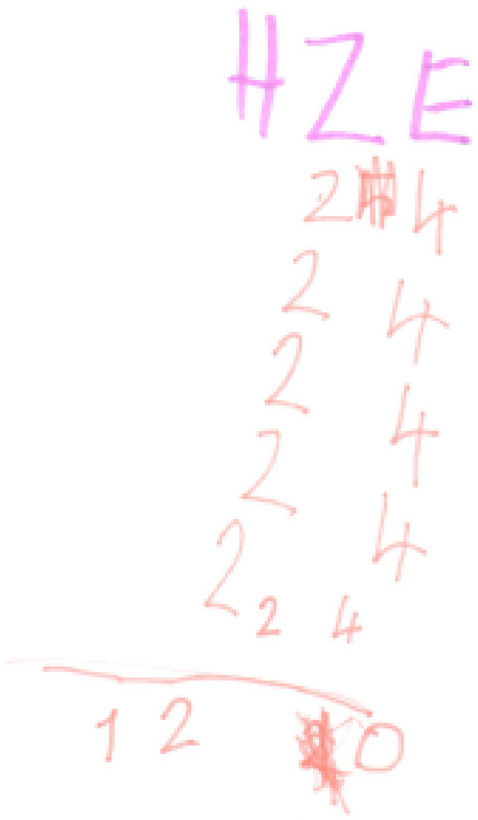
$$5\cdot 24=120$$
$$5\cdot 30=150-\underbrace{5\cdot 6}_{30}=120$$

Rechenstrategien der Kinder zu 5·24 – Strategien unter Einbezug von Halbierungen

- Halbierung von 10·24

Rechenstrategien der Kinder zu 5·24 – wiederholte Addition eines Faktors

- Wiederholte Addition von 24



Rechenstrategien der Kinder zu 5·24 – Strategien unter Einbezug von Verdoppelungen

- Verdoppelung von 5·12

- Verdoppelung von 2·24 und Addition von 24

$5 \cdot 12 = 60 + 60 = 120$

Rechenstrategien der Kinder zu 5·24 – fehlerhafte Strategien – schriftliche Rechenverfahren

- Fehlerhafte Strategien

- Schriftliches Rechenverfahren

Stellas Rechenstrategien zu 5·24

$10 \cdot 24 = 240 - 5 \cdot 24 = 120$

$5 \cdot 30 = 150 - 6 \cdot 5 = 30$

$150 - 30 = 120$

$5 \cdot 12 = 60 + 60 = 120$

$3 \cdot 24 = 72 + 2 \cdot 24 = 48$

120

$10 \cdot 22 = 220 - 5 \cdot 22 = 110$

$+ 2 \cdot 5 = 10 = 120$

Mehrere Rechenstrategien zu 5·24

Von den 58 Kindern fanden zur Aufgabe 5·24

- 58 Kinder mindestens einen Rechenweg
- 42 Kinder mindestens zwei Rechenwege
- 12 Kinder mindestens drei Rechenwege
- 4 Kinder mindestens vier Rechenwege
- 3 Kinder mindestens fünf Rechenwege
  (=119 Lösungen)

Flexibles Rechnen

Rechenstrategien zu 5·24 - Zusammenfassung

Rechenstrategien	Anzahl der Kinder, die diesen Rechenweg angaben
Wiederholte Addition eines Faktors	5
Strategien unter Einbezug von Verdoppelungen	5
Strategien unter Einbezug von Halbierungen	7
Zerlegen in eine Summe	52
Zerlegen in eine Differenz	10
Gegensinniges Verändern	35
Fehlerhafte Strategien	4
Schriftliches Rechenverfahren	1
	119

Rechenstrategien zu 5·24 - Zusammenfassung

Rechenstrategien	Anzahl der Kinder, die diese Rechenstrategie angaben	am einfachsten
Wiederholte Addition eines Faktors	5	1
Strategien unter Einbezug von Verdoppelungen	5	2
Strategien unter Einbezug von Halbierungen	7	5
Zerlegen in eine Summe	52	12
Zerlegen in eine Differenz	10	
Gegensinniges Verändern	35	19
Fehlerhafte Strategien	4	
Schriftliches Rechenverfahren	1	
	119	

54,29%

Gegensinniges Verändern - Argumente der Kinder, wieso diese Rechenstrategie die einfachste ist

$10 \cdot 12 = 120$

- Der Rechenweg ist schneller - Man muss nicht so viel rechnen.
- Man muss nicht so viel schreiben.
- Die Rechnung (nach dem gegensinnigen Verändern) ist leicht - 2mal rechnen und 10mal rechnen ist leicht.
- Das Verdoppeln und Halbieren ist leicht.

Leonardo

Leonardo konnte drei verschiedene Rechenwege zu $5 \cdot 24$ finden:

- **$5 \cdot 24 = 10 \cdot 12$**
- $5 \cdot 24 = 5 \cdot 20 + 5 \cdot 4$
- $5 \cdot 24 = 5 \cdot 30 - 5 \cdot 6$

Er fand den 1. Rechenweg (gegensinniges Verändern) am einfachsten.

Leonardo

„Da muss man einen **Zahlenblick** haben. Also **einfach** sind eigentlich alle, aber Zerlegen und Minus, das ist halt viel Aufwand und der **allerschnellste** ist eigentlich gegensinnig Verändern. Also gegensinnig Verändern, das ist der allerschnellste Rechenweg, aber den kann man nicht immer einsetzen, weil der geht am allerbesten, wenn ein 5er ist und eine andere gerade Zahl, aber z.B.: bei 17·4 würde er auch gehen, aber bei 17·7 würde er nicht gehen, weil 17 keine gerade Zahl und 7 keine gerade Zahl ist, also kann man es da nicht anwenden.“

Zerlegen in eine Summe - Argumente der Kinder, wieso diese Rechenstrategie die einfachste ist

$5 \cdot 24 =$

$5 \cdot 20 = 100$
$5 \cdot 4 = 20$

120

- Die Teilrechnungen sind leichte Rechnungen.
- Der Rechenweg ist schneller - Man muss nicht so viel rechnen.
- Man braucht nur das Einmaleins gut können.
- Da braucht man nur einen Faktor in Zehner und Einer zerlegen und mit dem zweiten Faktor multiplizieren.
- Man kann rechnen ohne viel nachzudenken.
- Der Rechenweg ist sehr sicher.

Zahlenblick oder sichere Strategie?

Dino

Dino fand zwei Rechenwege zur Aufgabe $5 \cdot 24$:

- **$5 \cdot 24 = 5 \cdot 20 + 5 \cdot 4$**
- $5 \cdot 24 = 10 \cdot 12$

Für ihn war der 1. Rechenweg am einfachsten.

Dino

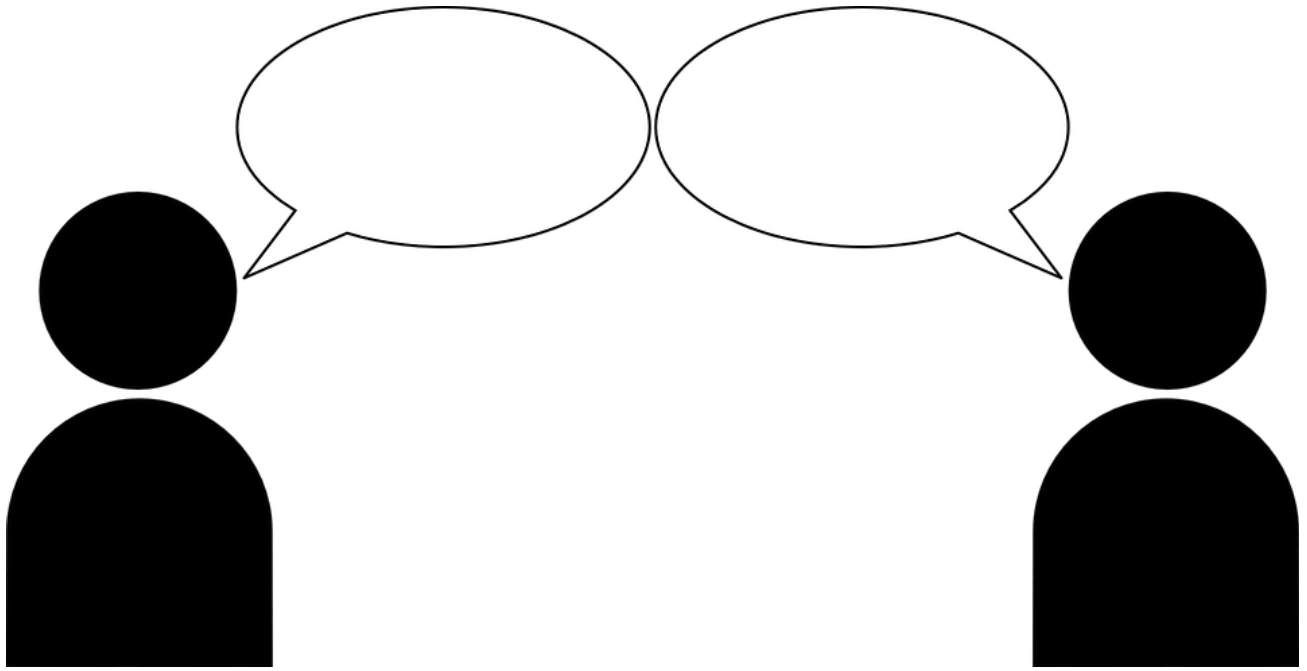
„Der (Zerlegen in eine Summe) ist der einfachste, denn der (gegensinniges Verändern) geht schon schnell und alles, aber der (Zerlegen in eine Summe) ist halt **sehr sicher**, weil da hat man das kleine Einmaleins, da habe ich auch 5·2 gerechnet ist 10 und dann ist 100 und dann noch 5·4 ist 20 und 120!“

Weitere Fragen zum

- theoretischen Hintergrund
- methodischen Vorgehen (Erhebung und Auswertung der Daten)
- Ergebnissen der Forschungsinteressen
- …..

gerne im persönlichen Gespräch!

Diskussion – Anregungen



Danke für die Aufmerksamkeit!

Literatur

- ANGHILERI, J., BEISHUIZEN, M. & VAN PUTTEN, K. (2002). From Informal Strategies to Structured Procedures: mind the gap! Educational Studies in Mathematics, 49(2), 149–170.
- ANGHILERI, J. (2006). Teaching number sense. Continuum: London.
- BAROODY, A. J. (2003). The Development of Adaptive Expertise and Flexibility: The Integration of Conceptual and Procedural Knowledge. In: Arthur J. Baroody und Ann Dowker (Hg.): The development of arithmetic concepts and skills. Constructive adaptive expertise. Mahwah, N.J., London: Lawrence Erlbaum (Mathematical thinking and learning), S. 1–33.
- FREUDENTHAL, H. (1982). Mathematik – eine Geisteshaltung. In: Grundschule (4), S. 140–142.
- KRAUTHAUSEN, G. (1993). Kopfrechnen, halbschriftliches Rechnen, schriftliche Normalverfahren, Taschenrechner: Für eine Neubestimmung des Stellenwertes der vier Rechenmethoden. Journal für Mathematik-Didaktik, 14(3-4), 189–219.
- KRAUTHAUSEN, G. & SCHERER, P. (2014). Einführung in die Mathematikdidaktik. Springer Berlin: Berlin.
- PADBERG, F. & BENZ, C. (2011). Didaktik der Arithmetik. Spektrum: Heidelberg.
- PLOMP, T.; NIEVEEN, N. (Hg.) (2013). Educational design research. Enschede.

Literatur

- SELTER, C. (2000). Vorgehensweisen von Grundschüler(inne)n bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 1000. Journal für Mathematik-Didaktik, 21(2), 227–258.
- SELTER, C. (2003). Flexibles Rechnen – Forschungsergebnisse, Leitideen, Unterrichtsbeispiele. Sache Wort Zahl, 31(57), 45–50.
- MCINTOSH, A. (2005). Mental computation: a strategies approach. Module 1 – introduction.
- STEINWEG, A. S. (2013). Algebra in der Grundschule. Muster und Strukturen–Gleichungen–funktionale Beziehungen. Berlin, Heidelberg.
- THRELFALL, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. ZDM, 41(5), 541–555.
- VAN DE WALLE, J., KARP, K.S. & BAY-WILLIAMS, J.M. (2013). Elementary and middle school mathematics. Teaching developmentally. Pearson: Boston Mass.
- WITTMANN, E. C. (1999). Die Zukunft des Rechnens im Grundschulunterricht: Von schriftlichen Rechenverfahren zu halbschriftlichen Strategien. In: E. HENGARTNER (Hg.): Mit Kindern lernen. Standorte und Denkwege im Mathematikunterricht, Zug: Klett, 88–93.
- ZIEGENBALG, J., ZIEGENBALG, O. & ZIEGENBALG, B. (2016). Algorithmen von Hammurapi bis Gödel. Mit Beispielen aus den Computeralgebrasystemen Mathematica und Maxima.