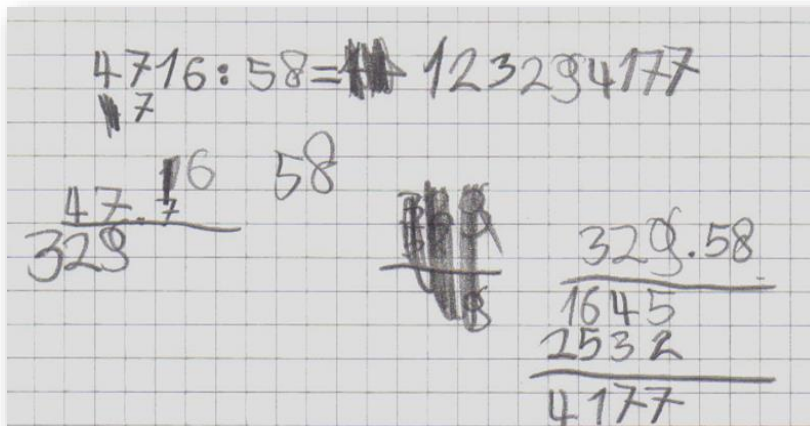


# Probleme der aktuellen Didaktik der Erarbeitung des dezimalen Stellenwertsystems

Fachdidaktiktag  
im Rahmen der IMST-Tagung 2014

Klagenfurt, 23. September 2014  
Michael Gaidoschik

Ein Suchbild zum Einstieg:  
David, 5. Schulstufe



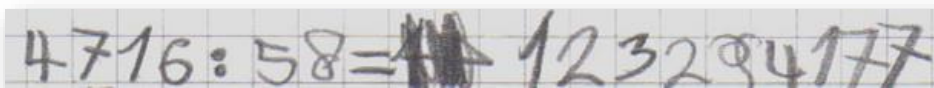
Handwritten student work on grid paper showing a division problem and its solution with various annotations and corrections:

$$4716 : 58 = \text{~~11~~ } 123294177$$

Below the main equation, there are several smaller calculations and annotations:

- A small calculation:  $47 \overline{) 329}$  with a '7' written below the line.
- The number '58' written to the right of the small calculation.
- A large scribble consisting of several vertical lines.
- A long division calculation:  $329 \overline{) 16452532}$  with a horizontal line under the divisor and another under the result '4177'.

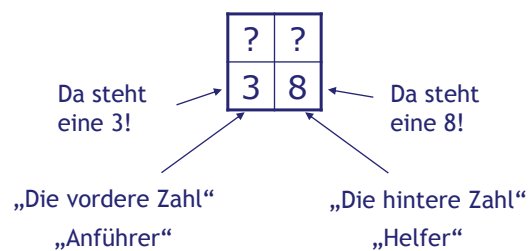
Dazu die fachdidaktische /  
entwicklungspsychologische Theorie:



Fuson u.a. 1997; Verschaffel u.a. 2007:

„concatenated single-digit conception of multi-digit numbers“

„Aneinander gekettete  
einstellige Zahlen“



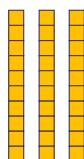
## „Aneinander gekettete einstellige Zahlen“

Z	E
3	8

... auch wenn oft die Stellen (zumindest in Teilbereichen)  
korrekt benannt werden können!

## „Aneinander gekettete einstellige Zahlen“

Z	E
3	8



... auch wenn „Stangen“ und „Würfel“ regelkonform „gelegt“ werden

Die Hälfte  
von 60?

30!

Weil ... 6,  
und dann tu  
ich die Hälfte,  
und dann hab  
ich noch einmal 3.

Die Hälfte  
von 90?

Nein, da geht  
keine Hälfte.

50? Gibt es von 50  
eine Hälfte?

Nein.



Lena, Mitte 3. VS



ALPEN-ADRIA  
UNIVERSITÄT  
KLAGENFURT | WIEN | GRAZ



Noch ein wenig mehr Material - damit  
deutlich wird, worüber wir sprechen...

Pauline, Ende 4. Schulstufe

Schreibe „siebentausendvierzehn“!

7 14

Schreibe „fünzigtausendsiebzig“!



50 70

Studie von Humbach, 2008,  
275 Haupt- und GesamtschülerInnen am Ende ihrer Schulpflicht

„Schreibe ‚neunundzwanzigtausendeins‘!“

19,5 % falsch

www.aau.at 

## Noch ein wenig mehr Material - damit deutlich wird, worüber wir sprechen...

Pauline, Ende 4. Schulstufe

Was ist 1 weniger als 3000?

2000 ?


Humbach (2008): „Rechne im Kopf: 6000 - 6“



275 Kinder, Haupt- und Gesamtschule, am Ende ihrer Schulpflicht

97 GymnasiastInnen, 10. Schuljahr

**16 % falsch**

**9 % falsch**

www.aau.at 

## Noch ein wenig mehr Material - damit deutlich wird, worüber wir sprechen...


100.000 - 10

10.000 - 100

80 "rechenschwache" Jugendliche der 8. Schulstufe:

**82 % falsch**

Quelle: Moser Opitz 2007

www.aau.at 

Hier nur angedeutet:  
Wie es weitergehen könnte...

Kreuze an	
a) die Zehntel in	7,654 ○ ○ ⊗ ○
b) die Hundertstel in	7,654 ○ ⊗ ○ ○

Alicia, Ende 6. Schulstufe  
In dieser Weise von 33 % von 160 RealschülerInnen gelöst

aus: Heckmann & Padberg 2007

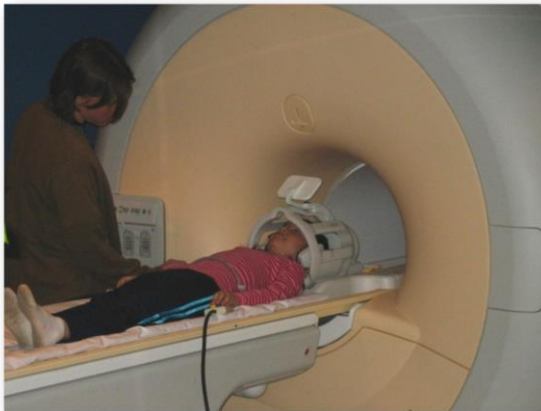
Hier nur angedeutet:  
Wie es weitergehen könnte...

1,3 ist größer als 1,12, denn desto mehr  
Zahlen hinter dem Komma stehen desto  
kleiner ist die Zahl.

Abb. 1: Aussage von Marie, 8. Klasse Realschule, beim Zahlvergleich von 1,3 und 1,12

Aus: Sprenger 2014

## Wo finden wir die Erklärung für solche massiven Defizite?



## Was ich für die nächsten knapp 50 Minuten geplant habe...

Probleme der Didaktik der Erarbeitung des Dezimalsystems

oder

Was (möglicherweise) der **Unterricht** zur Entstehung & Verfestigung  
von Defiziten im Verständnis des Dezimalsystems beiträgt

## Was ich für die nächsten knapp 50 Minuten geplant habe...

Problem 1:  
Traditionelle „Zahlenräume“

Problem 2:  
Nachlässiger Umgang mit einer Idiotie der deutschen Sprache

Problem 3:  
Prozeduren anstelle von tragfähigen Konzepten

Problem 4:  
Nachlässiger Umgang mit der Vielfalt möglicher Materialien

## Unlängst an einer österreichischen PH...

Schreiben Sie die Zahl, die im Dezimalsystem  $40$  geschrieben  
wird, im Sechzersystem!

Lösung vieler Studierender:  $64_6$



## Traditionelle „Zahlenräume“...

„Die Grundidee der dezimalen Struktur wird erst im Zahlenraum bis 1000 richtig sichtbar. Erst wenn zehn Hunderter zu einem Tausender gebündelt werden, findet eine Bündelung dritter Ordnung statt, und das Prinzip der fortgesetzten Bündelung wird deutlich.“

Scherer & Moser Opitz 2010, S. 140

## Traditionelle „Zahlenräume“...

„Für eine vertiefende Behandlung des Zehnersystems [...] dürfte es [...] zu Beginn des zweiten Schuljahres noch zu früh sein, denn die genannten beiden Prinzipien [sc. Bündelungs- und Stellenwertprinzip; Anm. M.G.] können erst dann voll erfasst werden, wenn zumindest noch die Hunderter bzw. Tausender hinzukommen.“

Hasemann & Gasteiger 2014


  
 ALPEN-ADRIA
   
 UNIVERSITÄT
   
 KLAGENFURT | WIEN GRAZ

## Auch anderes hat Tradition...





www.aau.at 


  
 ALPEN-ADRIA
   
 UNIVERSITÄT
   
 KLAGENFURT | WIEN GRAZ

## Materialkunde oder Mathematik?





www.aau.at 

## Andere Länder, ähnliche Probleme...



1990

www.aau.at 

## Noch eine Tradition...

Zahlenreise 4, veritas

Orientierung im Zahlenraum bis 10 000: Tausenderschritte



① Zähl: Wie oft mal 1000?



Orientierung im Zahlenraum bis 10 000: Zehnerschritte

① Schreib die Zahl und die dazugehörige Addition!

ZT	T	H	Z	E
1	7	6	0	
3	0	8	0	
6	5	3	0	
7	0	4	0	
9	9	9	0	

Zahl	Rechnung
→ _____	= 1000 + 700 + _____
_____	= _____
_____	= _____
_____	= _____
_____	= _____

# Noch eine Tradition...

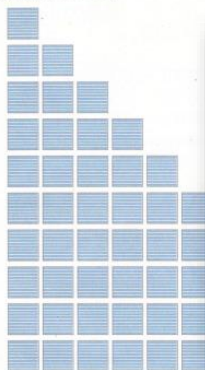


Orientierung im Zahlenraum bis 100 000: Zehntausenderschritte

10 Einer = 1 Zehner  
 10 Zehner = 1 Hunderter  
 10 Hunderter = 1 Tausender  
 10 Tausender = 1 Zehntausender  
 10 Zehntausender = 1 Hunderttausender

Zahlenreise 4, veritas

① Zähl bis 100 000!



Orientierung im Zahlenraum bis 100 000: Zehnerschritte, Einerschritte

① Bestimme den Stellenwert und schreib die Zahl!

HT	ZT	T	H	Z	E	
7	3	5	6	0	0	→ 7ZT 3T 5H 6Z 0E → 73560
1	5	8	2	0	0	_____
2	0	5	4	0	0	_____
6	7	8	0	0	0	_____
1	0	0	0	0	0	_____
5	9	4	2	0	0	_____

# Eine Tradition, die trennt, was zusammengehört!



HB	ZB	B	HMd	ZMd	Md	HM	ZM	M	HT	ZT	T	H	Z	E

## Eine Tradition - aber auch förderlich?

These:

Die in Österreich immer noch verbreitete Segmentierung

ZR 1000	erste Monate der 4. VS
ZR 10.000	mehrere Wochen/Monate
ZR 100.000	mehrere Wochen/Monate
1.000.000 als Grenze	

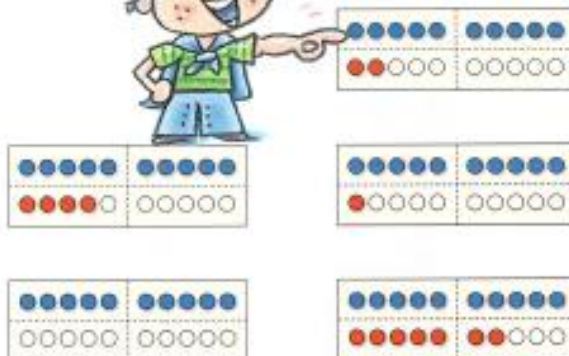
behindert Einsicht in die Systematik der Zahlwortbildung  
(und damit ins Stellenwertsystem insgesamt)!

## Zurück in die erste Schulstufe...

2 Blitzlesen:  
Erklärt  
wie Rim.



Es sind 12,  
1 Zehner und 2 Einer.



Zahlenzauber 1,  
Oldenburg

## „Seit langer Zeit üblich..“



„Schon seit langer Zeit ist es in Deutschland üblich, im ersten Schuljahr den Raum der natürlichen Zahlen bis 20 gründlich zu erarbeiten und am Ende des Schuljahres einen Ausblick auf den Hunderterraum - in der Regel nur auf die dortigen Zehnerzahlen - zu geben.

Padberg & Benz 2011, S. 27

www.aau.at



## ... wenn auch nicht überall ...



„Abweichend hiervon wurden in der ehemaligen DDR im ersten Schuljahr schon sämtliche Zahlen bis 100 ausführlich thematisiert. Bei den Rechenoperationen erfolgte allerdings ebenfalls eine Beschränkung auf den Zwanzigerraum.“

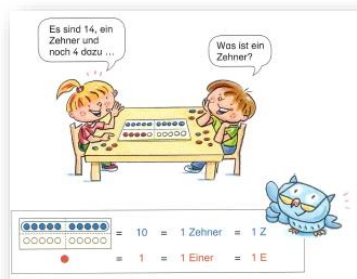
Padberg & Benz 2011, S. 27

www.aau.at



## Üblich - aber auch didaktisch wohlbegründet?

10 = 1 Zehner ???



Onur, 1. Schulstufe:

6 = 1 Sechser !

$$66 - 6 = 7$$

$$77 - 7 = 8$$

Gaidoschik 2010: Interviews mit 139 ErstklässlerInnen

16 - 10      Zwei Wochen vor Ende des 1. Schuljahres:

## ZR 20: Eine didaktische Entscheidung - mit Konsequenzen

Gaidoschik, Fellmann & Guggenbichler (in Vorb.):

- Interviews Ende Schuljahr in 4 ersten Klassen
- Lehrkräfte aus „EVEU“-Fortbildungsprogramm
- Klar erkennbarer Fokus auf Ableitungsstrategien im ZR 20

# ZR 20: Eine didaktische Entscheidung - mit Konsequenzen



Gaidoschik, Fellmann & Guggenbichler (in Vorb.):

- Fast durchwegs beeindruckende Leistungen bei Aufgaben mit Zehnerüber- und Zehnerunterschreitung
- Aufgaben wie  $11 + 6$ ,  $19 - 9$  für diese Kinder oft schwieriger
- Dabei beliebt: Ableitungen aus  $10 + 6$  /  $19 - 10$

Klar erkennbarer Fokus auf Ableitungsstrategien im ZR 20...

www.aau.at



Wittmann & Müller 2012, Zahlenbuch 1

### Zehnerbündel

Als die Menschen noch keine Zahlen kannten, nahm ein Hirte ein Stück Holz, wenn er seine Schafe zählen wollte. Für jedes Schaf schnitt er eine Kerbe ein.  
Heute werden Zahlen verwendet.

Wie viele Zehner? Wie viele Einer?

**1**

Z	E
1	0

**2**

Z	E
2	0

**3**

Z	E
3	0

**4**

Z	E
3	0

### Zehnerbündel

**4** Wie viele Zehner? Wie viele Einer?

Z	E
3	0

Z	E
3	0

**5** Wie viele?

Z	E
3	0

Z	E
3	0

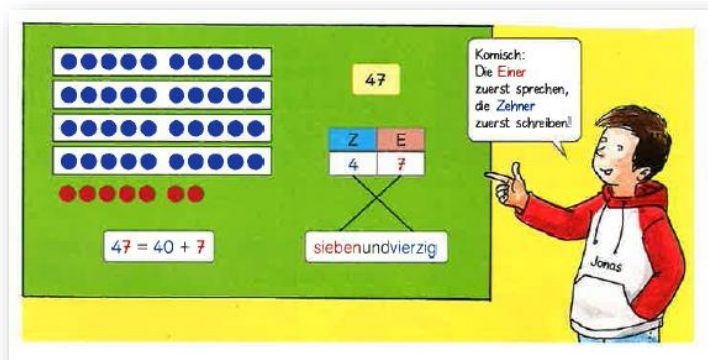


Sie kennen das...

$$54 + 7 = 52$$

$$72 - 3 = 96$$

Ein „positives Beispiel“?  
(vgl. Padberg & Benz 2011, S. 65)



Könisch: Die Einer zuerst sprechen, die Zehner zuerst schreiben!

## Ein meines Erachtens dringend gebotener „didaktischer Dreischritt“

- 1) Bündelungsprinzip
  - 2) Positionsprinzip
  - 3) Sprechweise
- } Warum in dieser Phase nicht Zehner-Einer-Sprechweise?

## Immerhin ein Anfang im Bereich der „empirischen Forschung zweiter Art“...

The effectiveness of Korean number naming on insight into numbers in Dutch students with mild intellectual disabilities

Johannes E.H. Van Luit<sup>a,\*</sup>, Mariët J. Van der Molen<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Utrecht University, Heidelberglaan 1, 3584 CS Utrecht, The Netherlands

<sup>b</sup>University of Amsterdam, Roetersstraat 15, 1018 WB Amsterdam, The Netherlands

### ARTICLE INFO

#### Article history:

Received 16 March 2011  
Accepted 27 March 2011  
Available online 18 May 2011

#### Keywords:

Mild intellectual disabilities  
Number naming  
Intervention  
Number insight  
Place value

### ABSTRACT

**Background:** Children from Asian countries score higher on early years' arithmetic tests than children from Europe or the United States of America. An explanation for these differences may be the way numbers are named. A clear ten-structure like in the Korean language method leads to a better insight into numbers and arithmetic skills. This assumption forms the basis of the current study.

**Method:** Examined is whether an intervention with number naming in the Korean way influences number awareness of students with mild intellectual disabilities ( $N = 70$ ; mean age: 9;0 years).

**Results:** The results indicate a positive effect of this alternative method of number naming on the insight into numbers up to 20. However, the effect did not generalize to insight into numbers 21–100.

**Conclusions:** The Korean method of number naming seems to be a promising way to teach students with mild intellectual disabilities insight into numbers.

© 2011 Elsevier Ltd. All rights reserved.

## Eine speziell für das Dezimalsystem wichtige Unterscheidung:

„Prozedurales Wissen“

Wissen, wie (es geht):

Eingeübte Prozeduren,  
auch ohne Verständnis  
möglich

„Konzeptuelles Wissen“

Wissen, was und warum:

Tragfähige Konzepte,  
auf deren Basis Prozeduren  
erst verständlich werden

vgl. LABINOWICZ 1985; HIEBERT 1986; RITTLE-JOHNSON u.a. 2001;  
GERSTER & SCHULTZ 2000

## Prozedurales Wissen als Ziel & Zweck?

①. Rechne dazu!

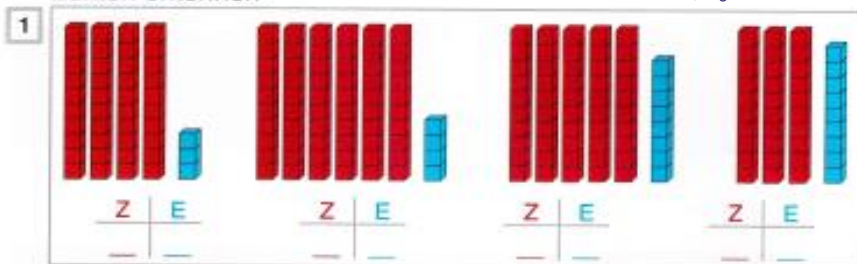
$72 + 4 =$ _____	$83 + 5 =$ _____	$46 + 3 =$ _____	$72 + 5 =$ _____
$65 + 3 =$ _____	$96 + 3 =$ _____	$21 + 5 =$ _____	$95 + 4 =$ _____
$31 + 6 =$ _____	$24 + 4 =$ _____	$42 + 5 =$ _____	$62 + 6 =$ _____
$57 + 3 =$ _____	$63 + 5 =$ _____	$81 + 7 =$ _____	$43 + 6 =$ _____
$36 + 0 =$ _____	$76 + 1 =$ _____	$53 + 5 =$ _____	$31 + 8 =$ _____



## Material für das Einüben von Prozeduren...

### Zahlen erkennen

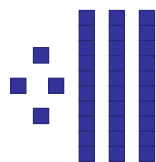
Mein 2. Mathematikbuch, Jugend & Volk



Was wird hier gelernt?

## Material zum Aufbau tragfähiger Konzepte!

Welche Zahl ist hier dargestellt?



43

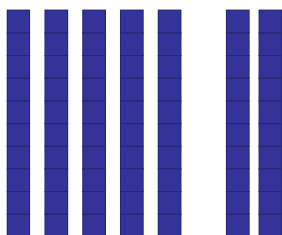
34



## Material und gezielt gewählte Aufgaben zum Aufbau tragfähiger Konzepte!

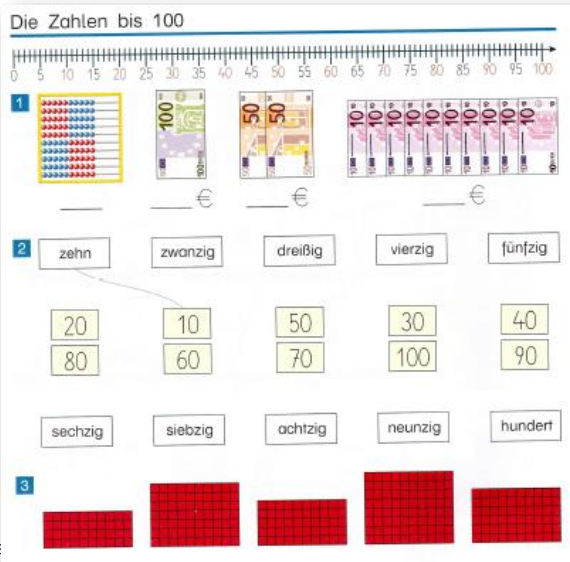
70 gerecht auf 2 Portionen aufteilen?





$$70 - 5 = ?$$



## Eine typische Schulbuchseite...

Die Zahlen bis 100




1    

— € — € — €

2 zehn zwanzig dreißig vierzig fünfzig

20	10	50	30	40
80	60	70	100	90

sechzig siebzig achtzig neunzig hundert

3 

Z

Wir lernen  
Mathematik 2

## Ein sonst in vielem vorbildhaftes Lehrwerk...

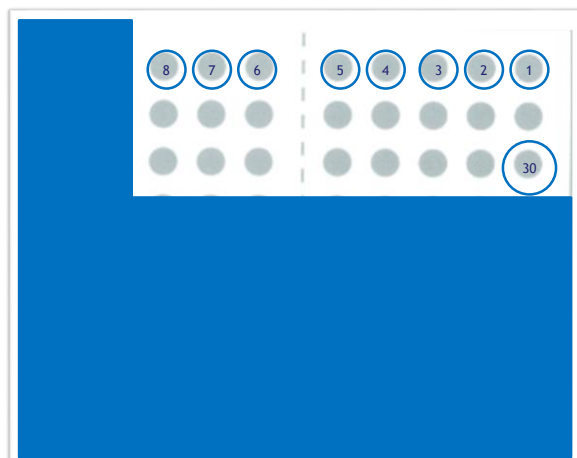


Orientierung im Hunderterraum	
	■ <b>Zahlen in der Umwelt:</b> Zehnerbündel 10
	■ Schätzen und Zählen, Bündeln 11 – 13
	■ <b>Symmetrie:</b> Spiegeln, Viel und wenig 14 – 15
	■ Mit Zehnern rechnen (Anwendung des Einspluseins) 16
	■ Hunderterfeld, Zahlen zeigen und aufschreiben ⚡ <i>Wie viele?</i> 17 – 19
	■ Hundertertafel, ⚡ <i>Welche Zahl?</i> 20 – 21
	■ Hunderterreihe, ⚡ <i>Zählen</i> ⚡ <i>Ergänzen zum Zehner</i> 22 – 23
	■ Rechenstrich, ⚡ <i>Zählen in Schritten</i> 24 – 25
	■ <b>Zahlen in der Umwelt</b> 26
	■ <b>Längen:</b> Meter und Zentimeter, Zeichnen und Messen 27 – 28
	■ <b>Formen legen:</b> Legen und Zeichnen, Tangram 29 – 31
	■ Ergänzen bis 100, ⚡ <i>Ergänzen bis 100</i> 32
	■ 100 teilen, ⚡ <i>100 teilen</i> 33
	■ <b>Geld:</b> Alle Münzen und Scheine, Legen und Überlegen, Geldbeträge unterschiedlich legen 34 – 36


Zahlenbuch 2, Klett




## Lena, 3. Schulstufe, zeigt 38 Punkte am 100-Punkte-Feld




Marie, 2. Schulstufe  
(vgl. Schäfer 2005, S. 191)



$3 \cdot 5 = 25$


www.aau.at 

Marie, 2. Schulstufe  
(vgl. Schäfer 2005, S. 191)



$3 \cdot 5 = 25$

Vgl. auch  
Schipper et al. 2011!

www.aau.at 

## Variation zu welchem Zweck, um welchen Preis?

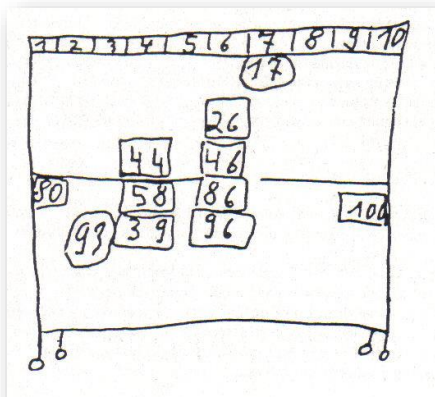


„Das von DIENES in den 60-er Jahren propagierte didaktische Prinzip [...] der Variation der Veranschaulichungsmittel [...] im Lichte neuerer Erkenntnisse relativiert zu betrachten“

KRAUTHAUSEN & SCHERER 2007

www.aau.at 

## "Man sieht nur, was man weiß"



Henk, 2. VS

Aus:  
Lorenz/Radatz,  
1993

www.aau.at 



## Variation zu welchem Zweck, um welchen Preis?



„Jedes neue Material ist eine eigene Fremdsprache ...  
Materialvielfalt ist eher ein Ausdruck von Hilflosigkeit,  
bestenfalls einer theoretischen Hoffnung.“

LORENZ 2000

www.aau.at 

## Was wir deshalb im Unterricht unbedingt beachten sollten:



„Der Umgang mit jedem neuen Material muss von den Kindern  
neu gelernt werden.“

HASEMANN 2003

Ergänzung MG:  
Und dafür brauchen manche Kinder

- sehr gezielte Anregungen
- und ausreichend Zeit, diese für Lernprozesse zu nutzen!

## Gut für „Orientierung im Zahlenraum“?

Orientierung im Zahlenraum bis 100

Alle Zahlen bis 100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Zahlenreise 2, veritas

Was liegt zwischen  
40 und 50?

## Gut für „Orientierung im Zahlenraum“?

Orientierung im Zahlenraum bis 100

Alle Zahlen bis 100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Zahlenreise 2, veritas

Was ist  
näher bei 50:  
60 oder 51 ?

Lorenz (2002)  
zur 100er-Tafel:  
„Desorientierung“

## Die größte Leistung der Hindus...

... und diejenige mathematische Errungenschaft, die am meisten zum Fortschritt der menschlichen Intelligenz beigetragen hat, ist die Erfindung des Stellenwertsystems.

Florian Cajori

## Eine nur allzu berechtigte Warnung...

„Diese Effizienz und geniale Einfachheit [sc. des Dezimalsystems; Anm. MG] darf allerdings *nicht* dazu führen, dass wir ihren Schwierigkeitsgrad bei der *Erarbeitung* in der Grundschule unterschätzen.“

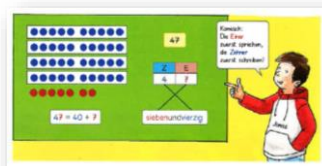
Padberg & Benz 2011, S. 58

## Eine nur allzu berechtigte Warnung...

„Place value [...] is a product of centuries of construction by adults.  
Children cannot swallow this product in ready-made form.”

Kamii 1986, S. 85

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100



www.aau.at 

## Und damit vorerst...

Danke für Ihre  
Aufmerksamkeit!

Auf in die  
Diskussion!

[michael.gaidoschik@aau.at](mailto:michael.gaidoschik@aau.at)



www.aau.at 