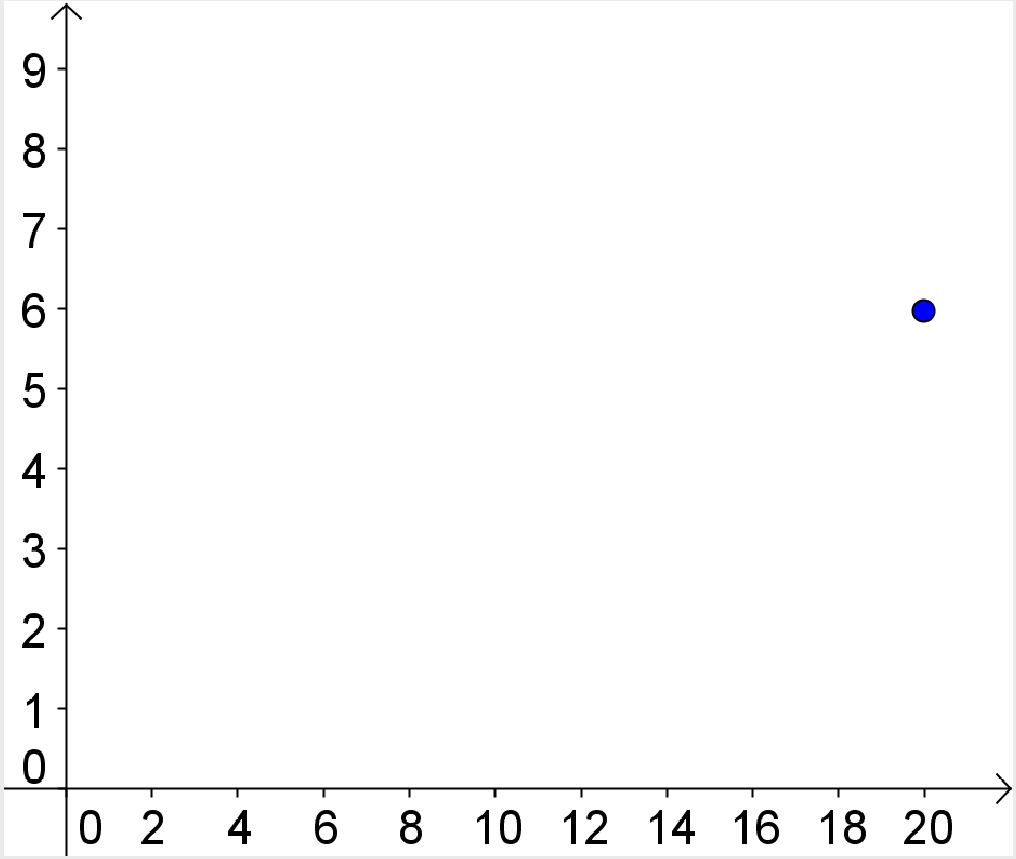
Henning Körner

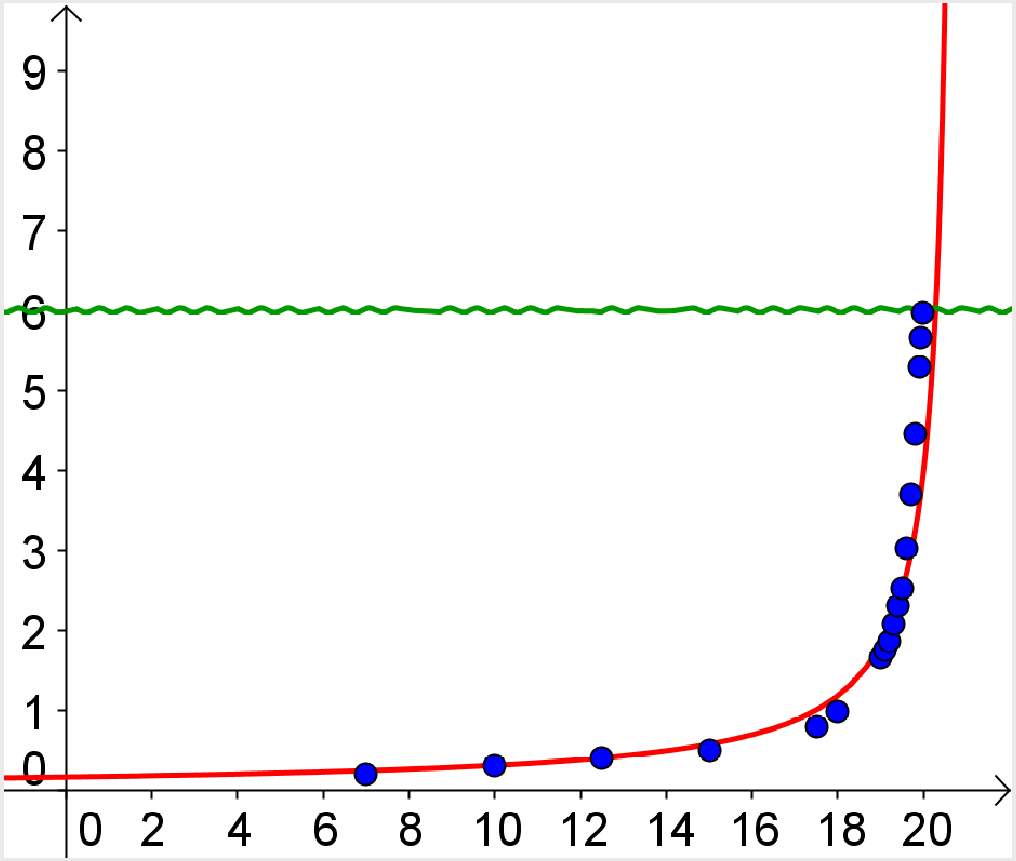
Vom Bestand zur Änderung und zurück mit Technologie – Ein verstehensorientiertes Konzept zur Analysis

Soweit ich mir einen Überblick über die sehr bunte, sehr schwer zu übersehende Praxis des jetzigen Augenblicks habe beschaffen können, überwiegt in der Infinitesimalrechnung der Schulen die formale Seite der Sache, die Rechentechnik des Differenzierens und Integrierens, um ein kurzes Wort zu gebrauchen: der Kalkül. Dieser Kalkül ist ein ungemein bequemer Unterrichtsgegenstand für die Schule, ... Die Frage ist nur, ob für die allgemeine Bildung, die die Schule erteilen will, in diesem Kalkül irgendein Wert gelegen ist, ein methodischer Wert, der das Niveau fördert. Und in diesem Punkte muß meine Antwort auf die Frage nach dem Nutzen der Infinitesimalrechnung auf der Schule sehr unzweideutig lauten: Wenn die Schule nicht imstande ist, aus der Infinitesimalrechnung mehr als den bloßen Kalkül herauszuholen, dann muß sie die Infinitesimalrechnung besser heute als morgen wieder beiseite stellen.

Was ist das zentrale Problem an 6 Milliarden Menschen?



Was ist das zentrale Problem an 6 Milliarden Menschen?



Nicht der Bestand ist entscheidend, sondern die Änderung!
Leitfrage: Wie vom Bestand zur Änderung?

Change is a fundamental characteristic of the universe. Objekts change location, size, direction of motion, temperature, mass, charge, and so on. The mathematics that existed before the invention of calculus, such as algebra and geometry, were hindered in describung the universe by their static nature. Calculus, the mathematics of change, is specifically designed to create mathematical models of a changing universe.

Ein Bus fährt los.
An der ersten Haltestelle steigen 5 Personen ein.

An der nächsten Haltestelle steigen 2 Personen ein und eine aus.

Beim nächsten Halt steigen 6 Personen ein und 2 aus.

An der nächsten Haltestelle steigen 3 Personen aus.

Wie viele Personen sitzen im Bus?

Man kennt Änderungen, aber nicht den Bestand.
Leitfrage: Wie von der Änderung zum Bestand?

„Wie hat es dir auf dem Kramermarkt gefallen?“
„Naja, besser als letztes Jahr.“ Mona Körner

Ein Blick zurück...

Folgen/
Grenzwert

↓

Ableitung

↓

Funktionsuntersuchungen

↓

Anwendungen

Innermathematisch
orientierte Fachsystematik

Epsilontik ⟷ h-Methode
(Binom, ausklammern, kürzen)

- Betragsungleichungen
- „Nmalxhochnminus1 Analysis"
- klassische Gleichungs-kanon
- wenig Sinn, oft unverstandene Kalküle

- Bildbetrachtungen
- Beschränkung auf Einzelfälle
- kaum Begriffsbildung
- keine kognitiven Konflikte

Eine Anwendung als krönender Abschluss ⟷ Nur Anwendungen Einkleidungen), nur grafisch-numerischen Lösungen.

Wenn der Analysisunterricht seiner allgemeinbildenden Funktion für einen immer größer werdenden Anteil der heranwachsenden Generation gerecht werden will, müssen die Anwendungen, nicht der kanonische Aufbau der Analysis im Mittelpunkt des Unterrichts stehen.

Die Bedeutung des Differentialquotienten muss dann sowohl von dem historisch gewachsenen Anwendungsaspekt (Bewegungsgleichungen) als auch von dem schwierigen Prozess der Erfassung des unendlich Kleinen her herausgearbeitet werden.

Wir haben die Chance, moderne Hilfsmittel zur Verbesserung des Dialogs zwischen Lernenden und Stoff einzubeziehen, hüten wir uns vor der Gefahr, sprachlose Softwarekonsumenten heranzubilden!

Da die Analysis für viele Berufs- und Studienzweige unverzichtbar ist, wird sich der Analysisunterricht (auch aus finanziellen Gründen) nur sehr langsam entwickeln. Wegen der Verfügbarkeit etablierter Aufgabenplantagen wird er auch nicht prinzipiell angezweifelt werden.

Kontexte und kognitive Konflikte!

1. Änderungen

2. Das Unendliche

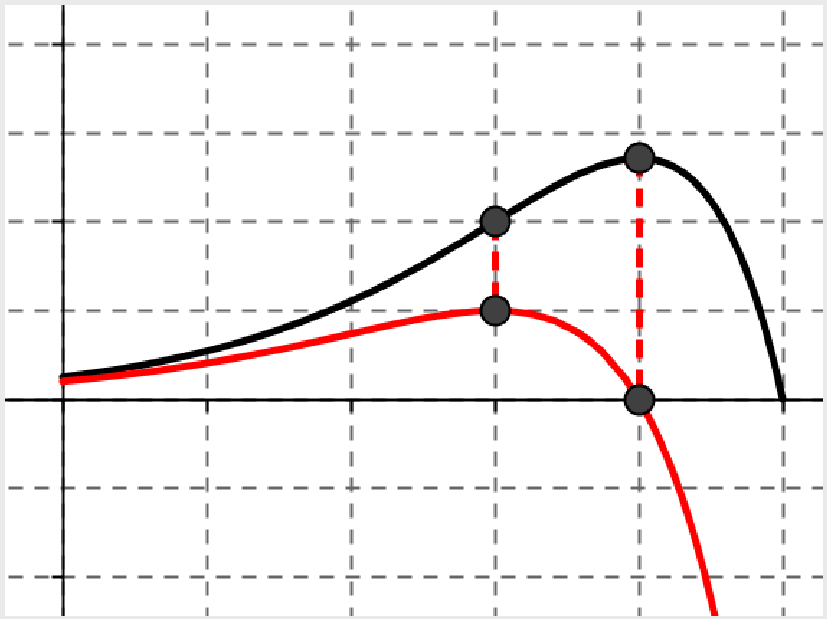
3. Funktionen

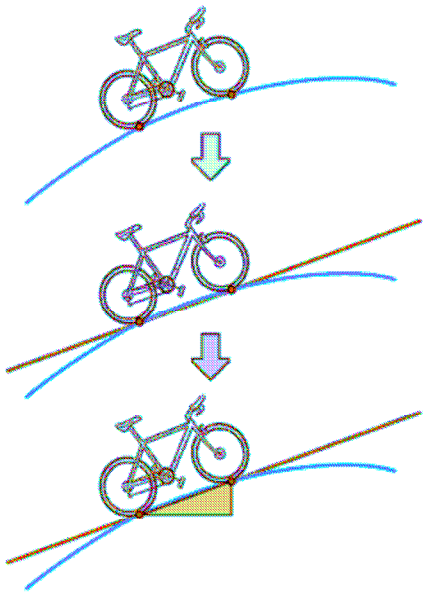
4 Fruchtfliegen

Eine Fruchtfliegenpopulation entwickelt sich unter Laborbedingungen gemäß der nebenstehenden Grafik.

a) Beschreibe die Entwicklung mit eigenen Worten. Findest du eine Begründung für den Verlauf der Kurve?

b) Skizziere den Graphen der Änderungsrate des Bestandes.





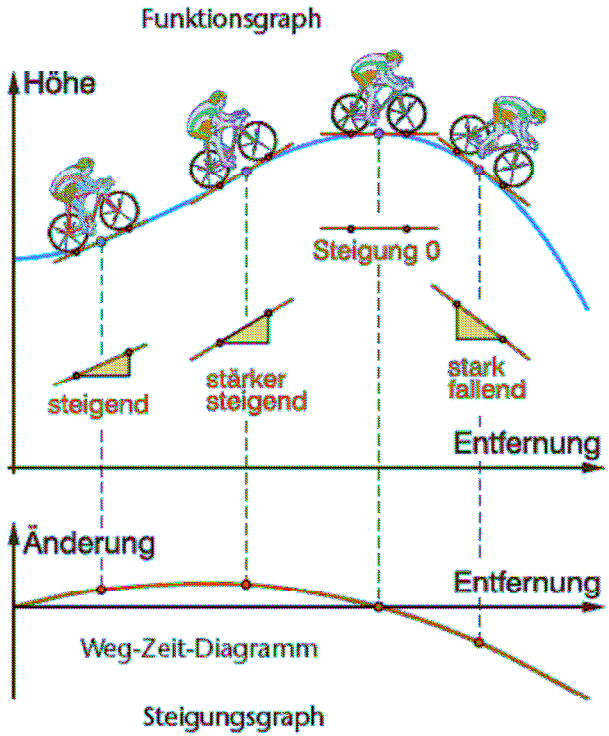
Die Gerade durch die Berührungspunkte kann man als **Sekante** der Kurve bezeichnen. An Stelle des Radfahrers kann man auch ein Lineal benutzen.

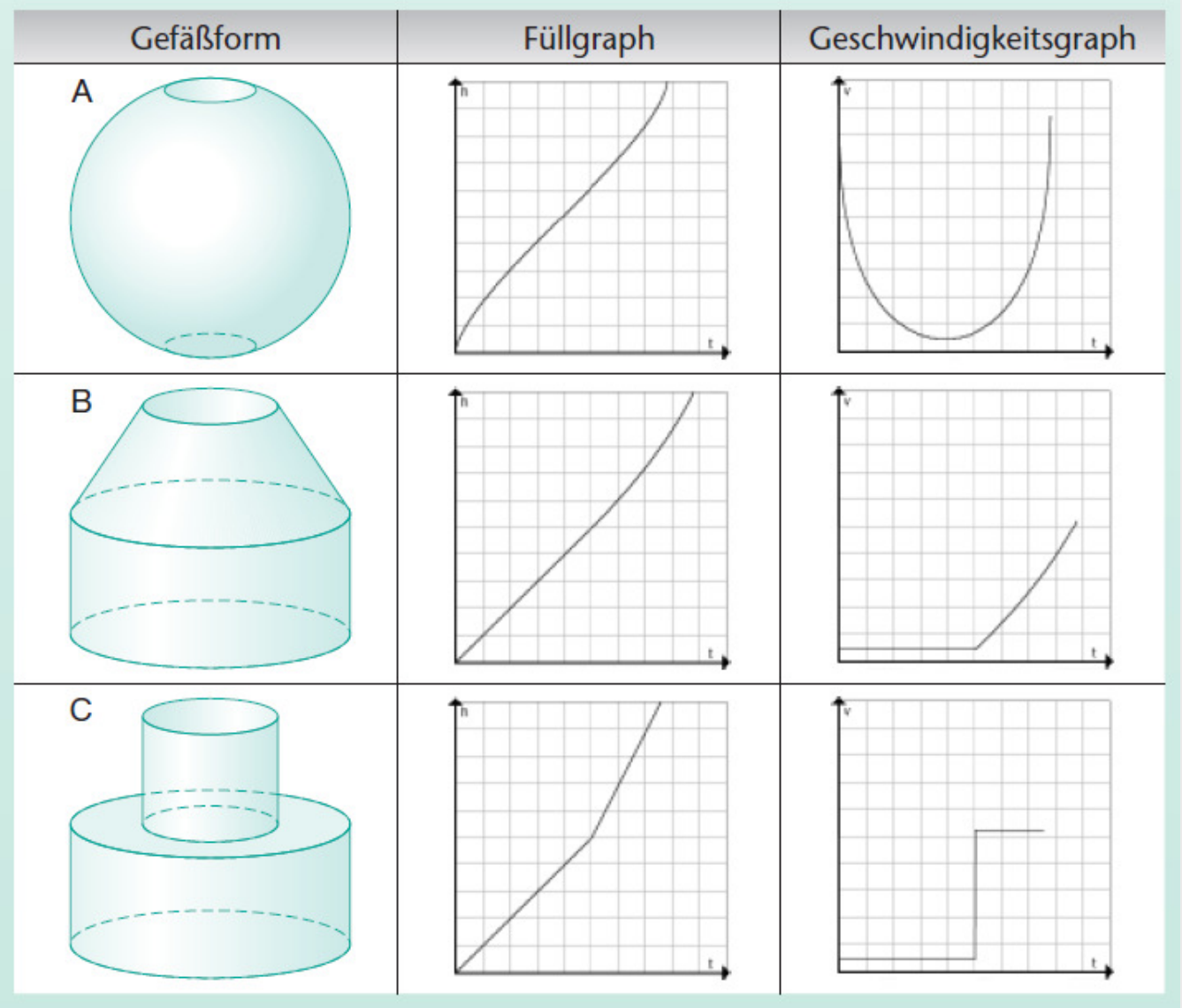
Die **Änderungsrate** an einer bestimmten Stelle hängt eng mit der „Steilheit" des Graphen an dieser Stelle zusammen.

Je steiler der Graph ansteigt oder abfällt, desto stärker ändert sich der Funktionswert an dieser Stelle.

Anders als bei einer Geraden, die überall gleichmäßig ansteigt oder abfällt, ändert sich die Steigung einer Kurve offenbar von Punkt zu Punkt.

Das Bild verrät, wie man die Steigung an einem bestimmten Kurvenpunkt schätzen kann: Der Radfahrer fährt auf der Kurve entlang. Wenn er sich mit seinen Pedalen über dem bestimmten Kurvenpunkt befindet, berühren die beiden Räder links und rechts davon die Kurve. Diese Berührungspunkte verbinden wir in Gedanken mit einer Geraden. Die Steigung dieser Geraden gibt einen guten Näherungswert für die Steigung der Kurve in dem Punkt. Damit kann der *Steigungsgraph* qualitativ skizziert werden. Er gibt Auskunft über die Änderungsrate an jeder Stelle.




Gefäßform
Füllgraph
Geschwindigkeitsgraph
A
B
C

Aus:
NEUE WEGE

5 *Durchschnittliche Änderungsraten auf beliebigen Intervallen*

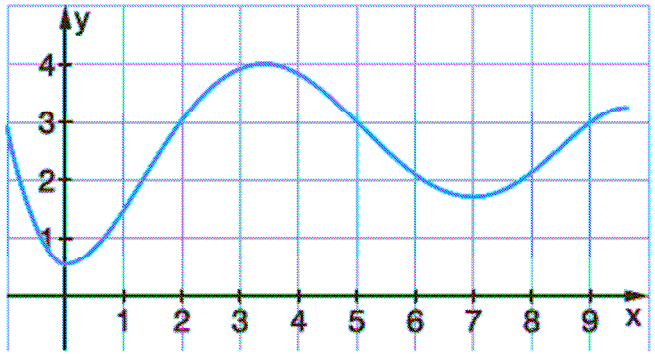
a) Finde allein mit Berechnungen heraus, ob der Graph von $f(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$ in den Intervallen $[-3; 0]$, $[0; 3]$ und $[3; 6]$ eine positive oder negative durchschnittliche Steigung hat. Vergleiche mit einer Skizze auf dem GTR.

b) Beschreibe, welche Schwächen durchschnittliche Änderungsraten auf größeren Intervallen haben können.

c) Gib drei Intervalle an, bei denen die durchschnittliche Änderungsrate deiner Meinung nach aussagekräftig ist.

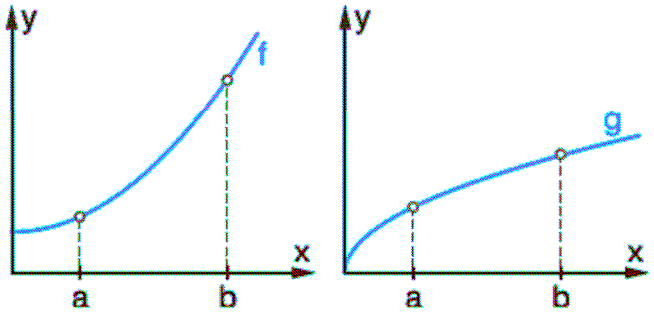
7 *Rechnen am Graphen*

In welchen Intervallen lässt sich deiner Meinung nach der Kurvenverlauf durch eine durchschnittliche Änderungsrate angemessen charakterisieren? Gib solche Intervalle an und berechne dafür mit den Daten aus der Zeichnung die durchschnittlichen Änderungsraten.



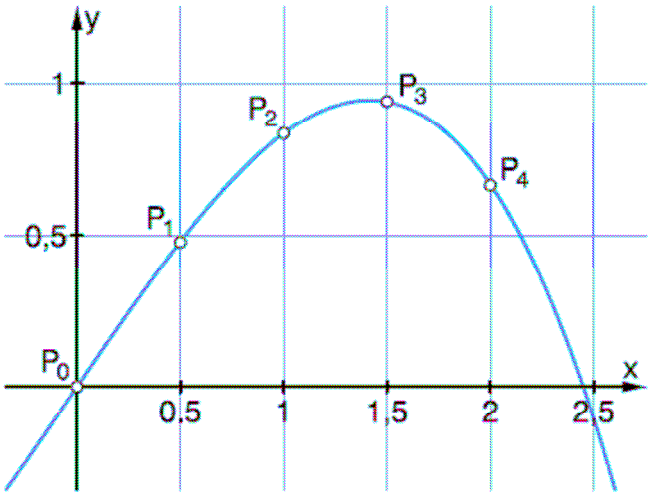
9 *Nachdenken und überprüfen*

Für die nebenstehenden Graphen seien Näherungswerte für die Steigungen an den Stellen a und b bekannt. Was kannst du jeweils über die mittleren Steigungen im Intervall $[a; b]$ im Vergleich zu den Näherungswerten aussagen? Begründe.



10 *Achterbahn*

Das Bild zeigt einen kleinen Ausschnitt einer Achterbahn. Ein Teilstück einer solchen Achterbahn kann durch die Funktion $y = -\frac{1}{6}x^3 + x$ im Intervall [0; 2,5] beschrieben werden (x und y jeweils in 10 m-Einheiten).



a) Wie steil ist es in den angegebenen Punkten?

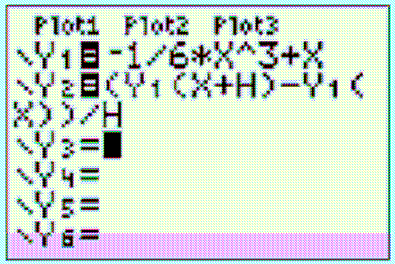
b) An welcher Stelle liegt der höchste Punkt? Benutzen Sie zum Finden dieses Punktes auch die Steigung.

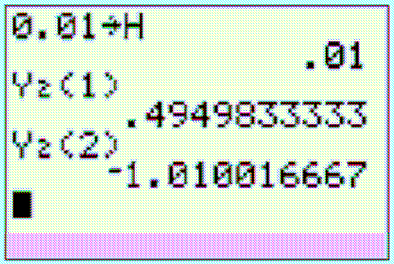
c) An welchen Stellen vermuten Sie das größte Gefälle und die größte Steigung? Berechnen Sie je einen Näherungswert für diese Steigungen.

Differenzenquotienten mit dem GTR

WERKZEUG

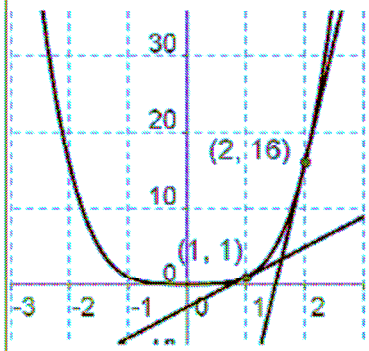
Differenzenquotienten können gut mit dem GTR ausgewertet werden. Für die weitere Arbeit ist es sinnvoll, den Eintrag in Y_2 beizubehalten.

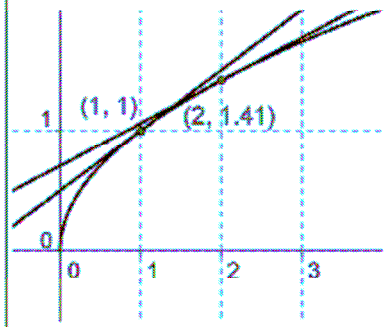


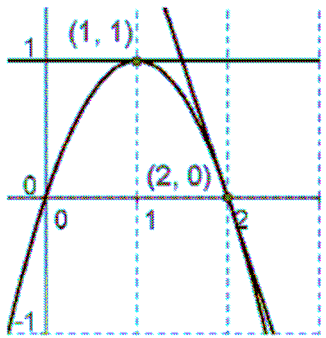


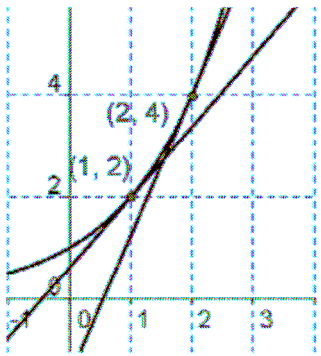
h	$f(x) = x^4$		$f(x) = \sqrt{x}$		$f(x) = 2x - x^2$		$f(x) = 2^x$	
	a = 1 P(1|?)	a = 2 P(2|?)	a = 1 P(1|?)	a = 2 P(2|?)	a = 1 P(1|?)	a = 2 P(2|?)	a = 1 P(1|?)	a = 2 P(2|?)
0,01	4,060401			0,3531125				
0,001		32,024008				−2,001		
0,0001							1,3863424	
0,00001								
$h \to 0$?								

h	$f(x)=x^4$		$f(x)=\sqrt{x}$		$f(x)=2x-x^2$		$f(x)=2^x$	
	$a=1$	$a=2$	$a=1$	$a=2$	$a=1$	$a=2$	$a=1$	$a=2$
0,01	4,060401	32,240801	0,498756211	0,353112550	-0,01	-2,01	1,391110011	2,782220022
0,001	4,006004001	32,02400800	0,499875062	0,353509207	-0,001	-2,001	1,386774925	2,773549850
0,0001	4,00060004	32,00240008	0,499987501	0,353548971	-0,0001	-2,0001	1,386342408	2,772684815
0,00001	4,00006	32,00024	0,49999875	0,35355295	-0,00001	-2,00001	1,38629917	2,77259833
$h \to 0$	4	32	0,5	?	0	-2	?	?





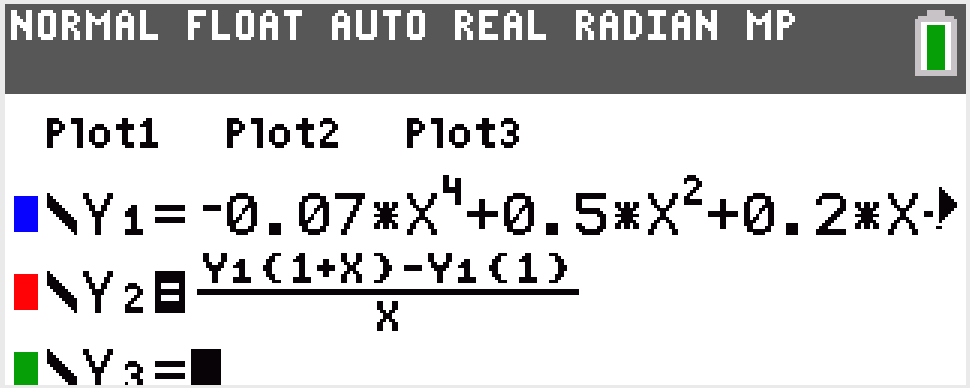


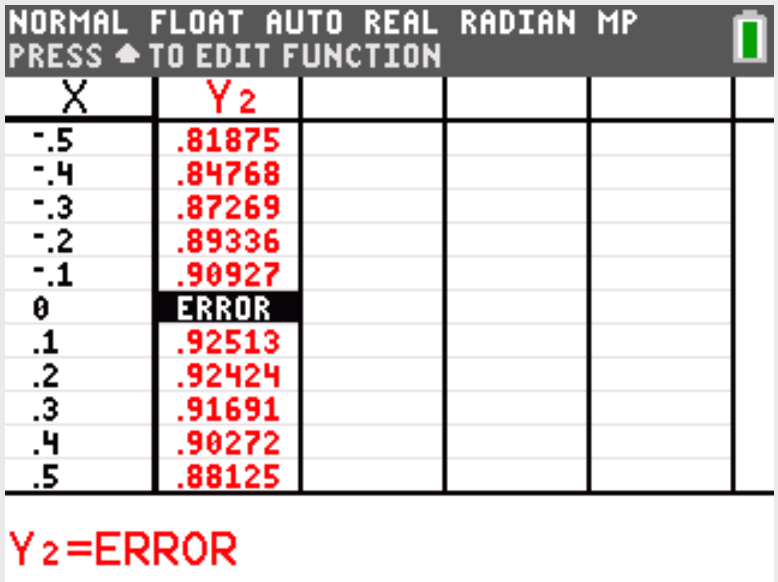


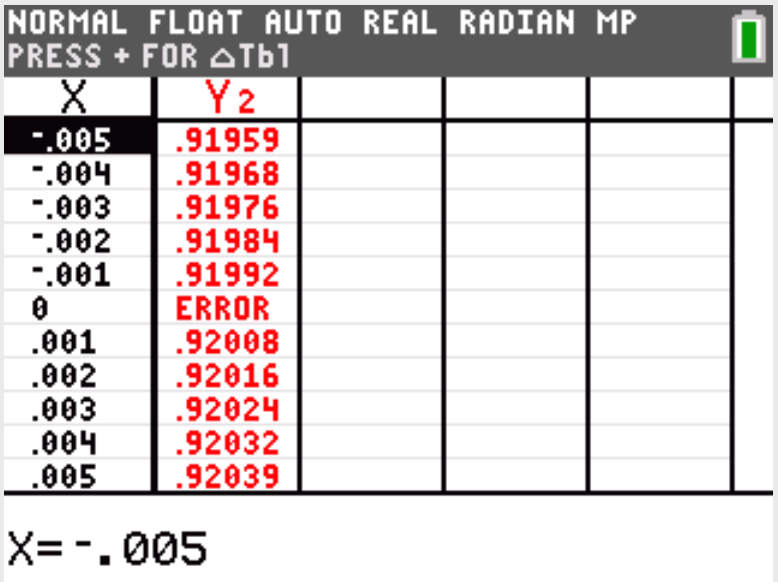
Die Sekantensteigungsfunktion

$$msek(x,h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

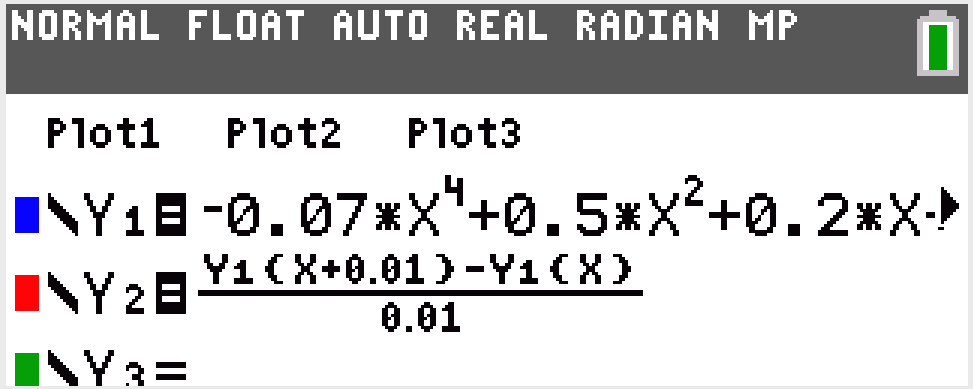
lokal

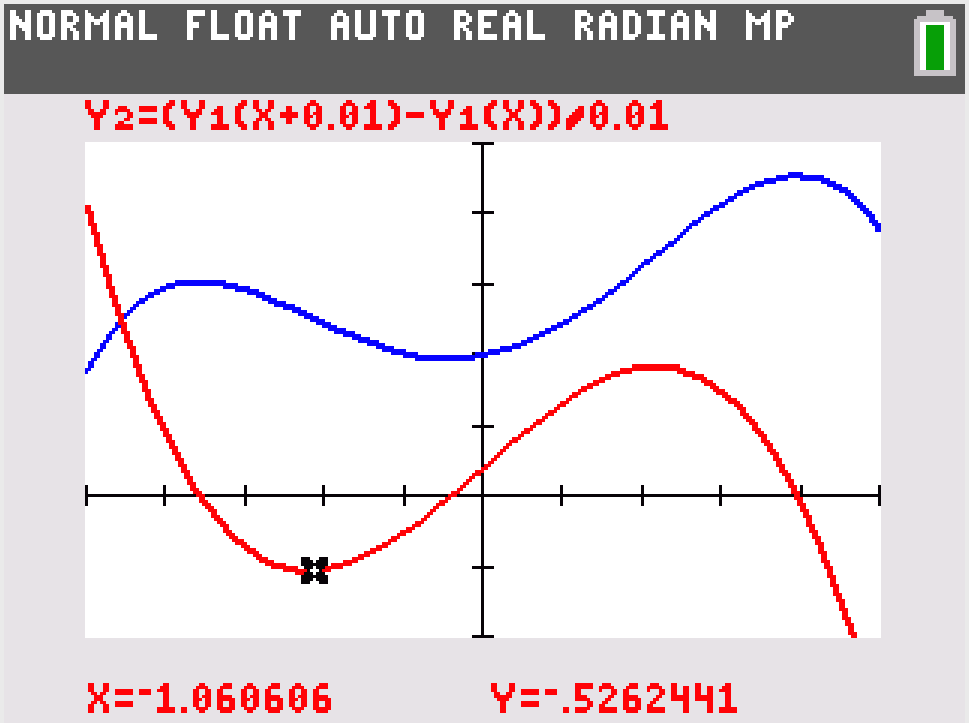

NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP
Plot1 Plot2 Plot3
Y1=-0.07*X^4+0.5*X^2+0.2*X
Y2=(Y1(1+X)-Y1(1))/X
Y3=

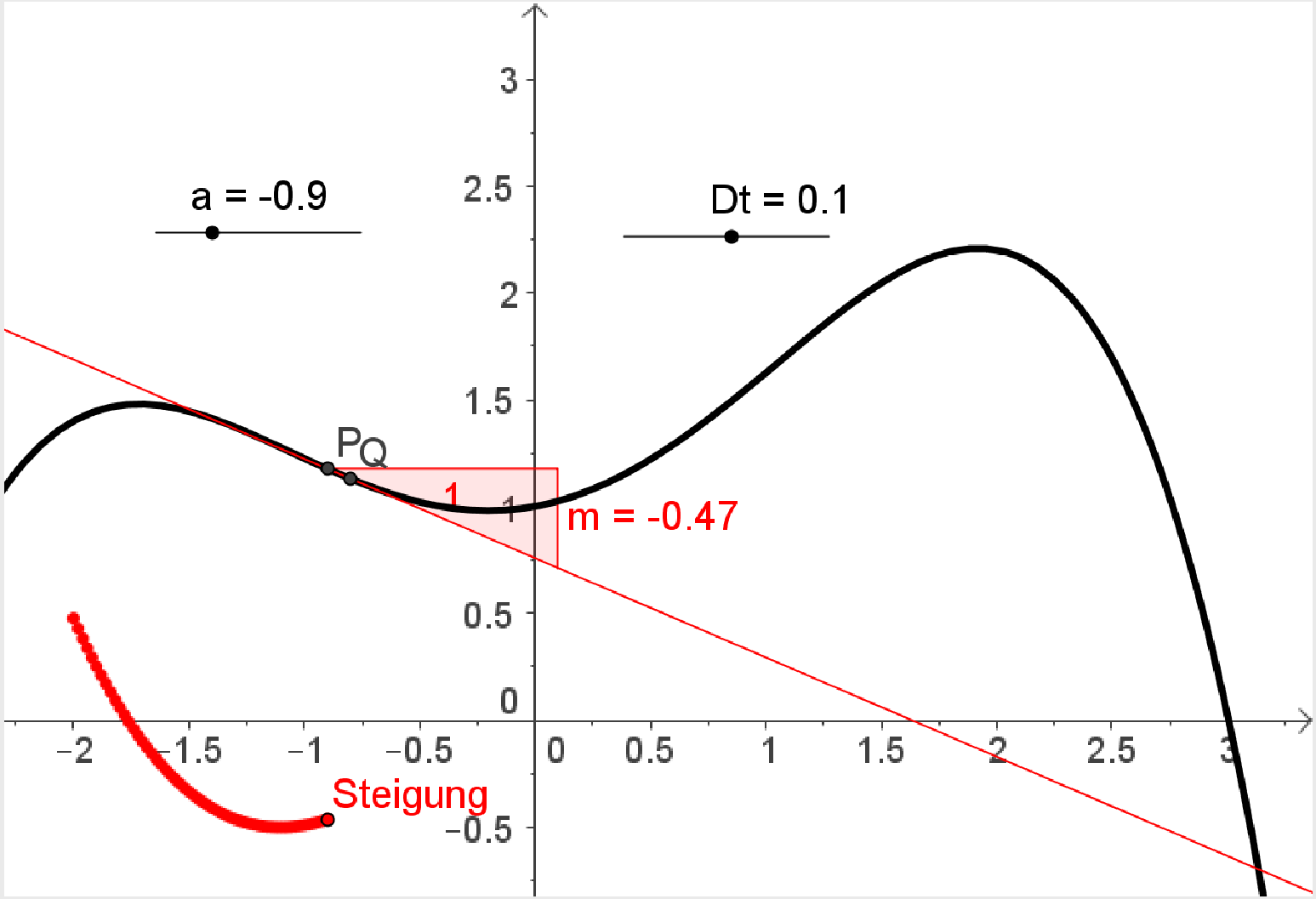

NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP
PRESS ▲ TO EDIT FUNCTION
X Y2
-.5 .81875
-.4 .84768
-.3 .87269
-.2 .89336
-.1 .90927
0 ERROR
.1 .92513
.2 .92424
.3 .91691
.4 .90272
.5 .88125
Y2=ERROR

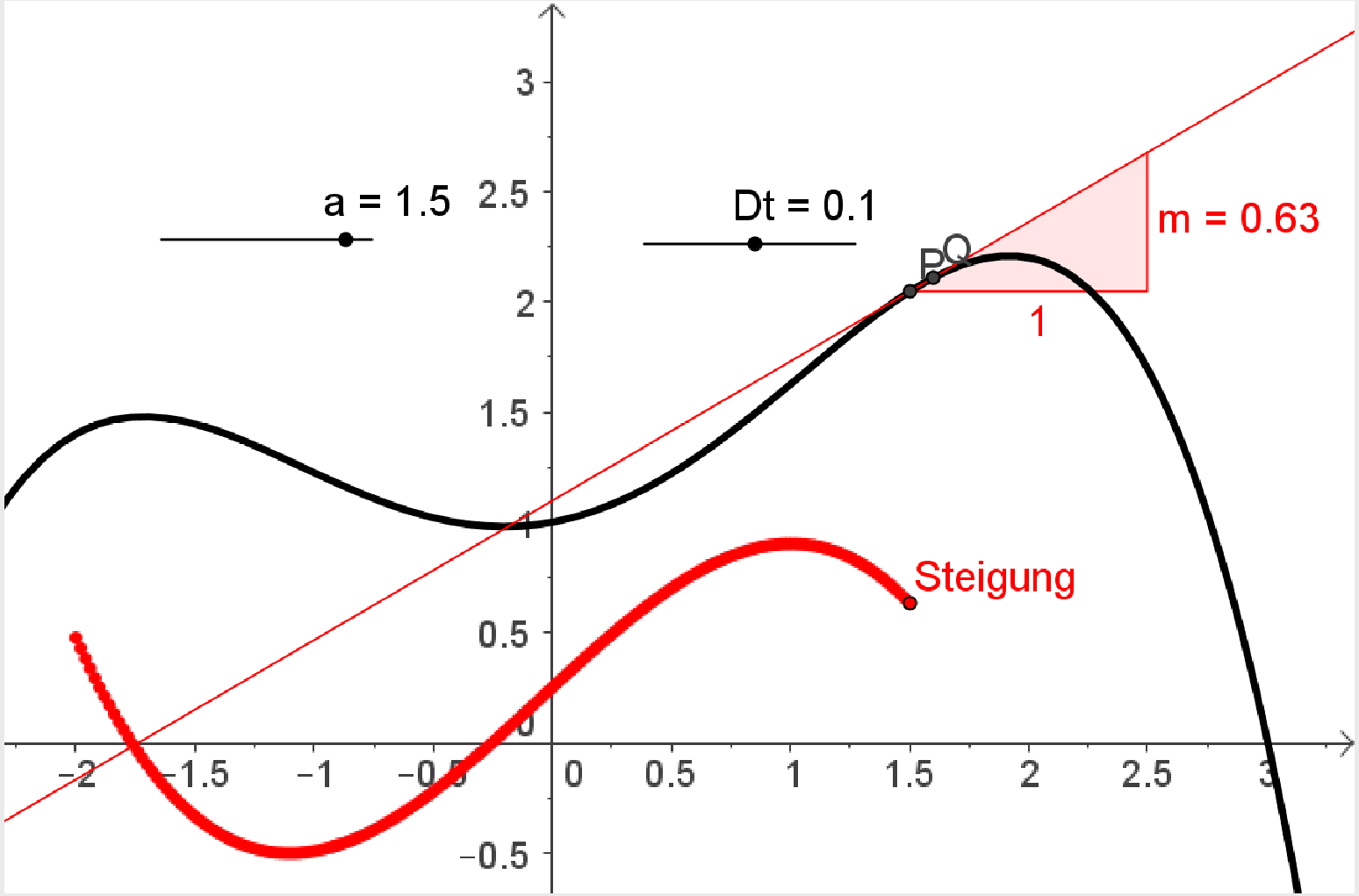

NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP
PRESS + FOR △Tbl
X Y2
-.005 .91959
-.004 .91968
-.003 .91976
-.002 .91984
-.001 .91992
0 ERROR
.001 .92008
.002 .92016
.003 .92024
.004 .92032
.005 .92039
X=-.005

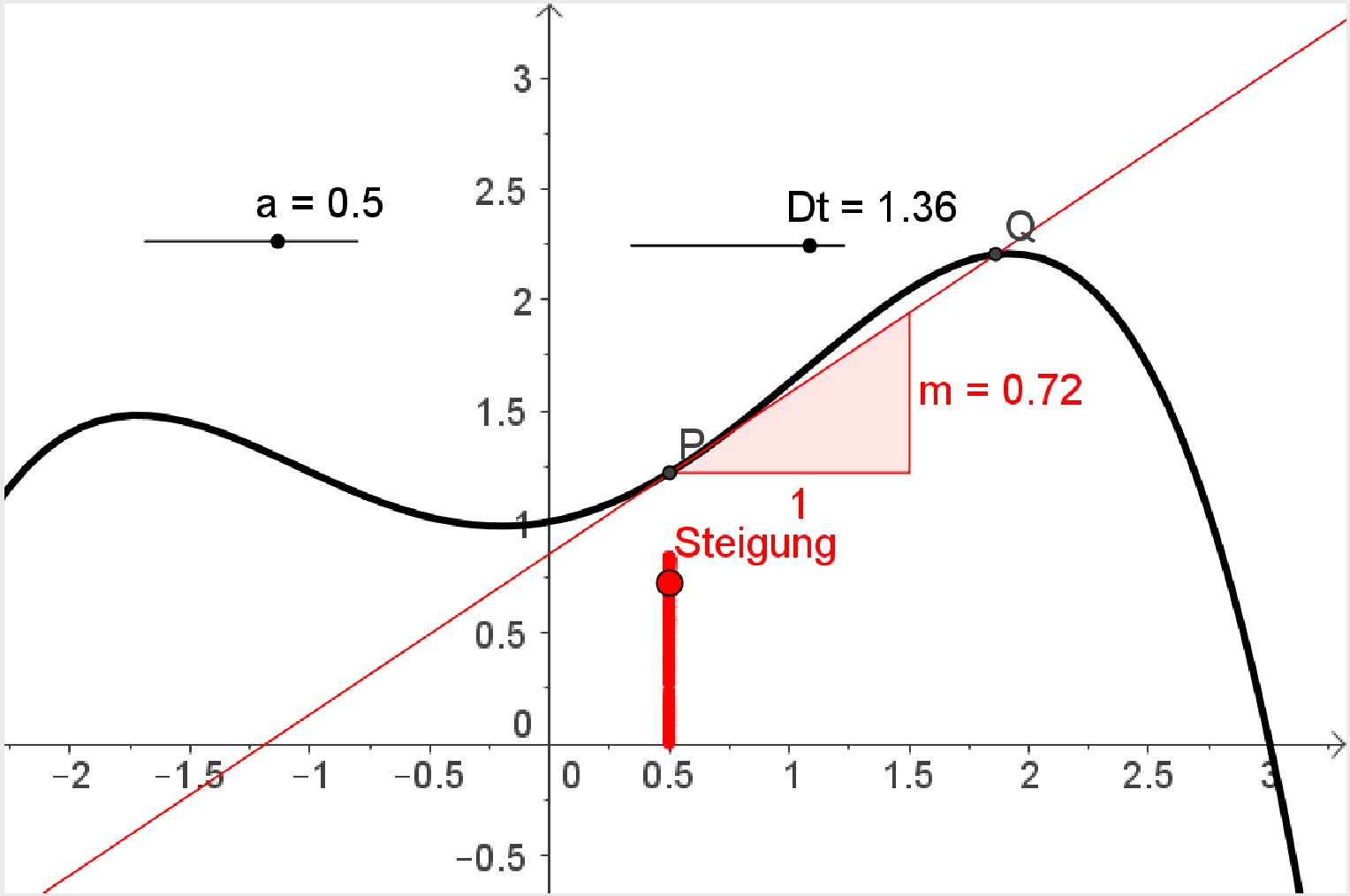
global


NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP
Plot1 Plot2 Plot3
Y1 = -0.07*X^4+0.5*X^2+0.2*X
Y2 = (Y1(X+0.01)-Y1(X))/0.01
Y3 =


NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP
Y2=(Y1(X+0.01)-Y1(X))/0.01
X=-1.060606
Y=-.5262441


a = -0.9
Dt = 0.1
P
Q
1
m = -0.47
Steigung
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3


a = 1.5
Dt = 0.1
m = 0.63
P
Q
1
Steigung
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3


a = 0.5
Dt = 1.36
Q
P
m = 0.72
1
Steigung
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

12 *Was die Ableitung alles über die Funktion verrät*

Der Graph der Ableitungsfunktion f′ der Funktion f ist gegeben.

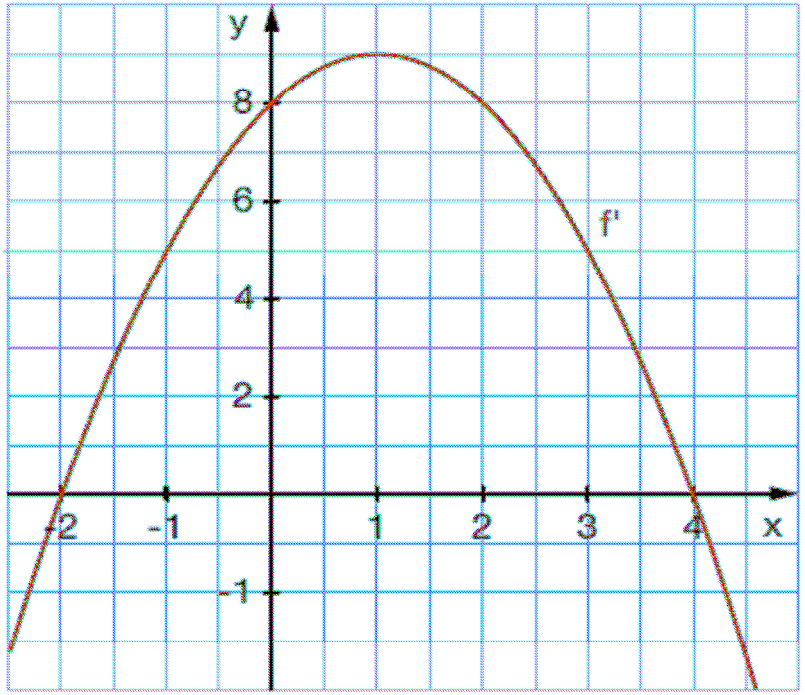
a) Begründen Sie mithilfe des Graphen von f′:

(1) f hat genau einen Tiefpunkt und einen Hochpunkt.

(2) Die Tangente an der Stelle $x = -1$ hat eine positive Steigung.

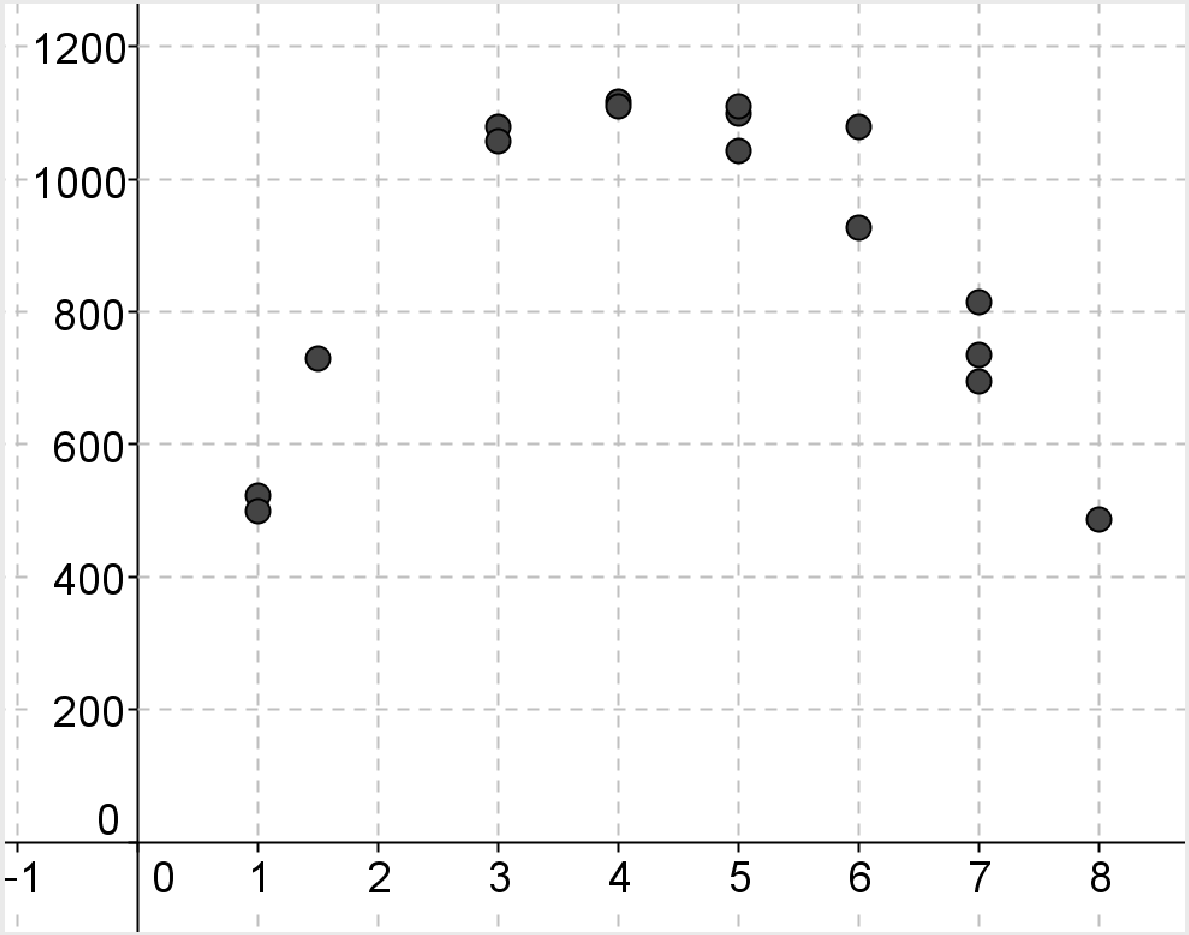
(3) f ist im Intervall $[-2; 4]$ streng monoton wachsend.

Skizzieren Sie den Verlauf des Graphen von f, wenn $f(0) = 0$ festgelegt wird.



Ein Blick ins Klassenzimmer
oder:
Was Schülerinnen und Schüler so machen...
oder:
Modellieren – ernst genommen.

Einschnitt x	Volumen			
	Gruppe 1	Gruppe 2	Gruppe 3	Gruppe 4
1	522,5		499,5	
1,5	729			
3			1080	1057
4	1118			1110,2
5	1100		1110	1043,25
6		1080		928
7	813,75		735	695
8		486		


1200
1000
800
600
400
200
0
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8

(A)
Idee: Es ist Parabel

$y = ax^2 + bx + c$

Es werden Punkte eingesetzt...

(B)
Wir nehmen eine Parabel,
„*quadreg*"...

(C)
Es muss da Graphen geben...
Probieren mit

$y = -x^4 + \ldots$

(D) $L: 29{,}7 - 8$
$B: 21 - 8\ldots$

(A)
Idee: Es ist Parabel

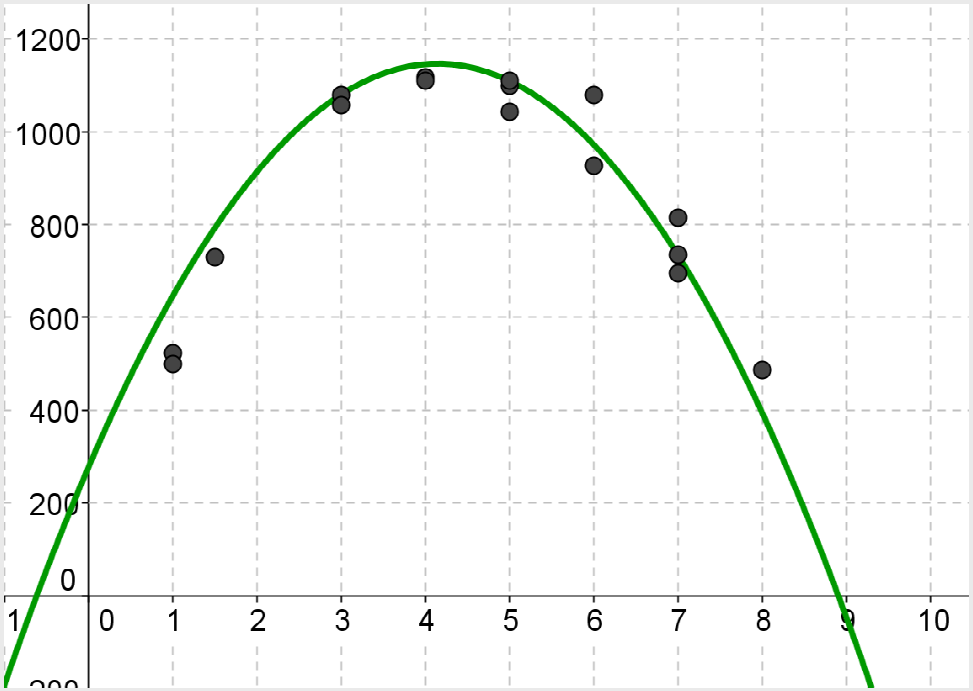
$y = ax^2 + bx + c$

Es werden Punkte eingesetzt...

$$\begin{array}{lrcl} I & 9a + 3b + c & = & 1080 \\ II & 25a + 5b + c & = & 1110 \\ III & 49a + 7b + c & = & 735 \end{array}$$

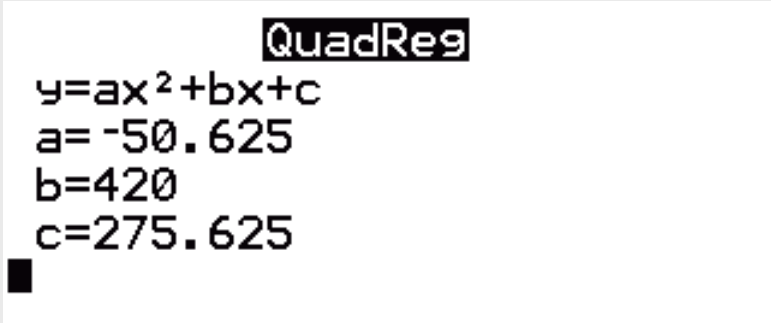
CAS

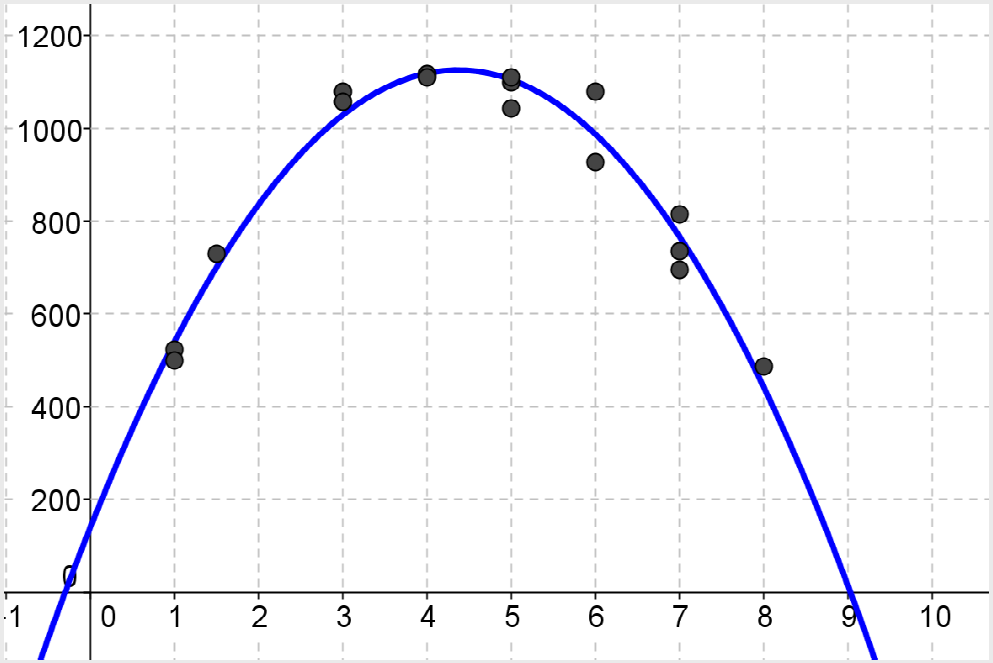
```
■ solve(9·a + 3·b + c = 1080 and 25·a + 5·b ▶
    a = -50.625 and b = 420. and c = 275.625
… and 49*a+7*b+c=735,{a,b,c})
MAIN          RAD EXACT          FUNC 1/30
```



(B)
Wir nehmen eine Parabel,
„quadreg"...

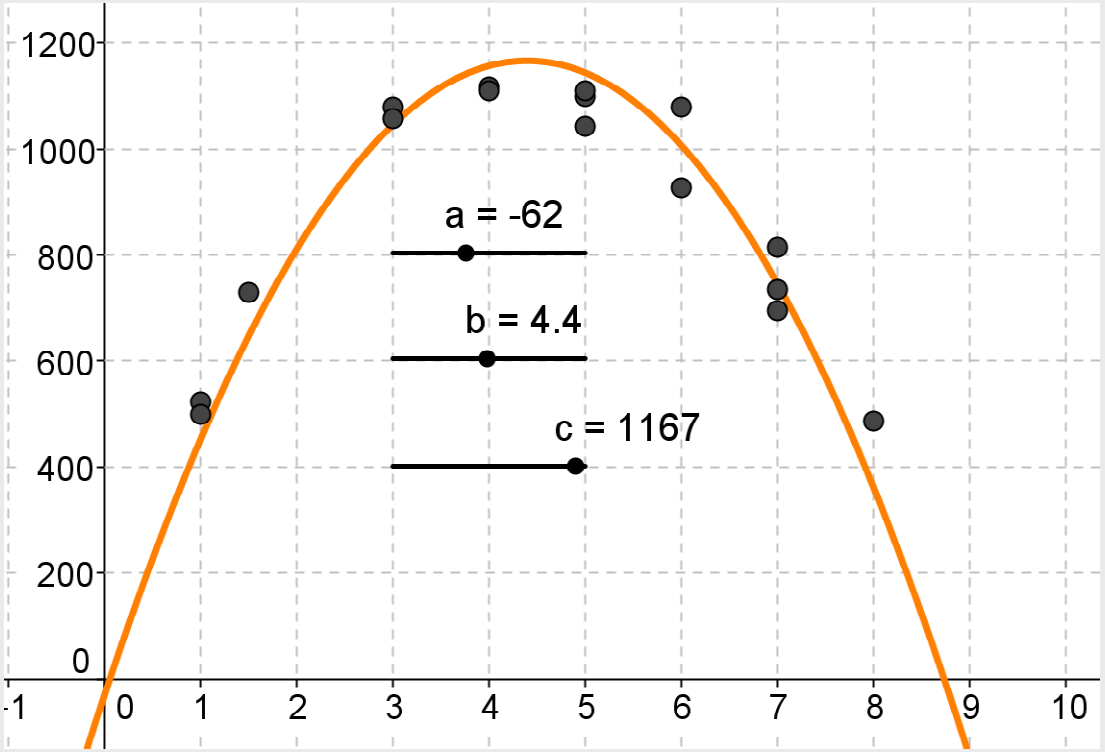
GTR



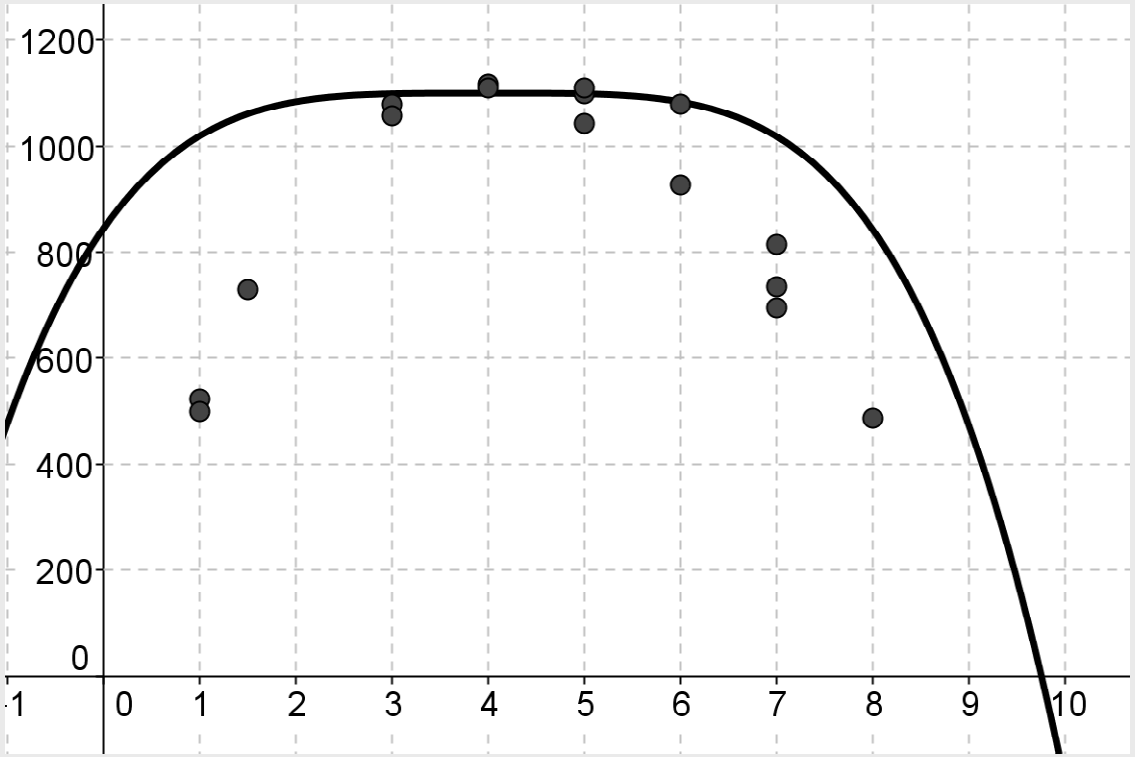


(B)
Wir nehmen eine Parabel,
„quadreg"...

Funktionenplotter $f(x) = a \cdot (x - b)^2 + c$

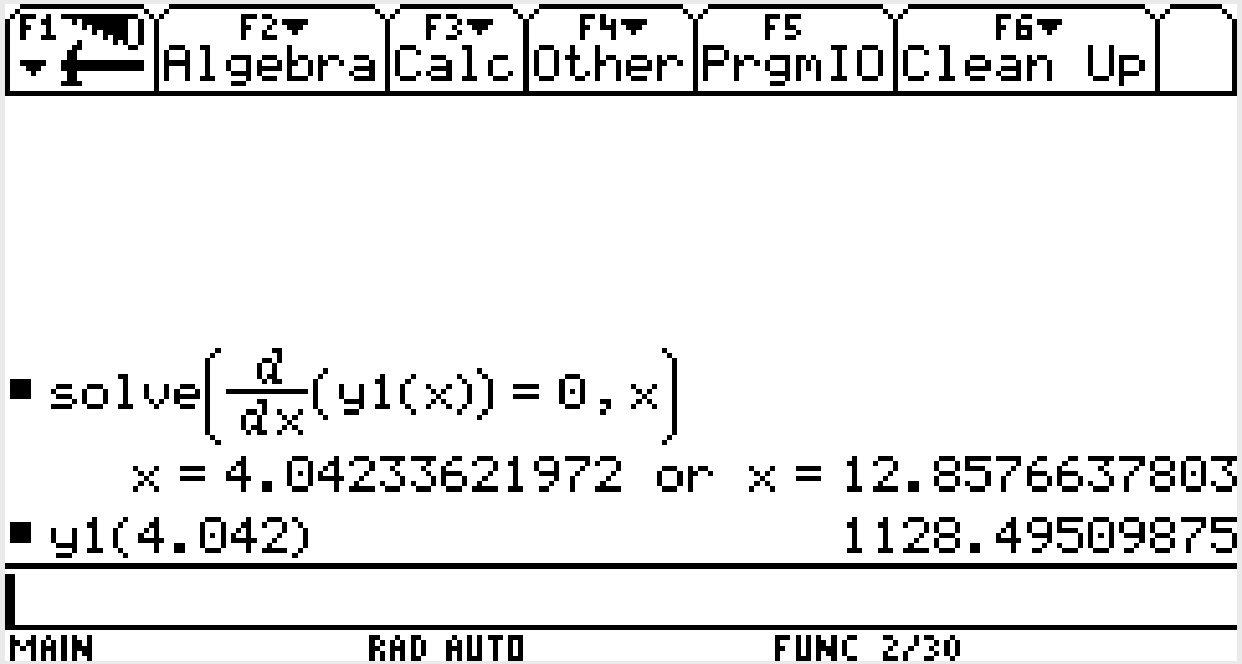


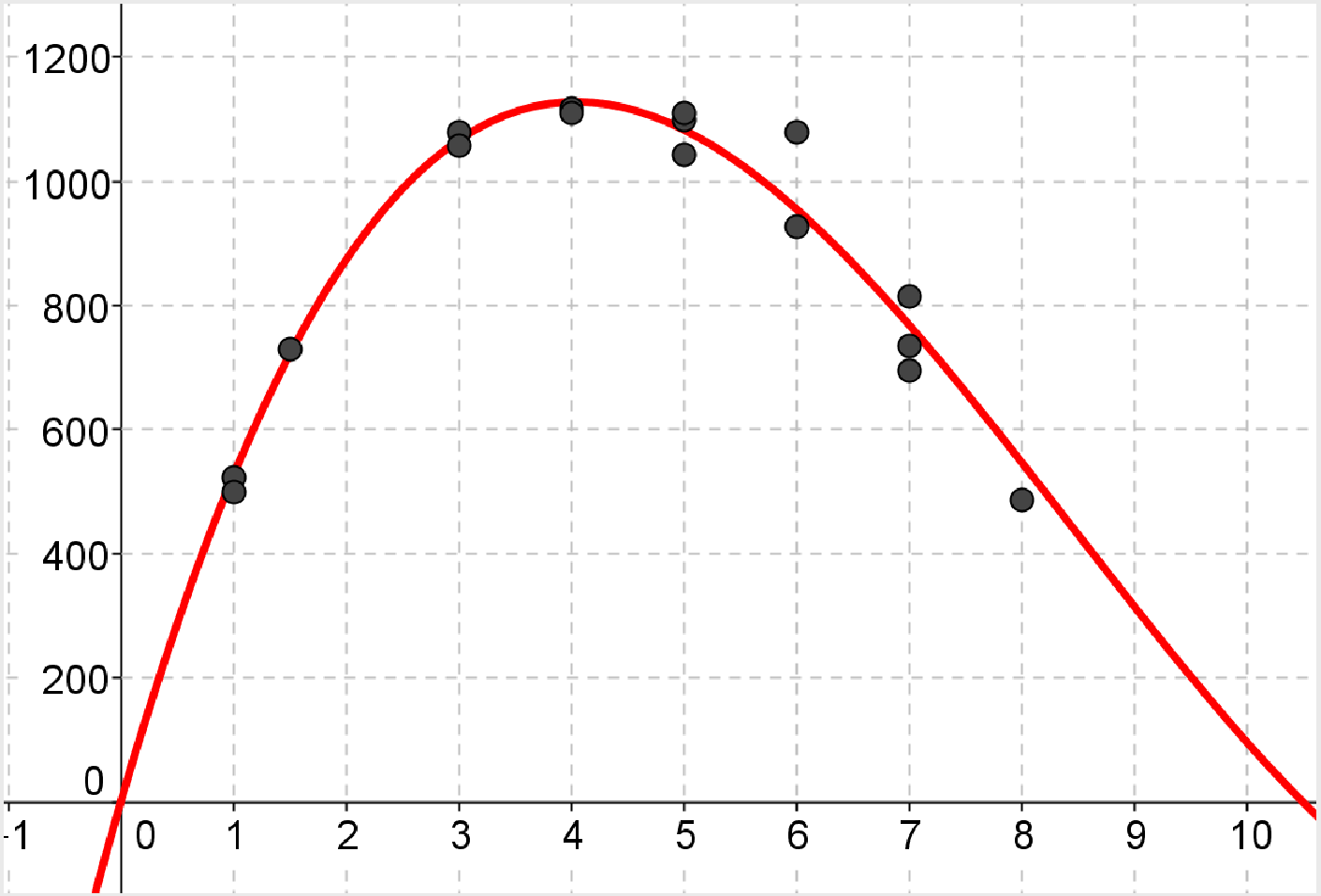
(C)
Es muss da Graphen geben...
Probieren mit
$y = -x^4 + \ldots$

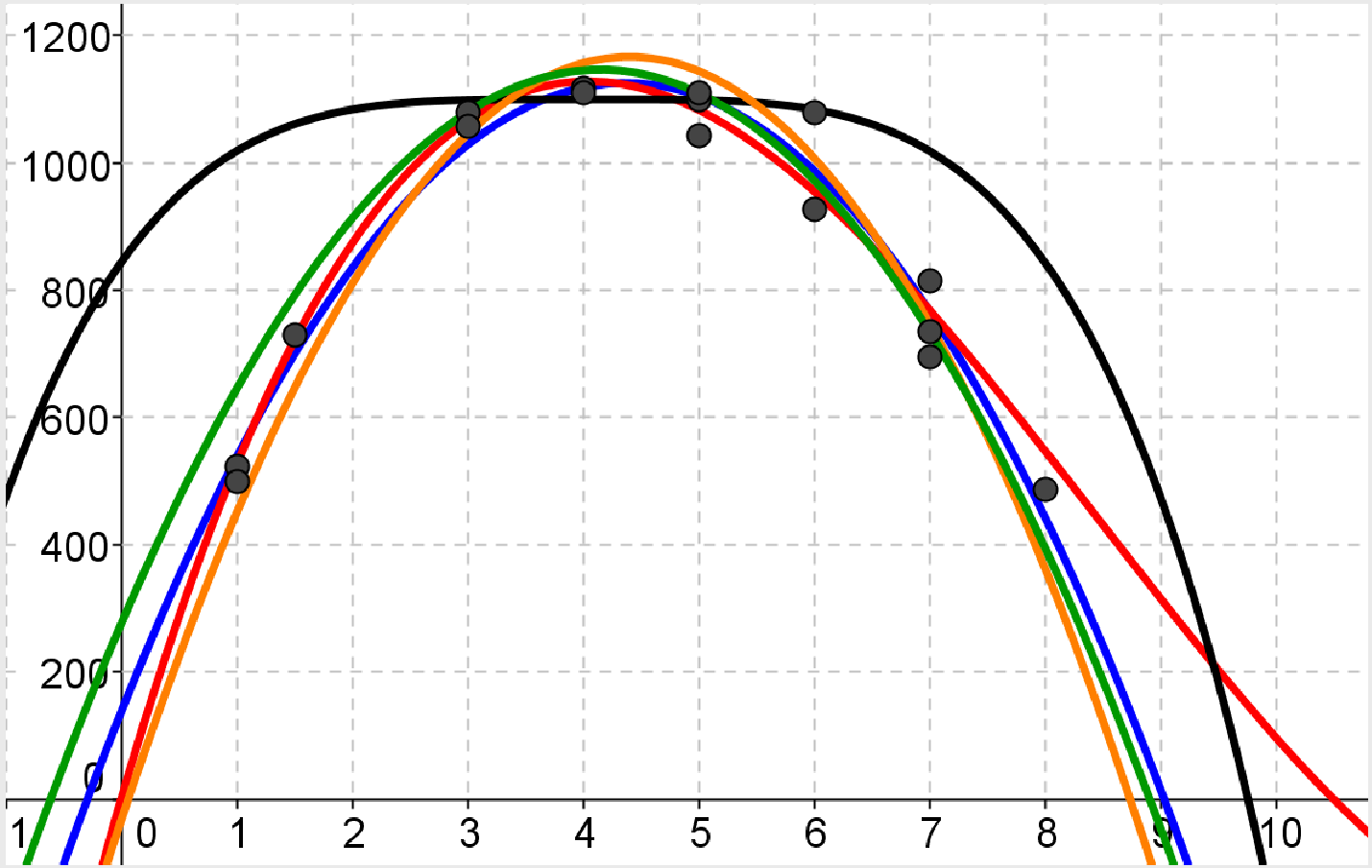


(D) $L: 29{,}7 - 8$
$B: 21 - 8 \ldots$

$$L: 29{,}7 - 2x$$
$$B: 21{,}0 - 2x \quad \Rightarrow \quad V(x) = x \cdot (29{,}7 - 2x) \cdot (21{,}0 - 2x)$$
$$H: x$$




1200
1000
800
600
400
200
0
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10


1200
1000
800
600
400
200
0
1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

(0|0) und (10,5|0) sind eigentlich klar, aber...

Die große Abweichung für x>7 ist im Zusammenhang mit Ziel (Optimum) unwesentlich.

Das Optimum liegt zwischen 4 und 4,4, das maximale Volumen schwankt zwischen 1100 und 1170, also um ca. 6%

(A)-(C) ist beschreibende Modellierung
(D) ist Modellierung des Wirkzusammenhangs

Partnerarbeit:
(1) Finde die Ableitung von
(a) $f(x) = x^2 + 4$ (b) $f(x) = 6x^3$ (c) $f(x) = x^2 + 4$

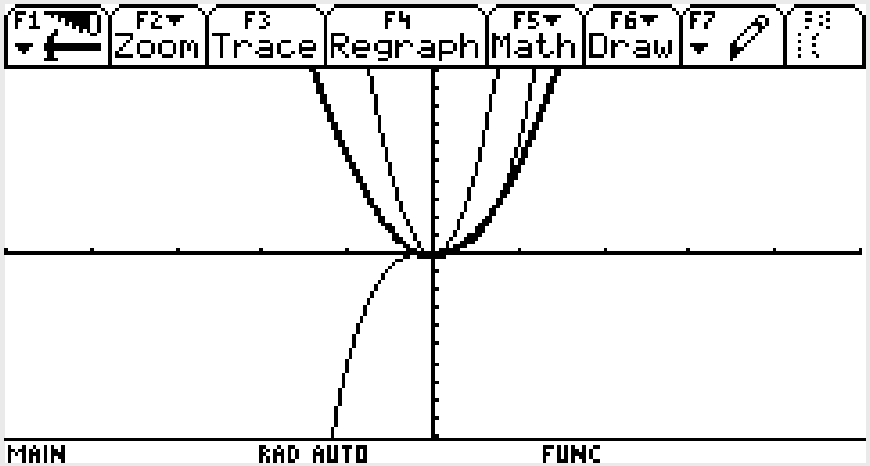
Zwei Schülerinnen:

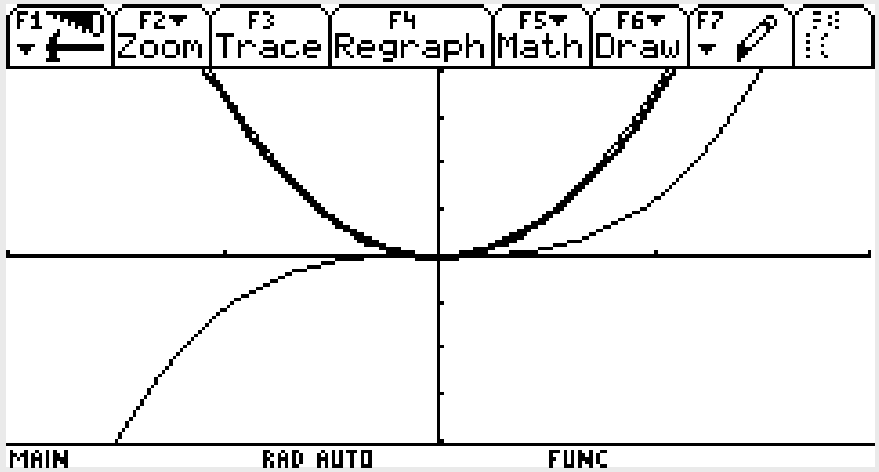
(a) $f(x) = x^2 + 4$:
Aus der Tabelle haben wir sofort $f'(x) = 2x$ gefunden.

(b) $f(x) = 6x^3$:
An der Tabelle erkennen wir nichts.
Schülerinnen schauen Grafik an:
Ist vielleicht eine Parabel. Probieren wir mal $f(x) = 5x^2$.
Oh, zu weit.

Die Schülerinnen probieren es zunächst mit $f(x) = 3x^2$, merken dann, dass das ‚*falsch herum*' ist und tasten sich vorsichtig mit $f(x) = 6x^2, f(x) = 7x^2 \ldots$ weiter. Zwischenzeitlich wird auch die Skalierung so geändert, dass mehr zu sehen ist. Sie landen schließlich bei $f(x) = 17x^2$.

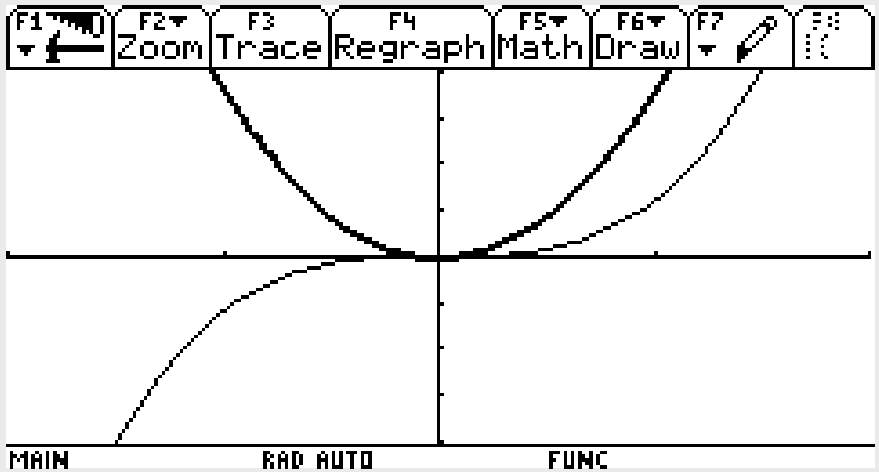
Das passt super. Aber noch nicht richtig. Ist das jetzt, weil msek nur ‚ungefähr' ist oder weil unsere Ableitung nur ungefähr trifft?





Es wird $f(x) = 18x^2$ gezeichnet. *Das ist es!!!*

Riesige Freude, aber: *Muss man da immer so lange probieren? Geht das nicht anders?*



Lehrer: *Dann probiert doch mal (a) mit h-Methode.*

Die beiden Schülerinnen beginnen:

$$\frac{(x+h)^2+4-x^2+4}{h} \ldots$$ *Ist nicht* $(x+h)^2 = x^2 + h^2$? ...

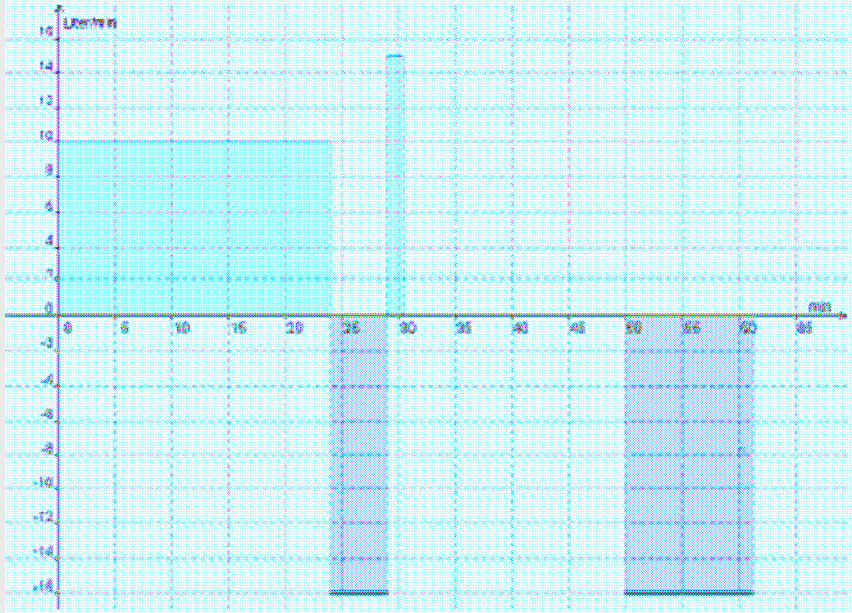
Es kommt zum Stillstand.

Das ist schwer, obwohl wir sowas schon einmal gemacht haben.

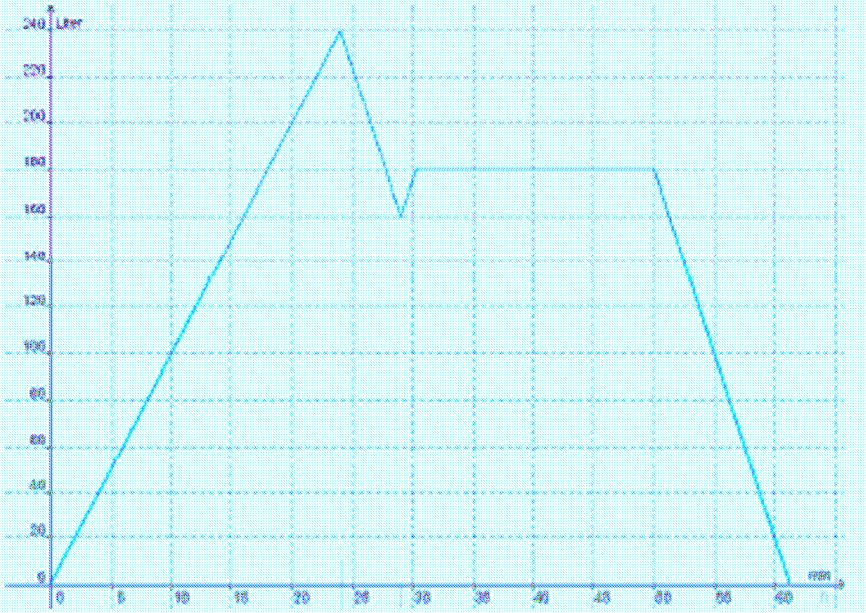
Lehrer: *Dann ist Probieren vielleicht doch ganz gut?*

Ja, man fühlt sich dann richtig wie ein Forscher!

Szene 1



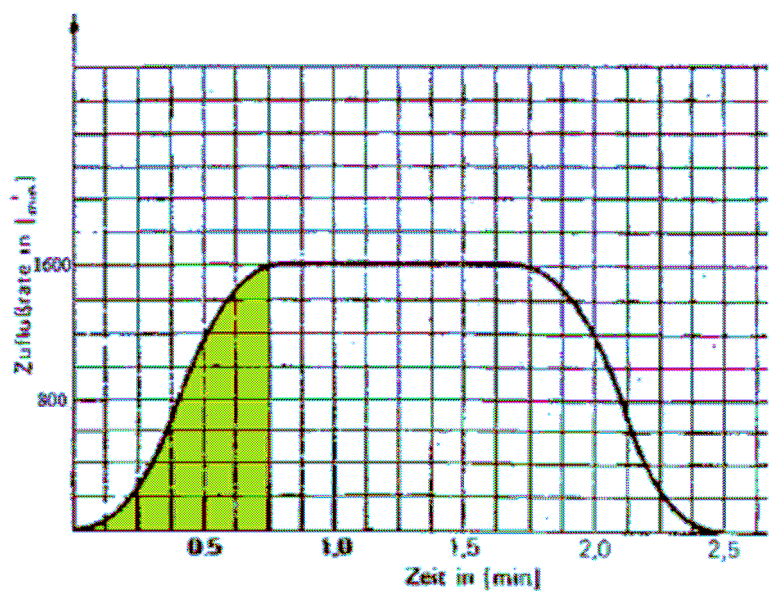
Graph 1:Zu- und Abflusskurve

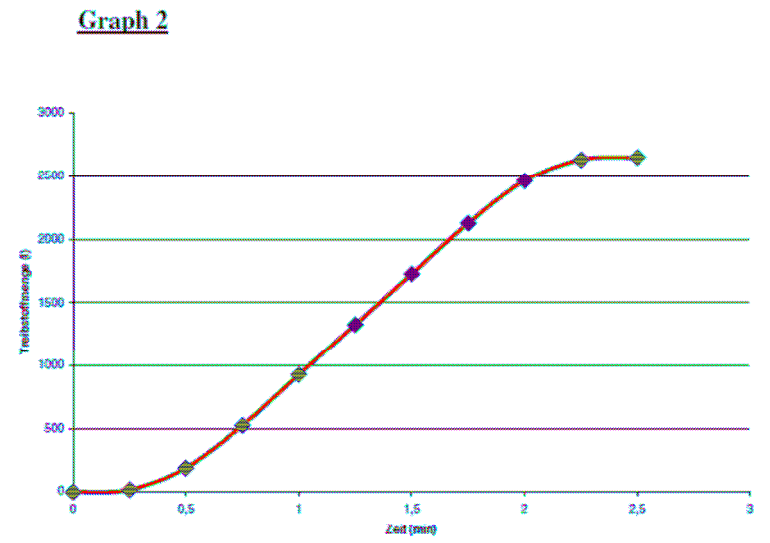


Graph 2:Füllkurve

In Graph 2 kann man die Zufluss- bzw. Abflussgeschwindigkeit ablesen, indem man ein Steigungsdreieck einzeichnet. Beispielsweise kann man bei 20 min und 200l die Zuflussgeschwindigkeit von 10 l/min ablesen. D.H. in Graph 1 kann man die Steigung aus Graph 2 ablesen . Also ist Graph 1 die Ableitung von Graph 2.

Szene 2





e) <u>Gemeinsamkeiten, Unterschiede, Zusammenhänge</u>

→ beide Graphen haben einen konstanten Abschnitt zwischen t = 0,75 und t = 1,75 min

(→ Graph 1 besitzt 4 Wendepunkte, Graph 2 nur 2 Wendepunkte) *

→ Graph 1 ist die **Ableitung** von Graph 2

→ Graph 2 beschreibt die Fläche unter Graph 1

Szene 3

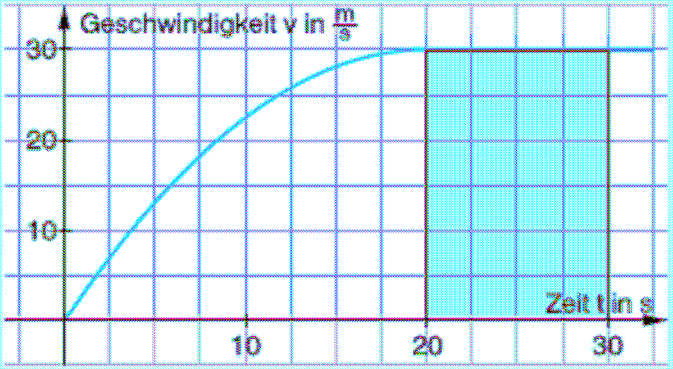
2 *Fahren mit einem Elektroauto*

Sie sind von einem Pkw-Hersteller beauftragt worden, die Fahrt eines neuen Pkw mit Elektroantrieb zu analysieren. Sie verfügen über das mit Telemetrie aufgezeichnete Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm des beschleunigten Fahrzeugs.

a) Beschreiben Sie den Verlauf der Fahrt.

b) Welche Strecke legt das Fahrzeug von der 20. bis zur 30. Sekunde zurück? Interpretieren Sie Ihr Ergebnis geometrisch mithilfe des gefärbten Rechtecks.

c) Sie wollen herausfinden, welche Strecke das Fahrzeug in den ersten 20 Sekunden zurücklegt.



Auf welches Problem stoßen Sie?

Schätzen Sie den in den ersten 20 Sekunden zurückgelegten Weg.

Vergleichen Sie die Ergebnisse und die Verfahren in Ihrem Kurs.

d) In einem Physikbuch finden Sie:

> Der zurückgelegte Weg in dem Zeitintervall $[t_1; t_2]$ ist die Fläche unter der Kurve im Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm.

- ausgehend von den Punkten
- 1. (0/0)
- 2. (5/12.5)
- 3. (10/22.5)
- 4. (15/27.5)
- 5. (20/30)

-Data
-Funktion 2. Grades:
-Quadratische Regression: **$f'^{1}(x) = -0.071429\,x^2 + 2.928571\,x - 0.071429$**

<u>Bestandsfunktion Abschnitt 1:</u>

1. Möglichkeit
-ausgehend von den Punkten1,2,3,4,5 den Bestand durch s= v*t ausrechnen
-es folgt:

- 1. 0*0 = 0 -> (0/0)
- 2. 5*12.5= 62.5 -> (5/62.5)
- 3. 10*22.5= 225 -> (10/225)
- 4. 15*27.5= 412.5 -> (15/412.5)
- 5. 20*30= 600 -> (20/600)

-Data
-Funktion 3.Grades
-Kubische Regression, da die Ableitungsfunktion eine Funktion 2. Grades ist:
$f^{1}(x) = -0.066667\,x^3 + 2.785714\,x^2 + 0.952381\,x - 0.714286$

Laura

Die Funktionsgleichungen passen graphisch und rechenrisch zum Graphen. Allerdings müsste jetzt eine Überprüfung von Ableitungs- und Bestandsfunktion folgen.

Die Ableitung der gefundenen Bestandsfunktion würde $f'^{1}(x) = -0.200001\,x^2 + 5.57143\,x + 0.952381$ lauten. Diese passt aber zur errechneten Funktion.

2. Möglichkeit
Um zwei Funktion zu finden, die beide zusammen gehören und übereinstimmen, müsste man die gefundene Ableitungsfunktion von Abschnitt 1 aufleiten.

Dazu gilt folgende Regel: $f'(x) = x \qquad f(x) = \frac{x}{n+1} + C$ (Konstante)

Bezogen auf die Ableitungsfunktion des Abschnitts 1 würde das dann heißen:

$f'^{1}(x) = -0.071429\,x^2 + 2.928571\,x - 0.071429$

$$\mathbf{f^{1}(x) = -0.071429 * \frac{x^3}{3} + 2.928571\,\frac{x^2}{2} - 0.071429\,x + C}$$

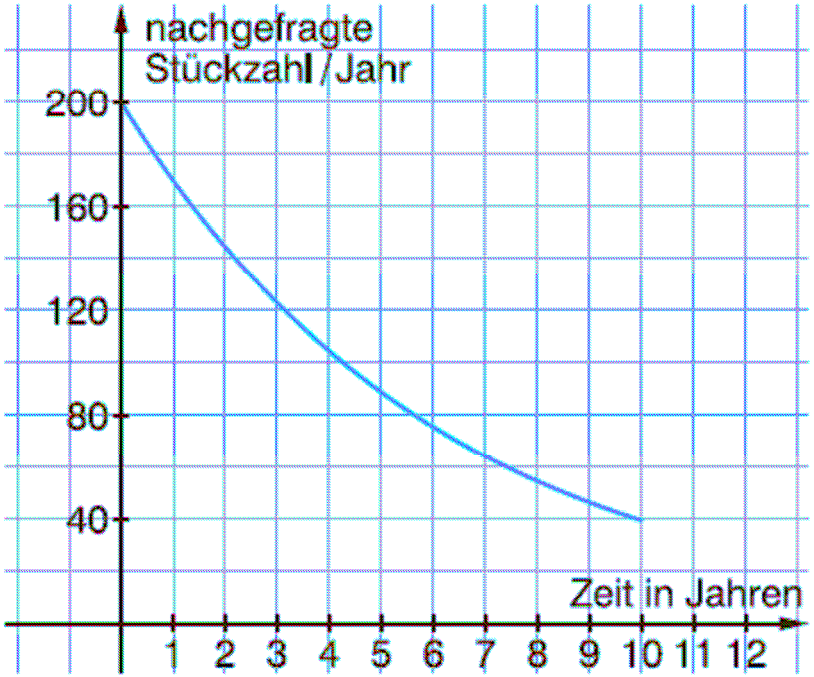
Die Konstante (C) kann ich hier nicht eindeutig bestimmen.
Löst man die Bestandsfunktion auf, indem man beispielweise x = 20 und y = 600, so erhält man C =206,192. Die neue Bestandsfunktion geht nun durch den Punkt 5. (20/600) aber nicht durch die Punkte 1,2,3,4. Denn C zeigt die Verschiebung auf der y- Achse an.
Ein C für alle Punkte lässt sich nicht finden, somit könnte man den Abschnitt 1 in noch weitere Abschnitte einteilen.
Die Funktion $f^{1}(x) = -0.071429 * \frac{x^3}{3} + 2.928571\,\frac{x^2}{2} - 0.071429\,x + C$ deckt zwar nicht alle
Punkte, aber hat die richtige Richtung und ist eine grobe Bestandsfunktion zu $f'^{1}(x) = -0.071429\,x^2 + 2.928571\,x - 0.071429$.

15 *„Vorausschauende" Ersatzteilproduktion*

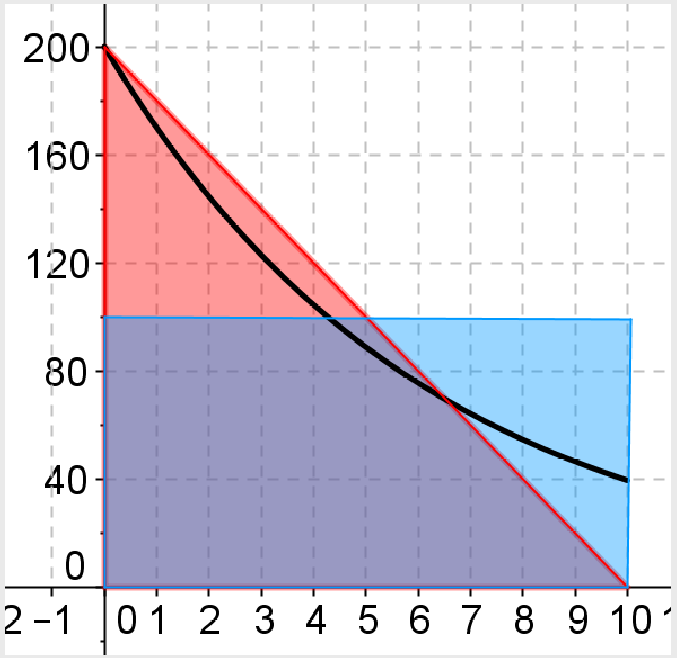
Ein Hersteller von Fernsehgeräten will die Produktion einer Modellreihe einstellen. Damit er die im Lager vorhandenen Geräte dieses Modells noch verkaufen kann und um Kunden, die bereits die entsprechenden Fernseher besitzen, nicht zu verärgern, sollen in diesem Jahr alle Ersatzteile produziert werden, die in den nächsten 10 Jahren voraussichtlich benötigt werden.

Bekannt ist, dass sich die Nachfragerate nach Netzteilen für die Geräte (in Stückzahl pro Jahr) durch die Funktion $f'(t) = 200 \cdot 0{,}85^t$ gut modellieren lässt.

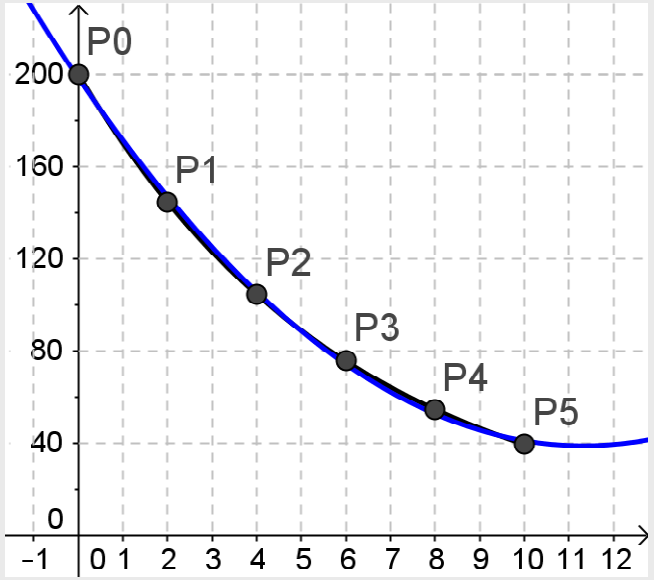
Entwickeln Sie ein Verfahren, mit dem Sie abschätzen können, wie viele dieser Netzteile produziert und eingelagert werden müssen, damit die Nachfrage für die nächsten 10 Jahre befriedigt werden kann.



-Fläche unter Kurve
mit elementaren Flächen
annähern



- Punkte von f' auslesen
- quadratische Regression
- Aufleitung

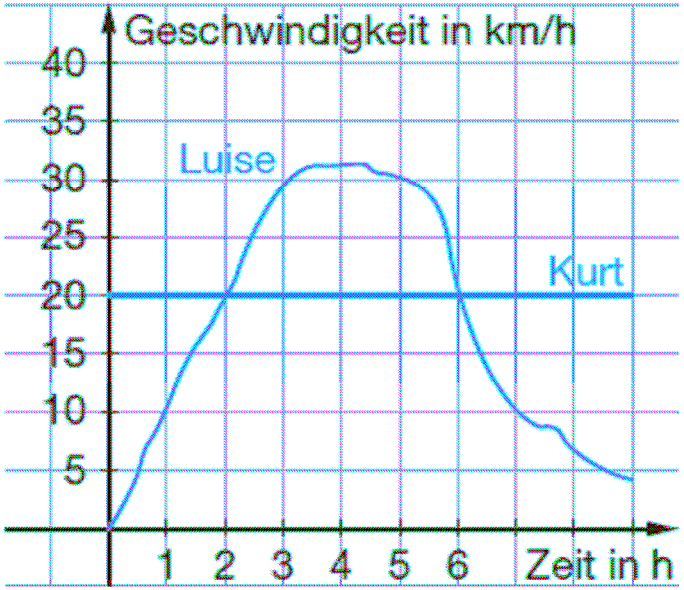


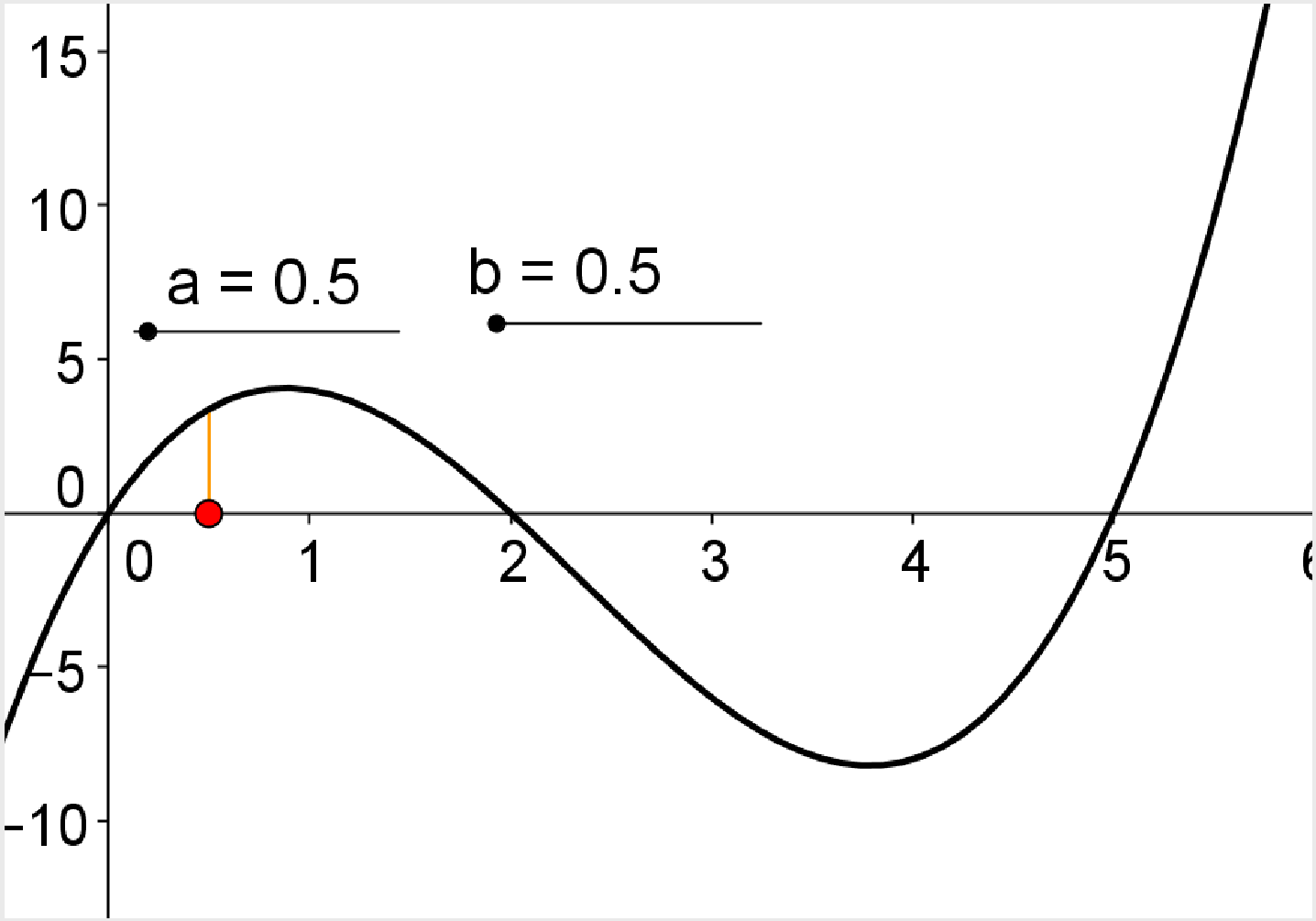
10 *Lastkähne*

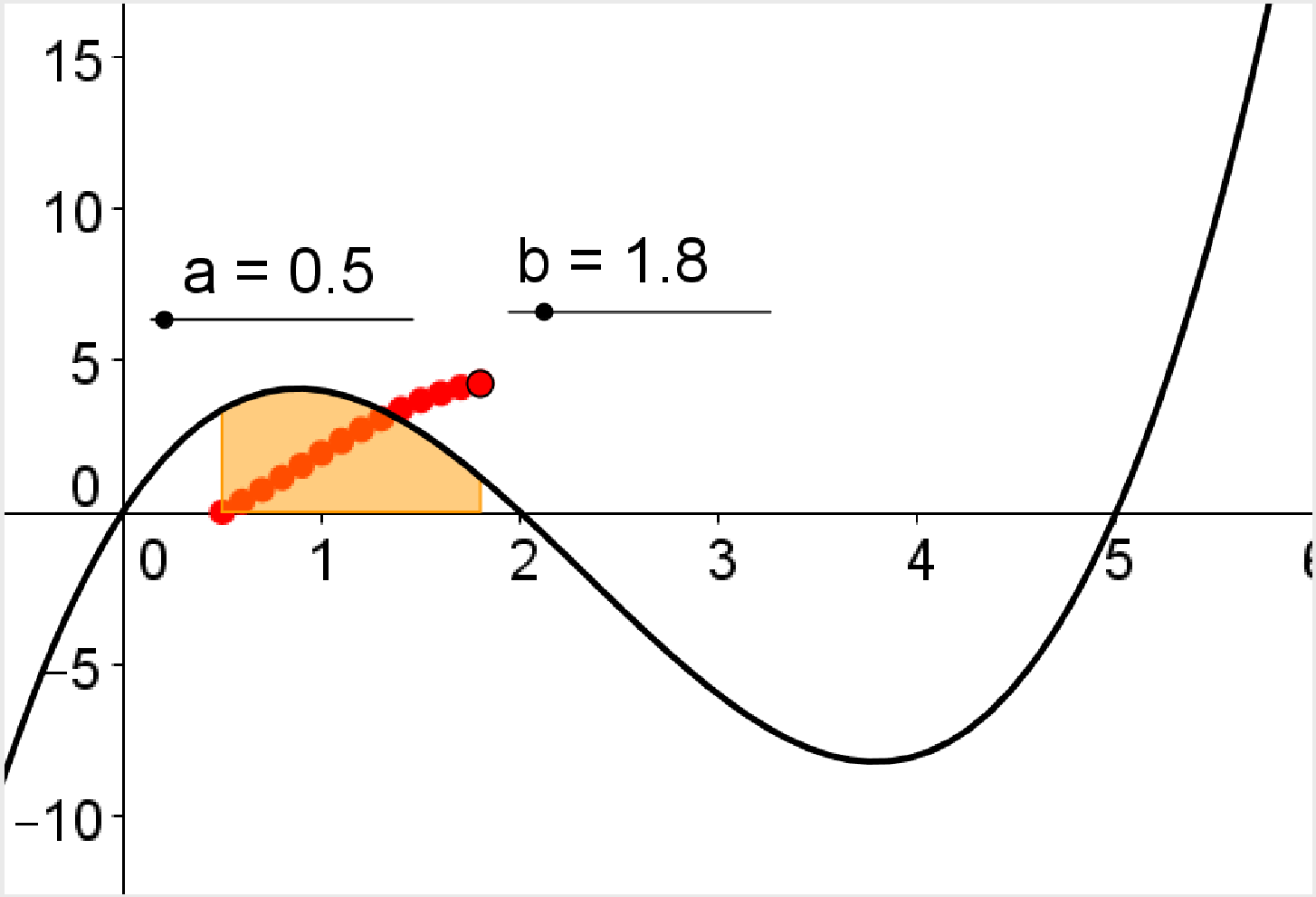
Die Abbildung zeigt das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm der Lastkähne Luise und Kurt, die auf dem Küstenkanal in die gleiche Richtung fahren.

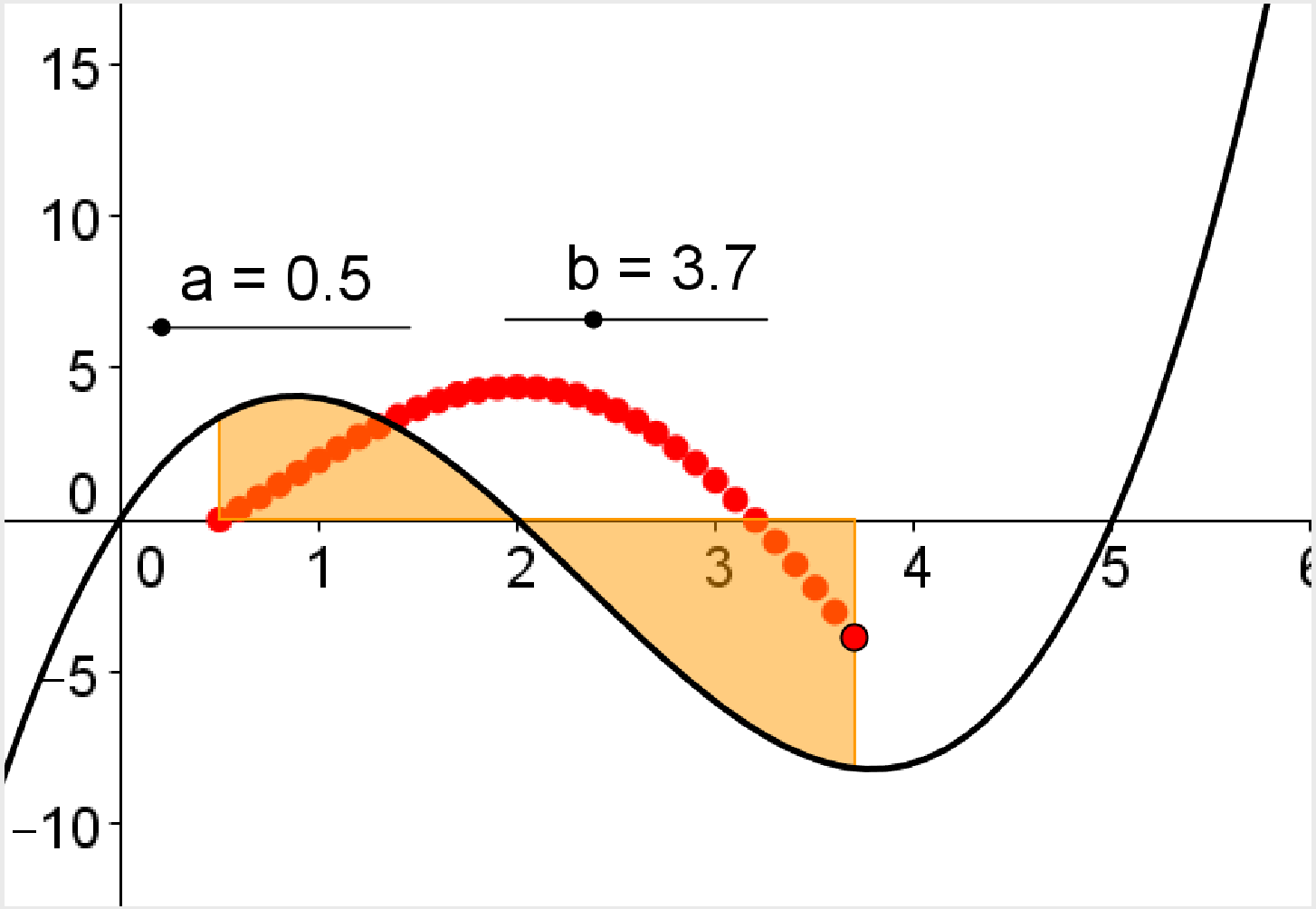
a) Beschreiben Sie die Fahrten von Luise und Kurt in dem gegebenen Zeitintervall.

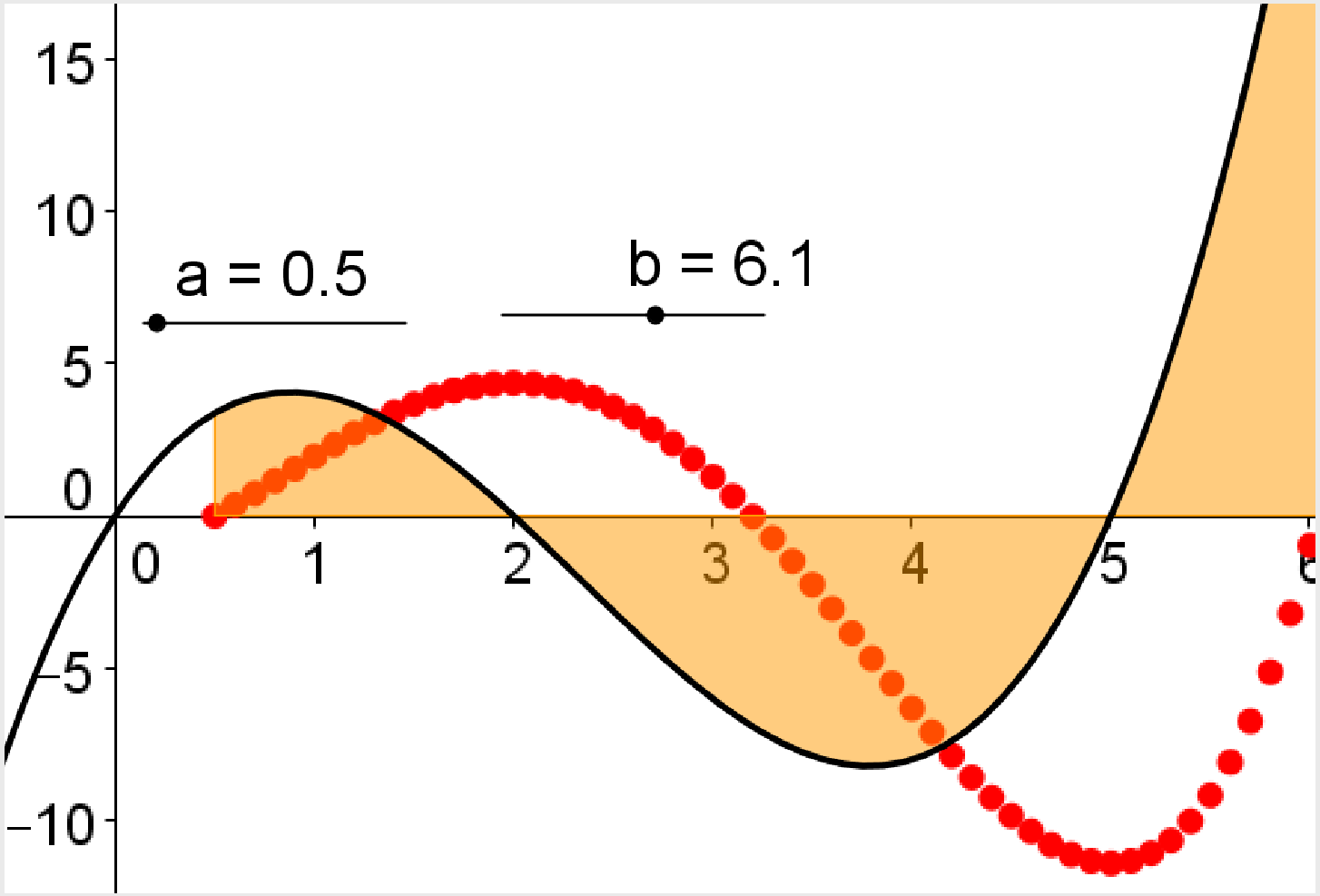
b) Wann ist Luise vorn, wann Kurt?
Wie sieht das nach neun Stunden aus?
Wie weit sind beide dann gefahren?




15
10
5
0
-5
-10
0
1
2
3
4
5
a = 0.5
b = 0.5


15
10
5
0
−5
−10
0
1
2
3
4
5
a = 0.5
b = 1.8


15
10
5
0
−5
−10
a = 0.5
b = 3.7
0
1
2
3
4
5

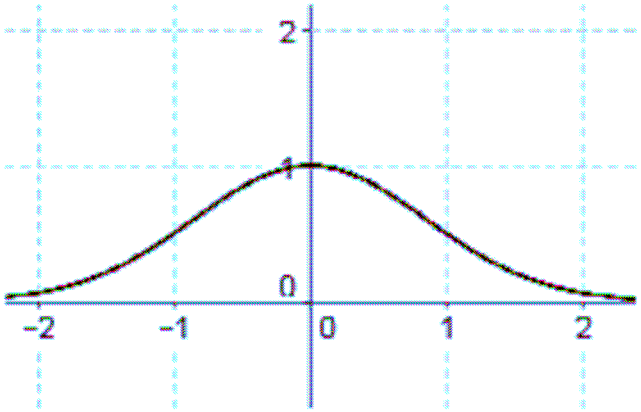

15
10
5
0
−5
−10
0
1
2
3
4
5
a = 0.5
b = 6.1

Was für die Grundvorstellung „Fläche“ die Trapezformel ist, ist für die Grundvorstellung „Rekonstruktion aus Änderung“ das Richtungsfeld mit dem Polygonzugverfahren.

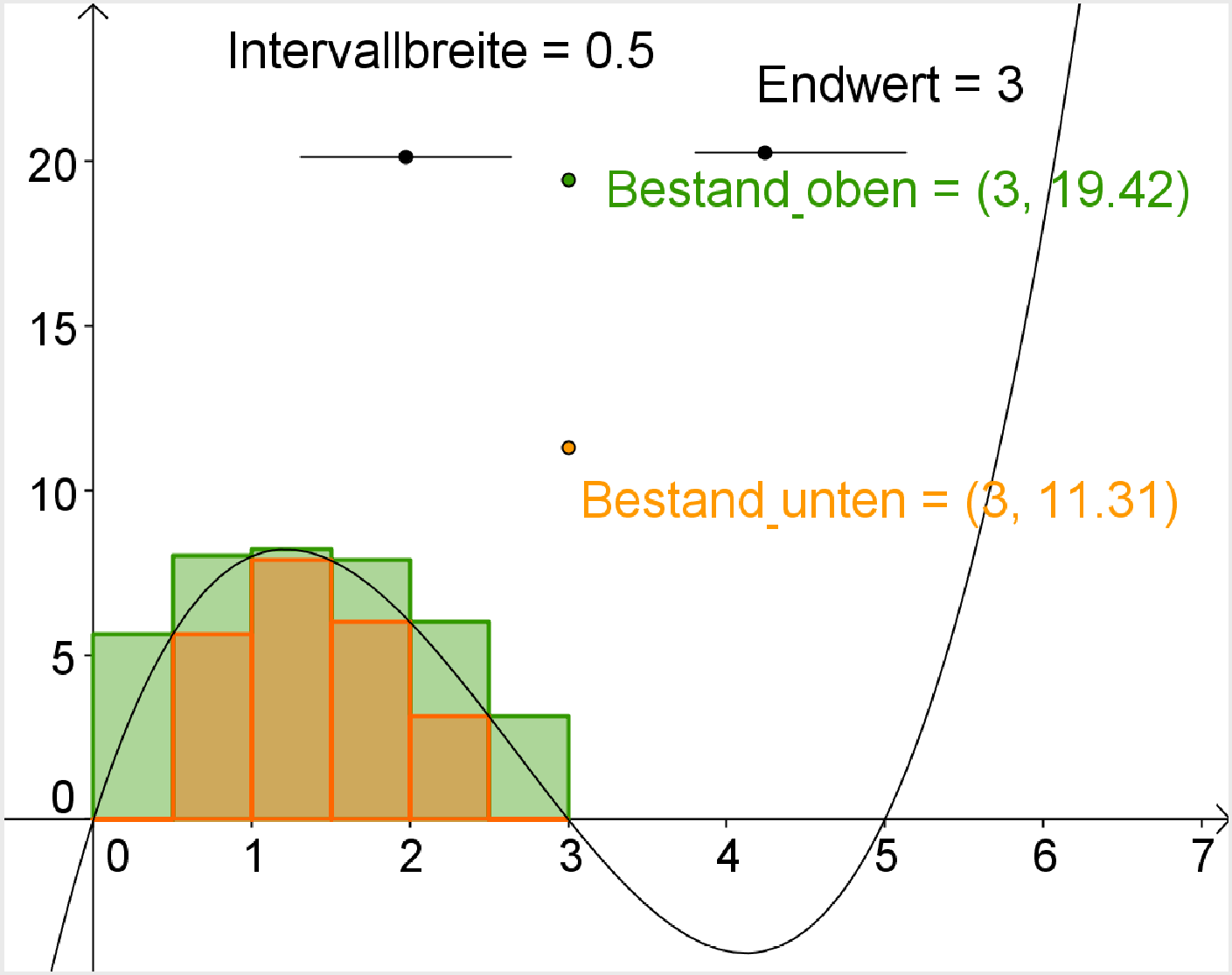
Integrieren heißt „Löse eine DGL.“

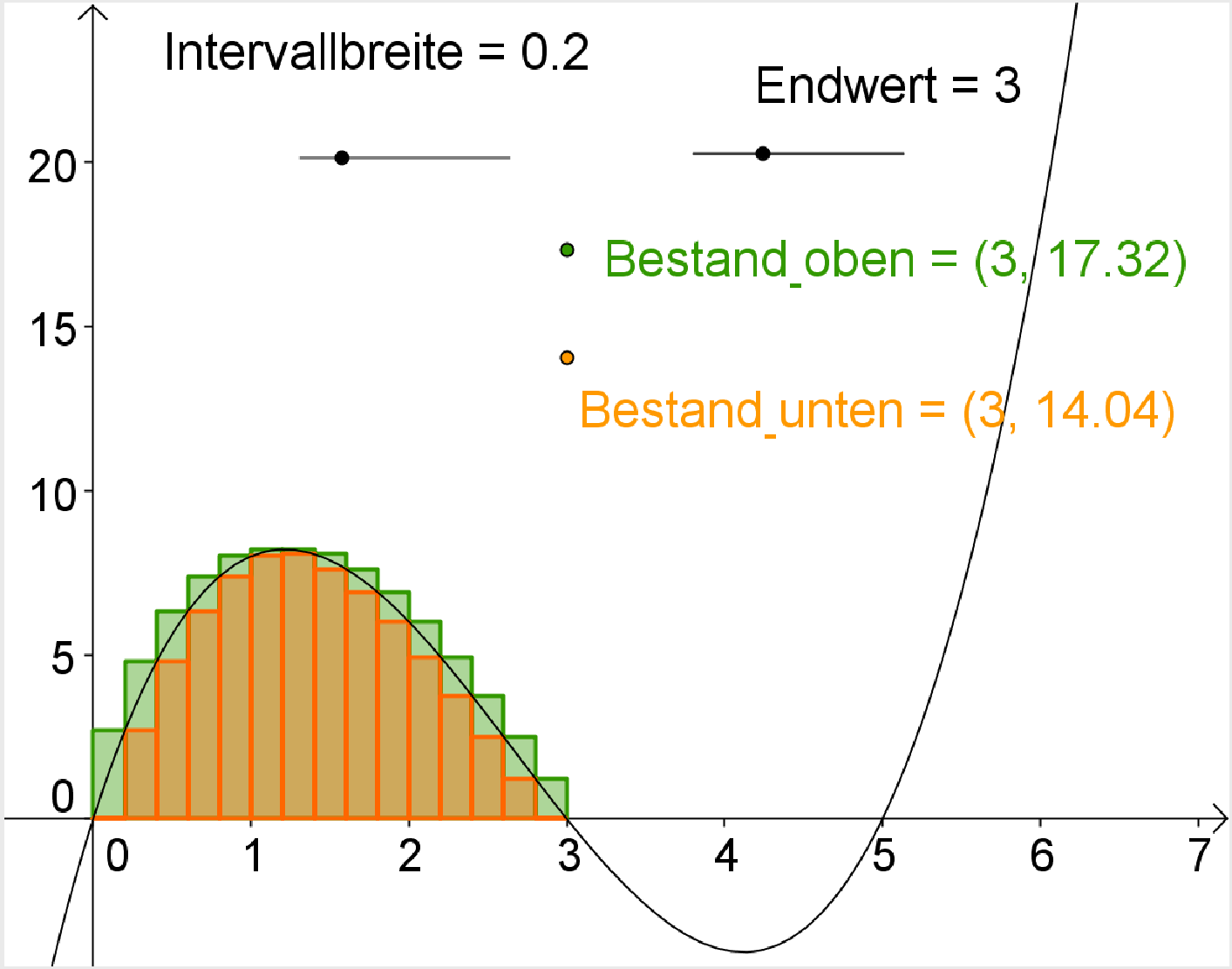
Wo bleibt das Riemann-Integral?

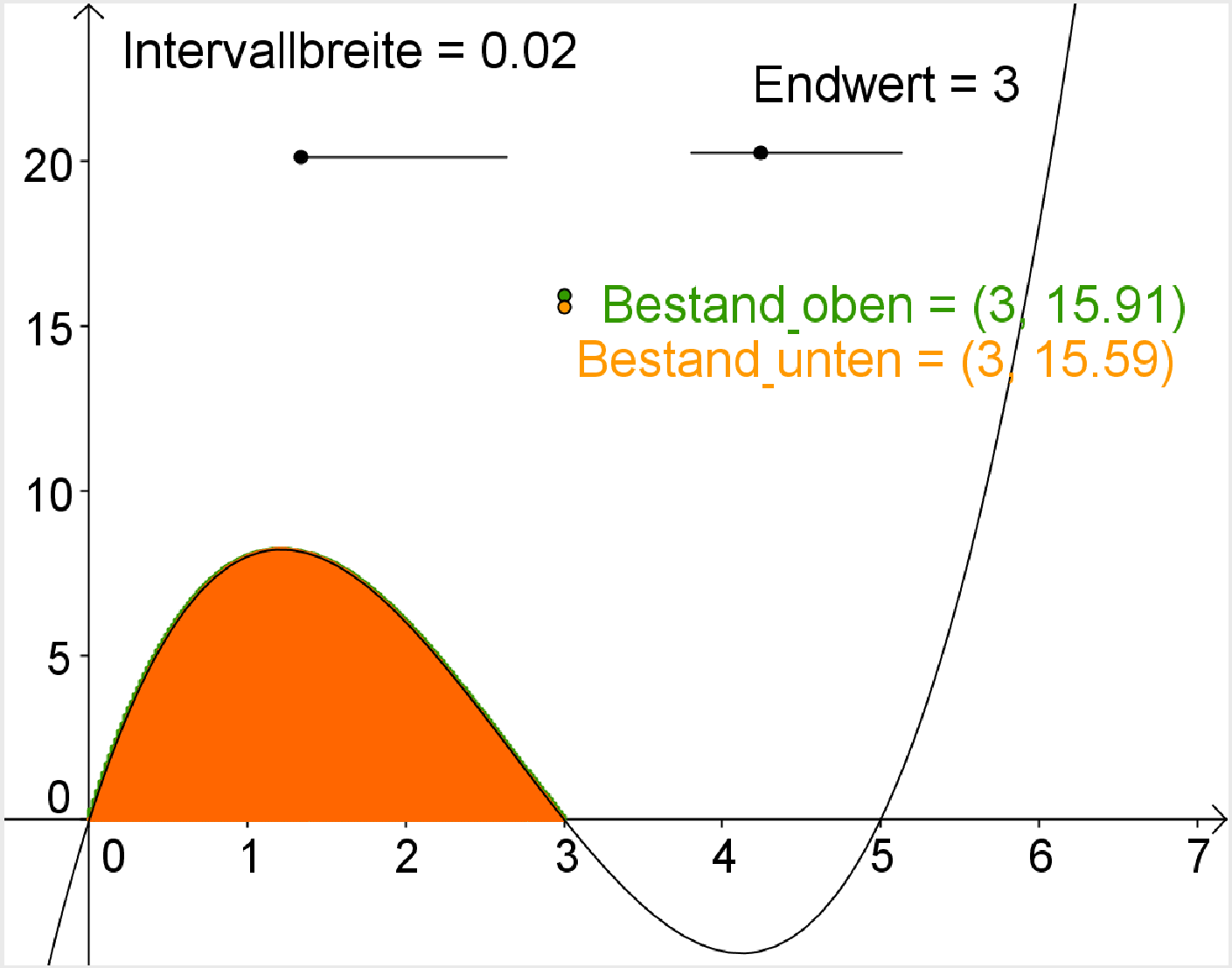
Integrieren ‚klebt‘ an Stammfunktionen, aber: Zu $f(x) = 2^{-x^2}$ gibt es keine Stammfunktion, f ist sicher integrierbar („Fläche existiert).



Der Integralbegriff muss also weiter gefasst werden, er muss *unabhängig von der Differentialrechnung* sein.

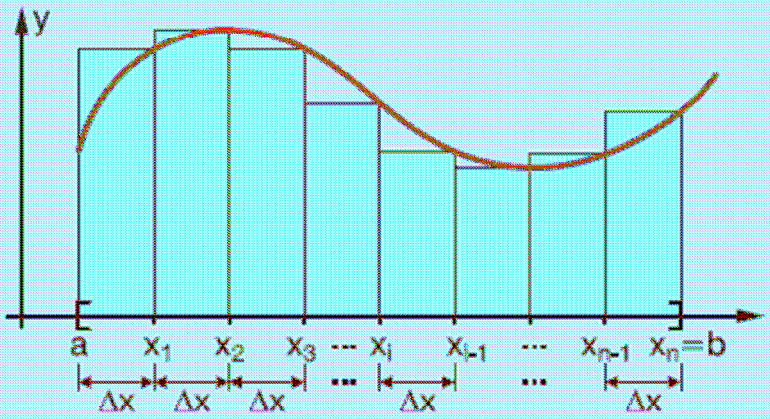

Intervallbreite = 0.5
Endwert = 3
Bestand_oben = (3, 19.42)
Bestand_unten = (3, 11.31)
20
15
10
5
0
0
1
2
3
4
5
6
7


Intervallbreite = 0.2
Endwert = 3
Bestand_oben = (3, 17.32)
Bestand_unten = (3, 14.04)
20
15
10
5
0
0
1
2
3
4
5
6
7


Intervallbreite = 0.02
Endwert = 3
Bestand_oben = (3, 15.91)
Bestand_unten = (3, 15.59)
20
15
10
5
0
0
1
2
3
4
5
6
7

Eine analytische Definition des bestimmten Integrals

Wir betrachten eine stetige Funktion f auf dem Intervall [a;b]. Das Intervall teilen wir in n Teilintervalle auf. Der Einfachheit halber sollen alle die gleiche Breite $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ haben.
In jedem dieser Teilintervalle wählen wir eine Stelle x_i. Nun bilden wir die Produktsumme:



$$s_n = f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + \ldots + f(x_n) \cdot \Delta x = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \Delta x$$

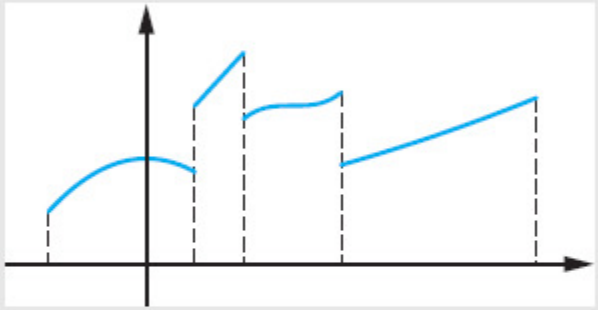
Der Grenzwert dieser Produktsumme liefert eine Definition des bestimmten Integrals:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

Integrieren ist mehr als „Stammfunktion finden“!

Ziel muss es also sein, eine Definition für das Integral zu finden, die ohne den Begriff der Stammfunktion auskommt. Genau dies leistet die analytische Definition des Integrals über den Grenzwert der Unter- und Obersummen nach RIEMANN. Neben der höheren Präzision ist es diese Eigenschaft, die die Riemann-Definition auszeichnet.

Diese Definition ist so weit, dass damit auf geschlossenen Intervallen auch Funktionen mit Sprungstellen integrierbar sind, was ja auch der Anschauung entspricht, weil die Flächen ja augenscheinlich existieren.



Gibt es dann überhaupt nach der analytischen Definition von RIEMANN nicht integrierbare Funktionen? Ja, der Mathematiker DIRICHLET hat als erster eine solche angegeben. Diese Funktion hat unendlich viele Sprungstellen, sogar „überabzählbar“ viele. Wenn man auch bei einer solchen Funktion Flächen messen will, muss der Integralbegriff noch einmal erweitert werden. Dies hat LEBESGUE durchgeführt *(Lebesgue-Integral)*.

Dirichlet-Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \phantom{\text{für }} x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Einst:

Flächenproblem bei krummlinigem Rand

↓

Idee der Unter- und Obersummen

↓

Potenzsummen

↓

$$\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

↓

„Umgekehrte des Ableitens"

↓

Hauptsatz

Jetzt:

Szene 1/ Szene 2 /Szene 3

↓

Hauptsatz
(entmystifiziert)

Einst:

Steigung $\overset{?}{\leftrightarrow}$ Fläche

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

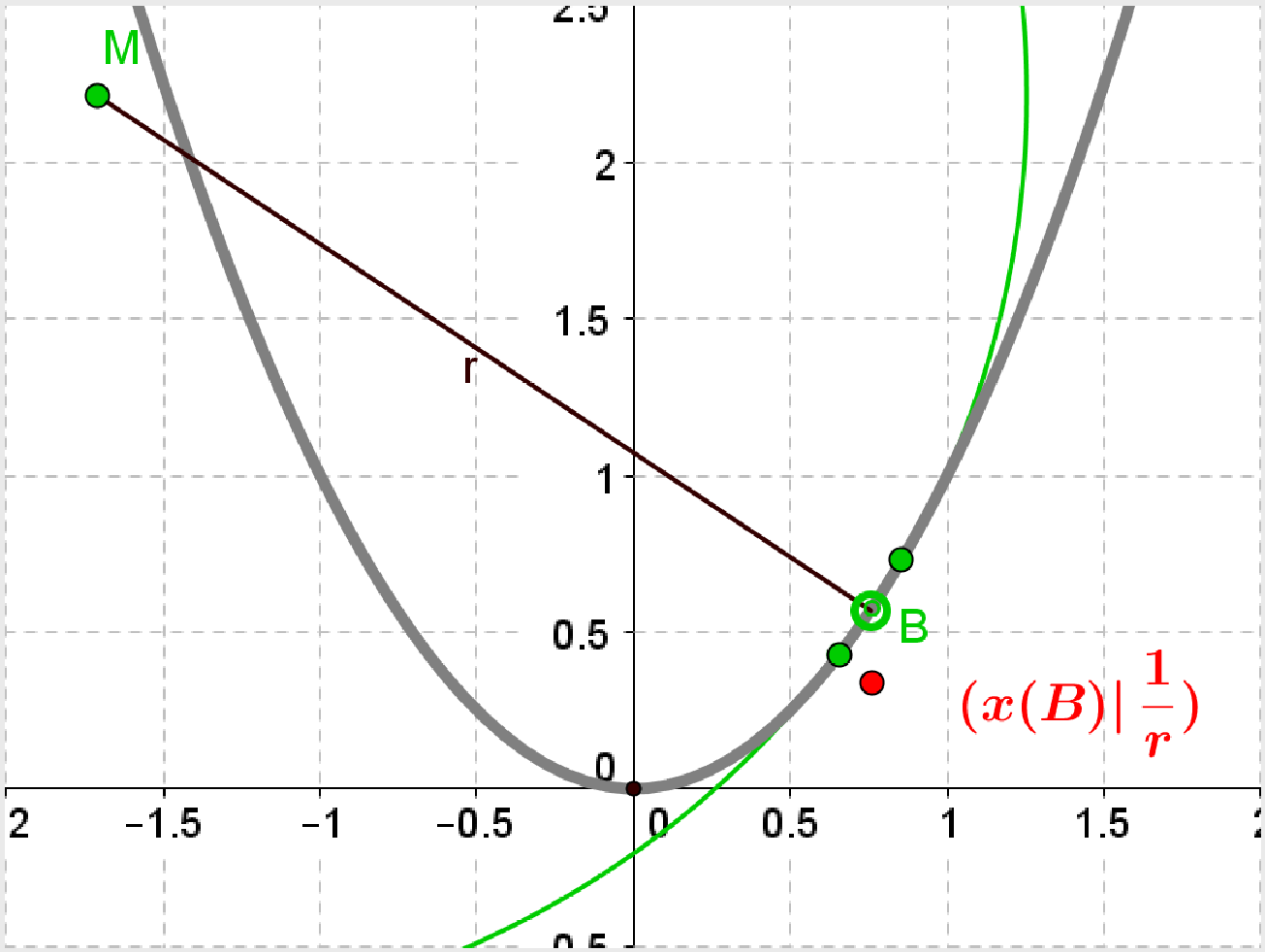
$f \leftrightarrow f'$

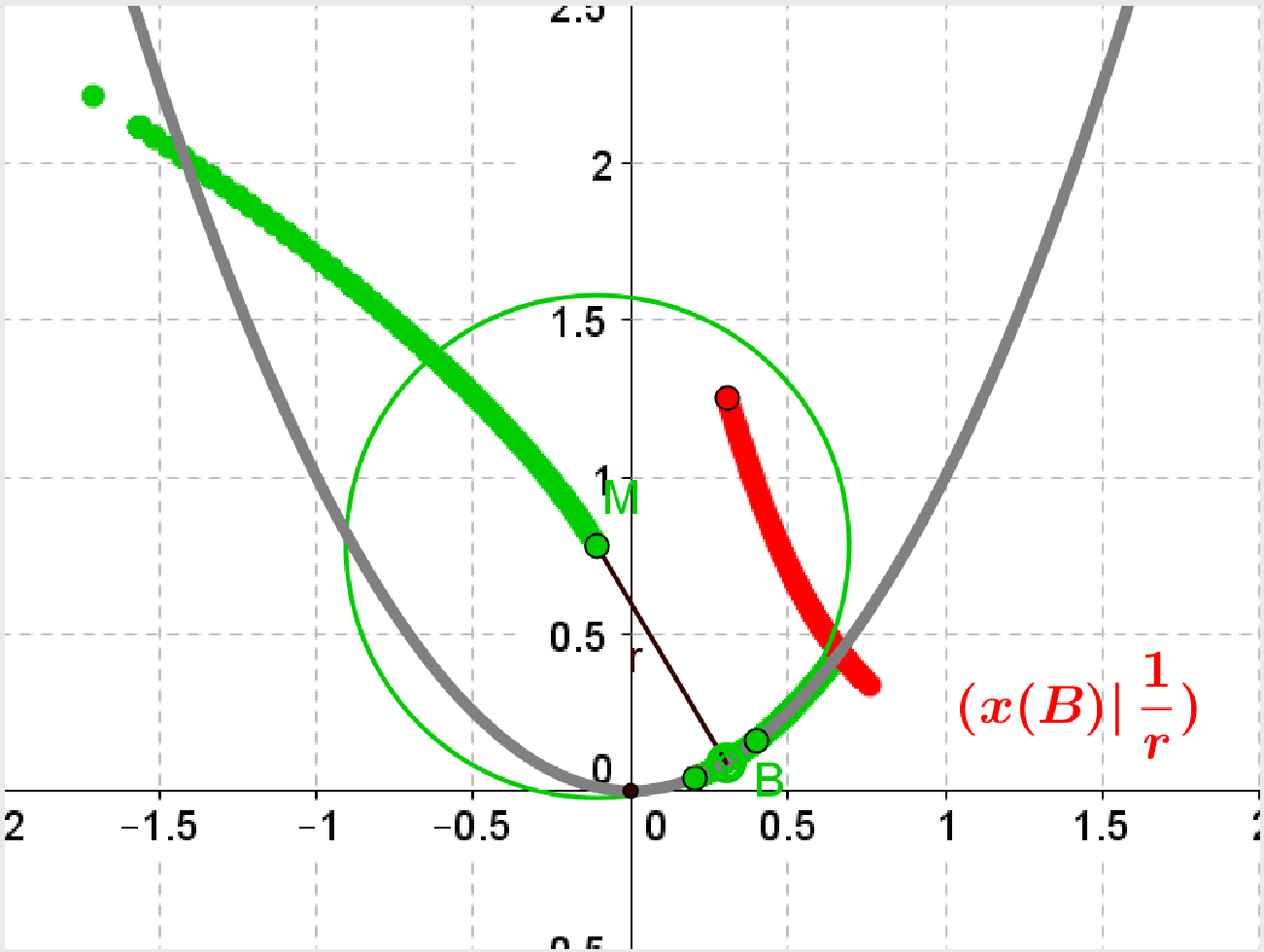
Jetzt:

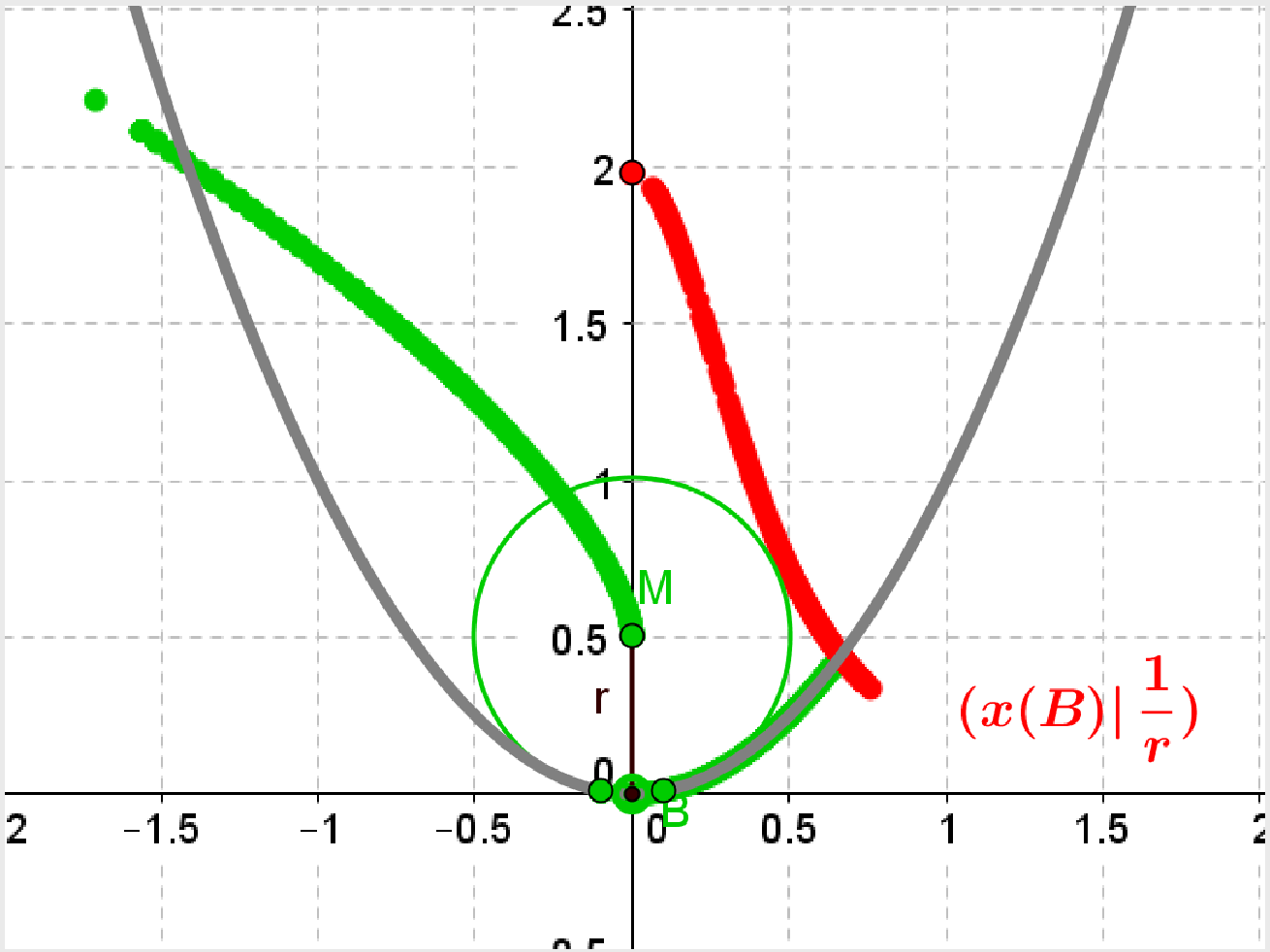
Klasse 10: Bestand f → Änderung f'

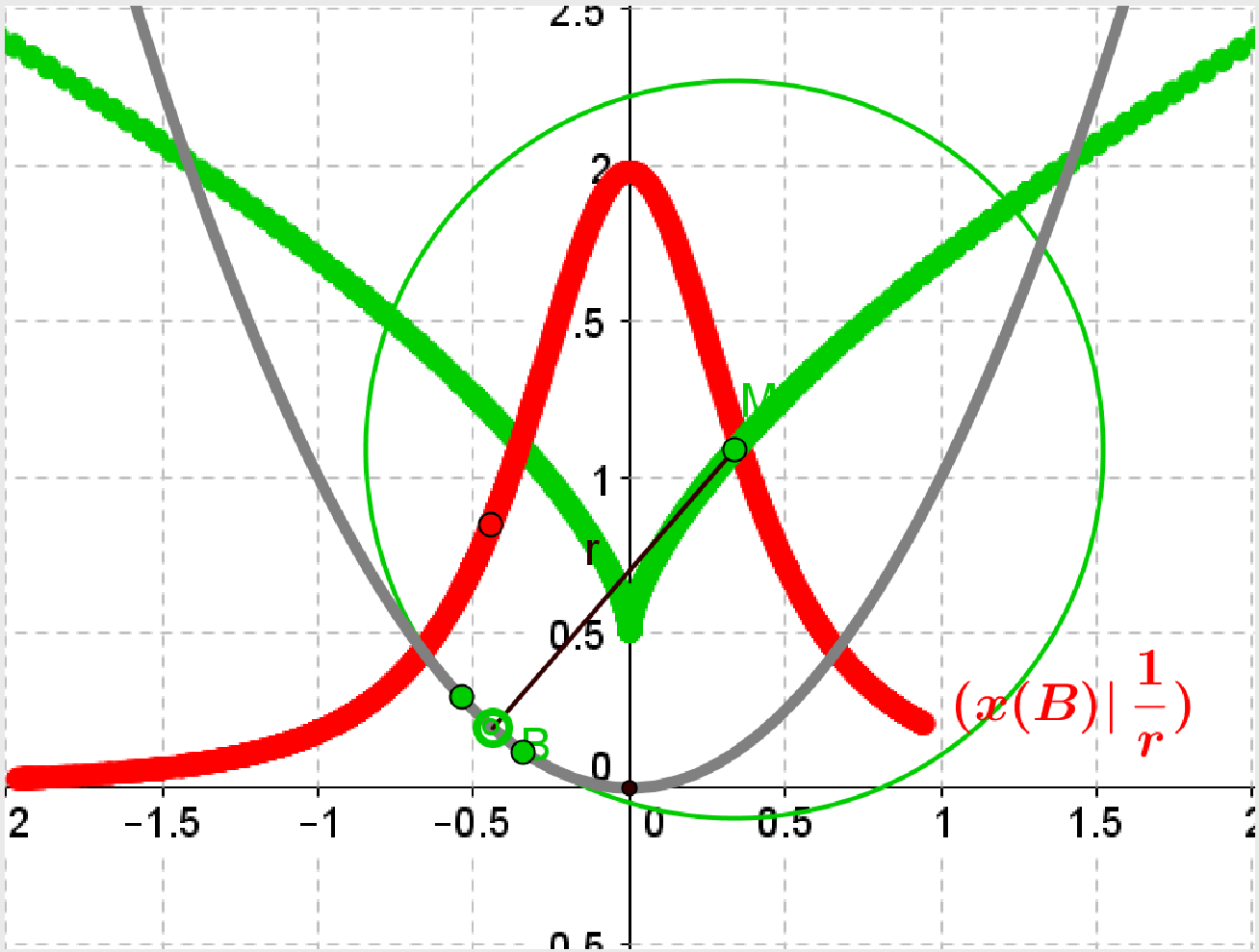
Q1: Änderung f' → Bestand f

Konstante Steigung: Geraden → 2 Punkte
Konstante Krümmung: Kreise → 3 Punkte




2
1.5
1
0.5
0
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
M
r
B
$(x(B)|\frac{1}{r})$


2.5
2
1.5
1
M
0.5
r
0
B
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
$(x(B)|\frac{1}{r})$


2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
r
B
$(x(B)|\frac{1}{r})$

Jetzt reicht es.

Vielen Dank

$$y1(x) = x^2$$

```
F1 F2 Algebra  F3 Calc  F4 Other  F5 PrgmIO  F6 Clean Up
■ (y1(x + h) − y1(x))/h → msek(x, h)                Done
■ msek(-3, 6)                                        0
■ msek(-5, 10)                                       0
■ msek(2, 5)                                         9
■ msek(7, -5)                                        9
■ msek(-2, 5)                                        1
MAIN          RAD AUTO          FUNC 6/30
```

```
F1 F2 Algebra  F3 Calc  F4 Other  F5 PrgmIO  F6 Clean Up
■ msek(1, h)                                     h + 2
■ msek(-3, h)                                    h − 6
■ msek(x, .1)                            2. ·(x + .05)
■ msek(x, .01)                          2. ·(x + .005)
■ msek(x, h)                                 2·x + h
■ ((x + h)^2 − x^2)/h                        2·x + h
((x+h)^2−x^2)/h
MAIN          RAD AUTO          FUNC 6/30
```

$$\frac{(1+h)^2 - 1}{h}$$

F1 F2 Algebra F3 Calc F4 Other F5 PrgmIO F6 Clean Up

- expand$((x+h)^3)$

$$x^3+3\cdot h\cdot x^2+3\cdot h^2\cdot x+h^3$$

- expand$((x+h)^4)$

$$x^4+4\cdot h\cdot x^3+6\cdot h^2\cdot x^2+4\cdot h^3\cdot x+h^4$$

expand((x+h)^4)

MAIN RAD AUTO FUNC 2/30

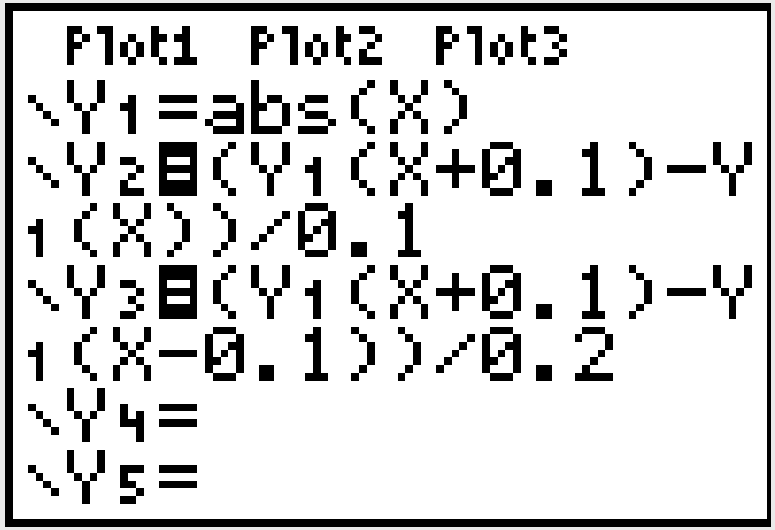
F1 F2 Algebra F3 Calc F4 Other F5 PrgmIO F6 Clean Up

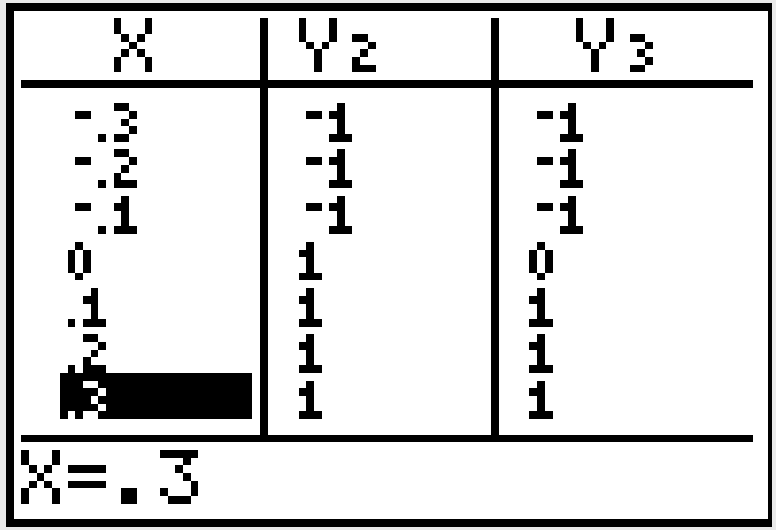
- msek(x, h) $\quad 3\cdot x^2+3\cdot h\cdot x+h^2$
- msek(x, h) $\quad \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$
- msek(x, h) $\quad \dfrac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$
- msek(x, h) $\quad \dfrac{\left(2^h-1\right)\cdot 2^x}{h}$

MAIN RAD AUTO FUNC 4/30

Ein anderer Differenzenquotient

$$msek2(x,h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

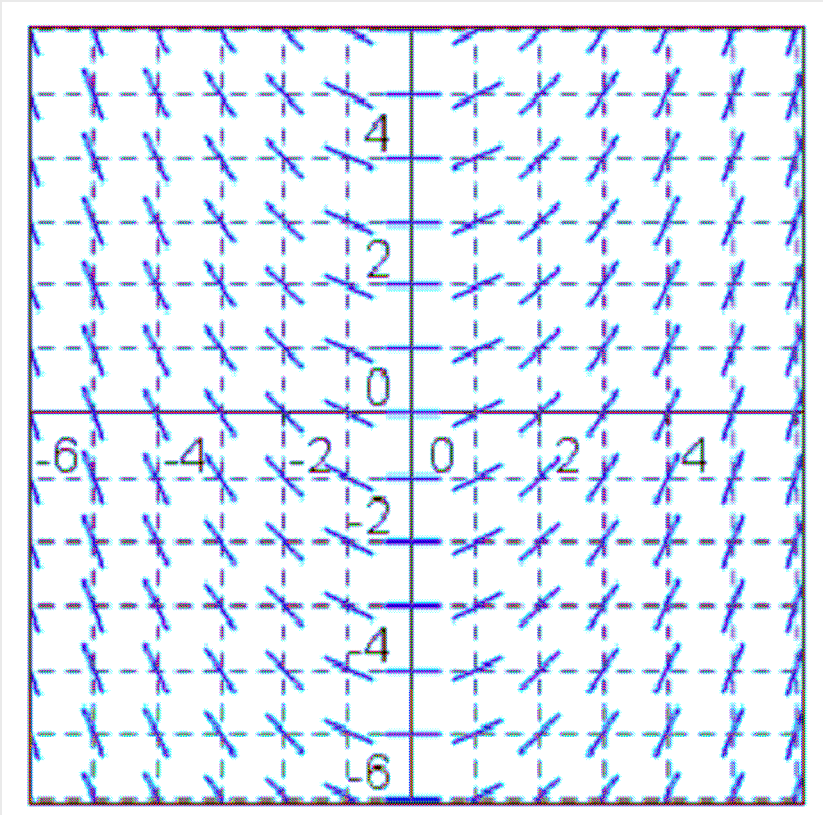


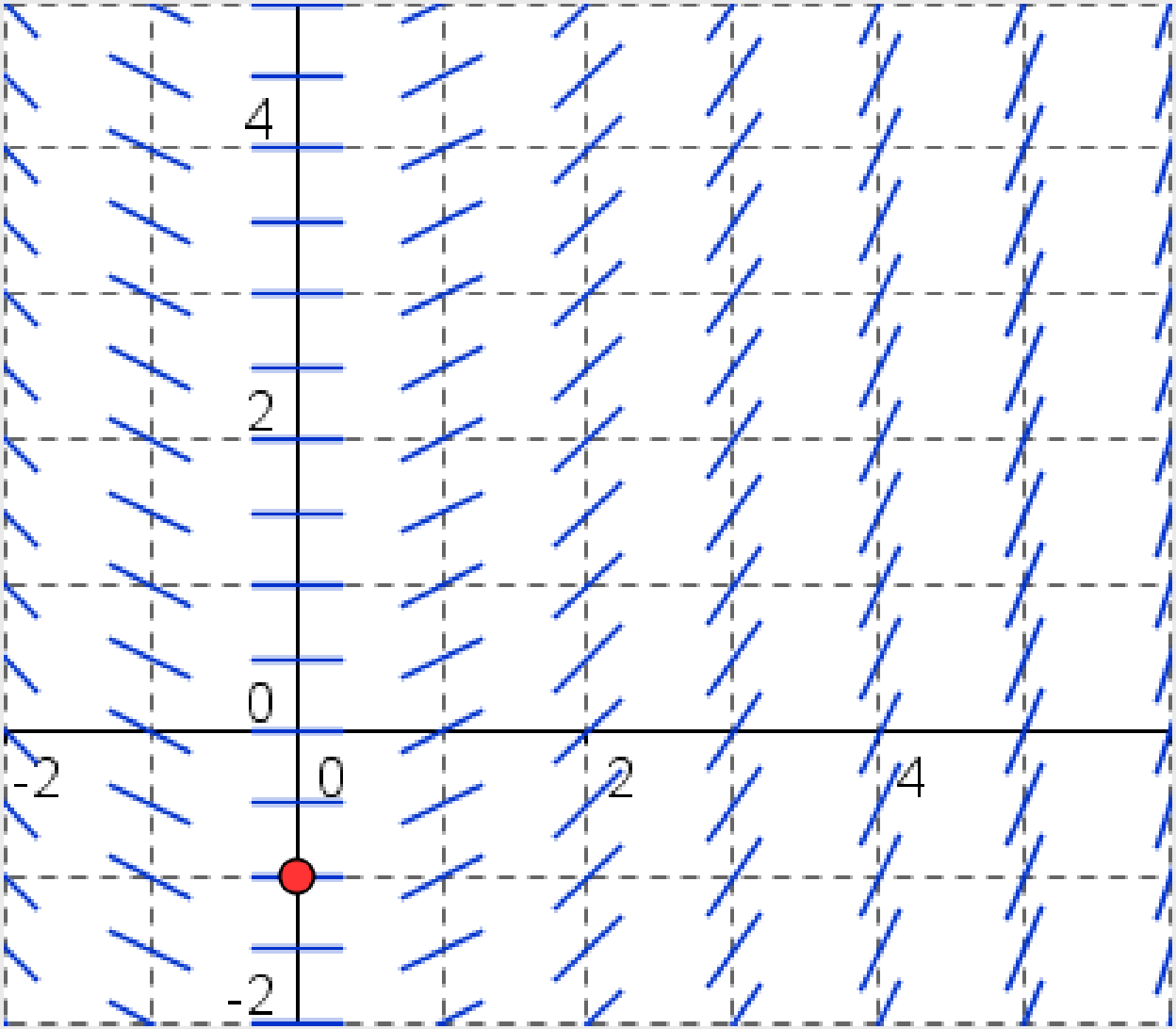


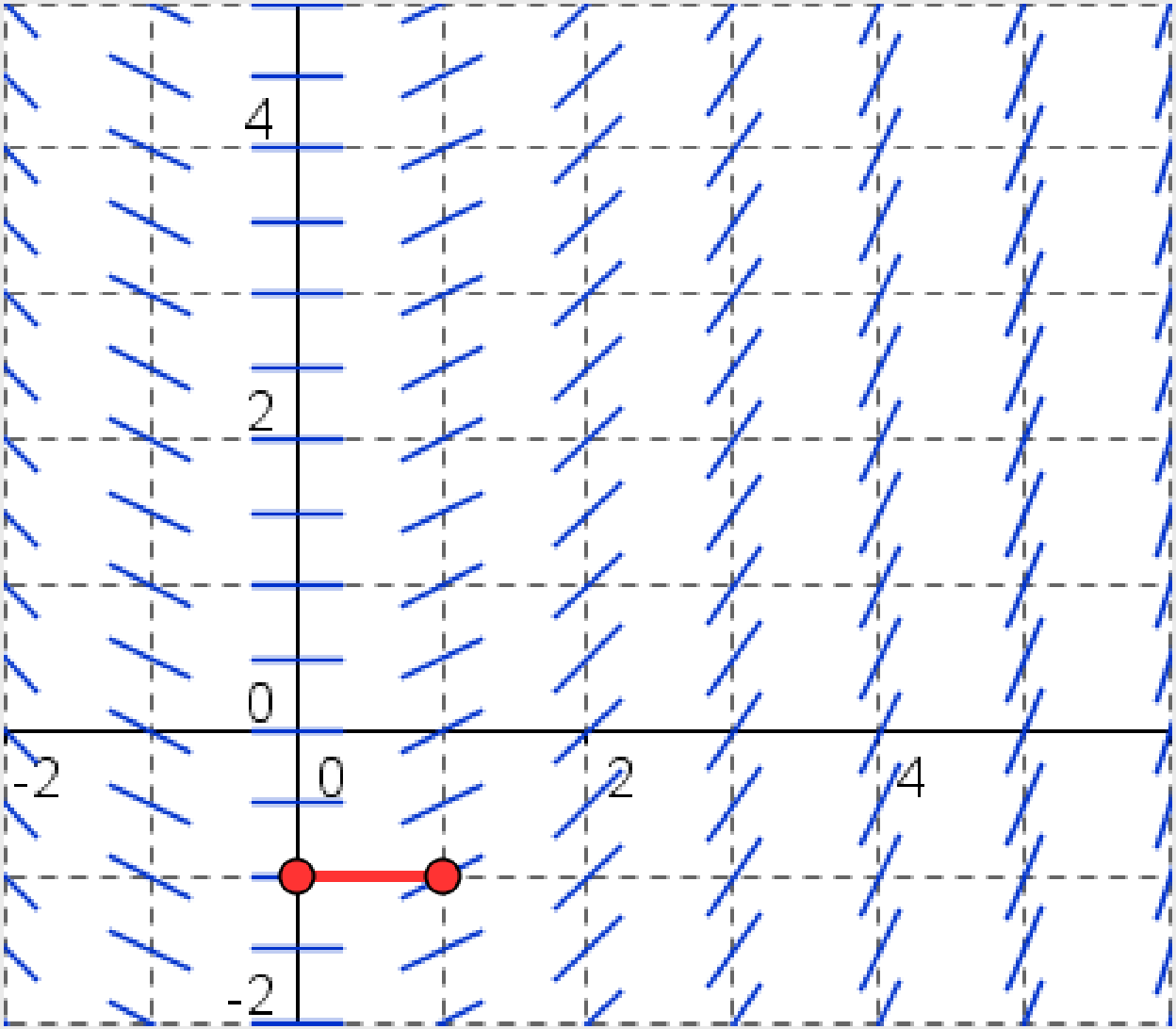
Noch ein anderer Differenzenquotient

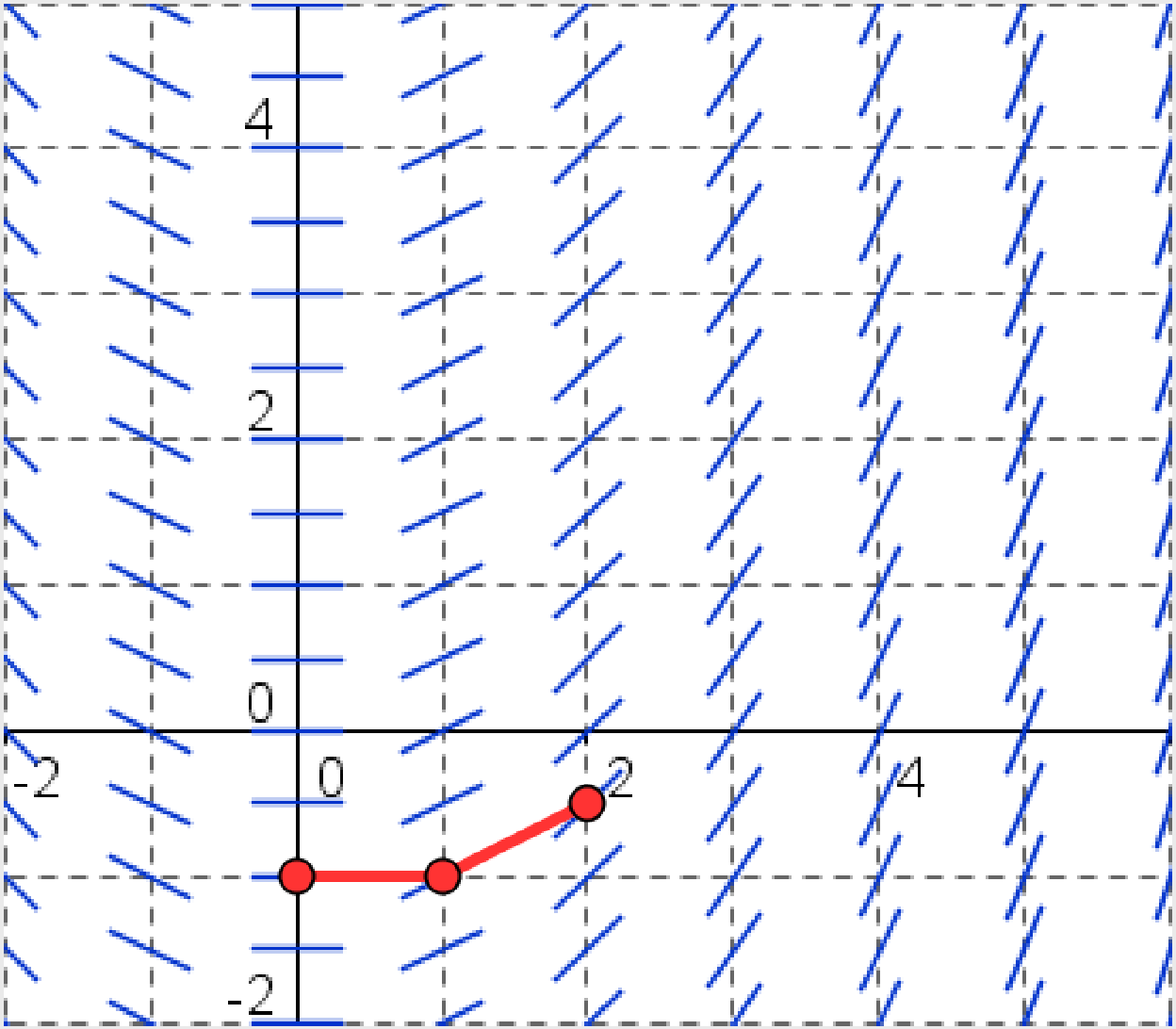
$$proz(x,h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{f(x)}$$

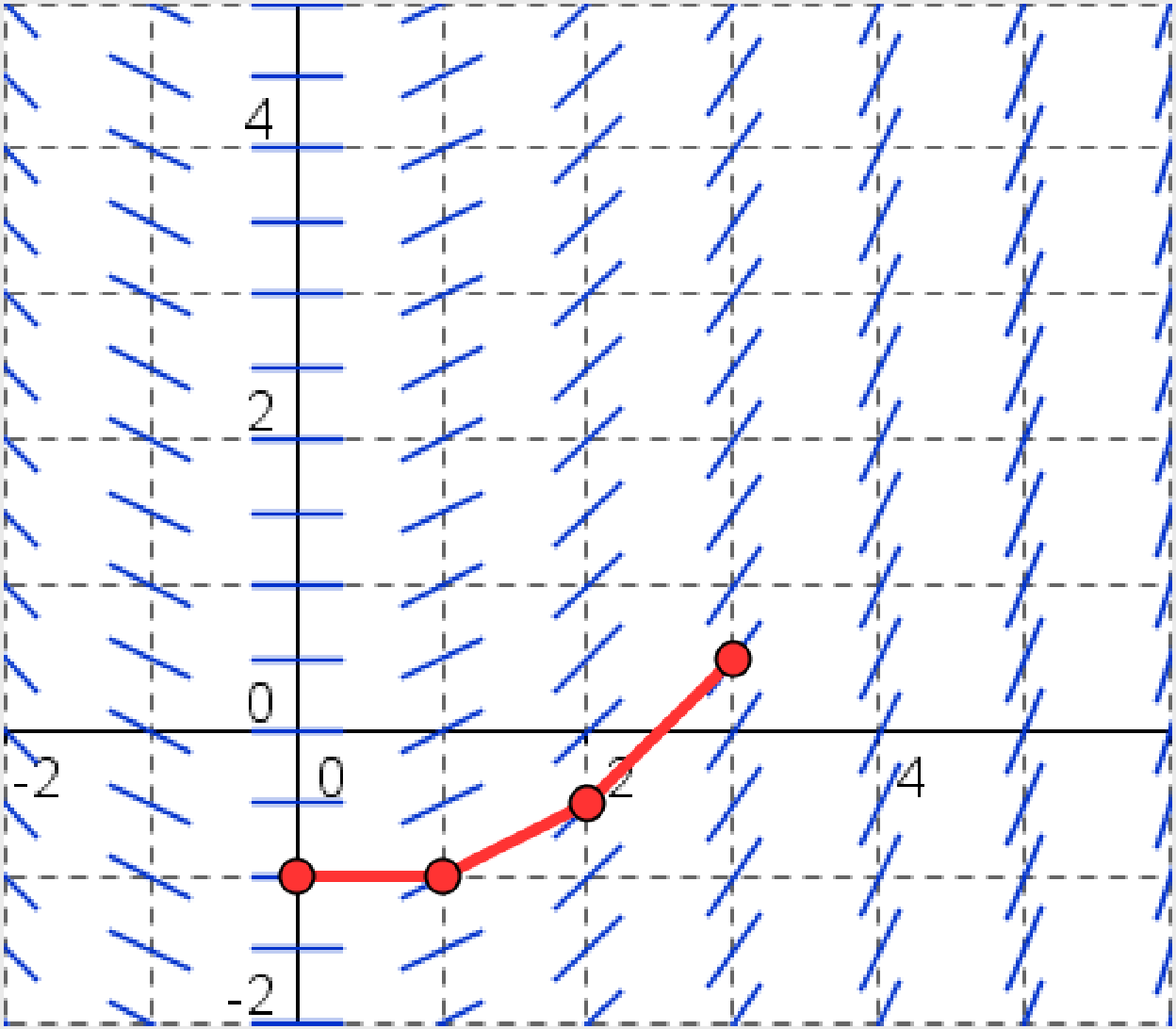
$$f'(x) = 0{,}5 \cdot x$$

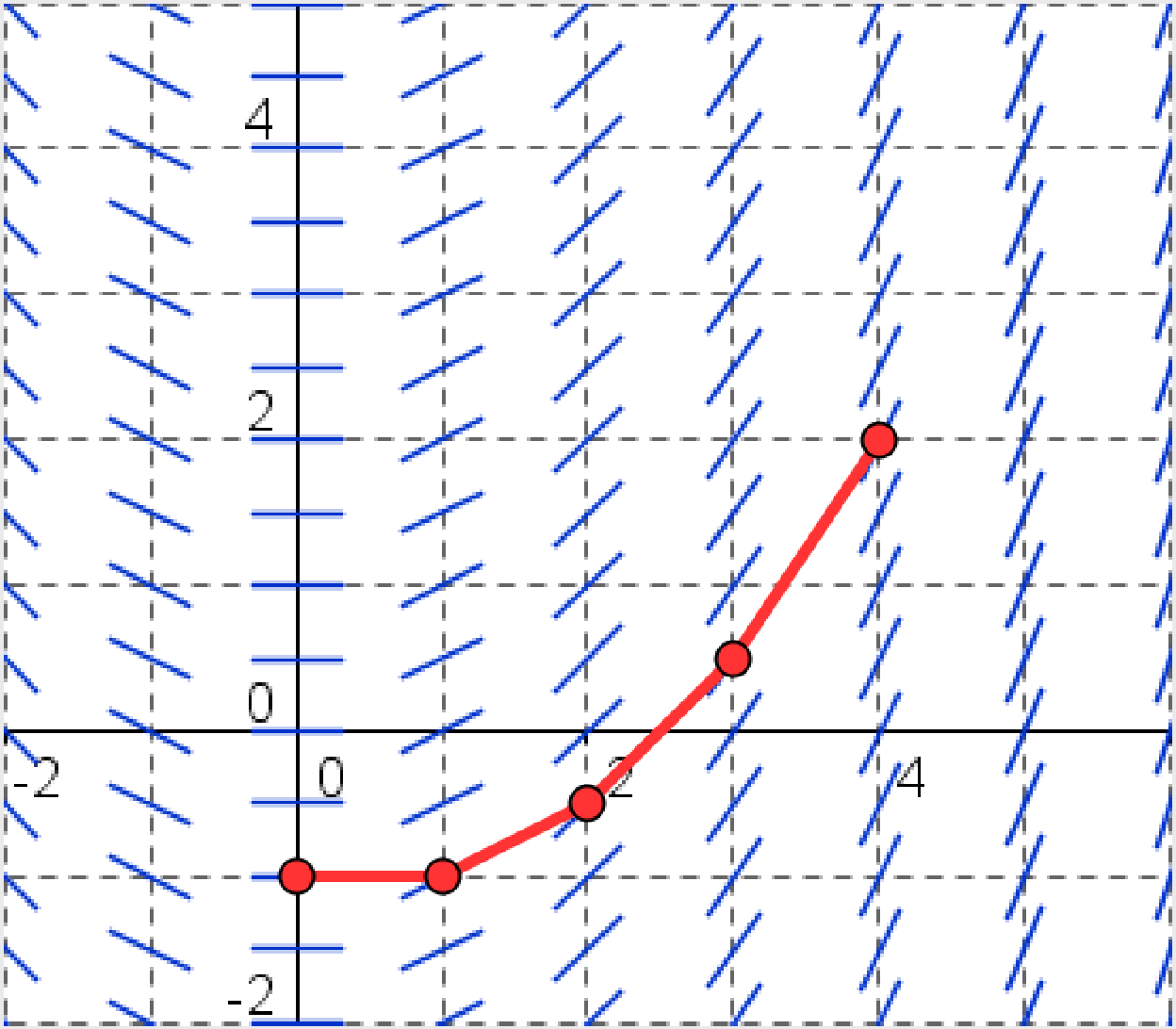


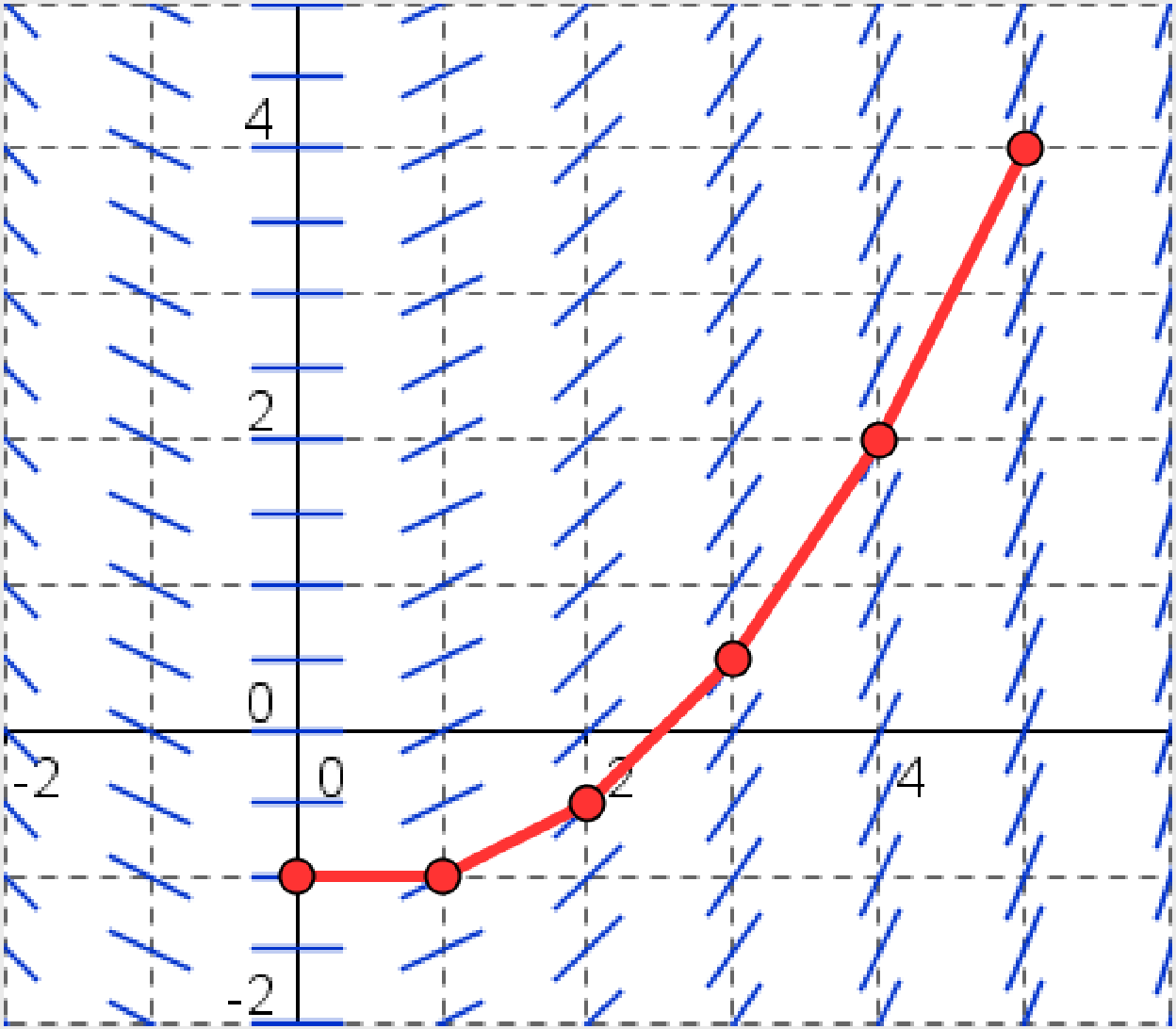

4
2
0
-2
0
2
4
-2

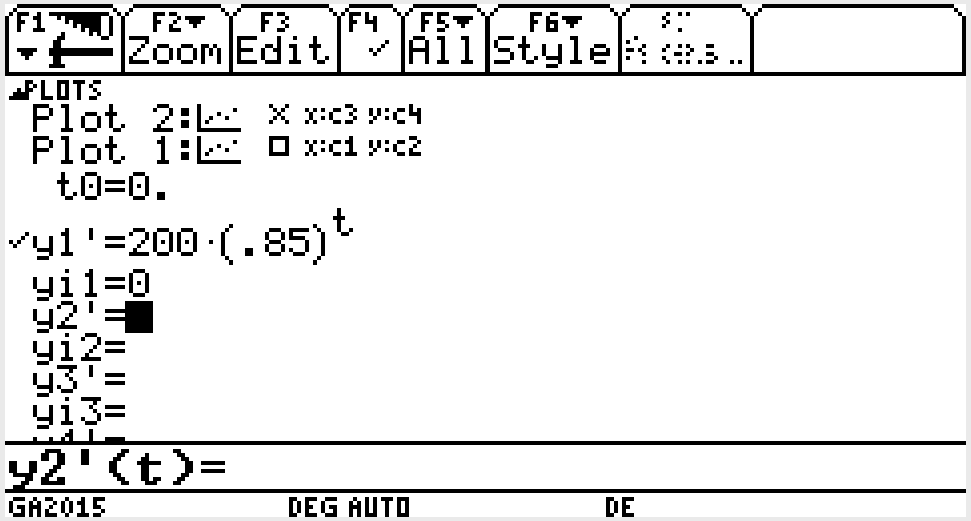

4
2
0
-2
0
2
4
-2

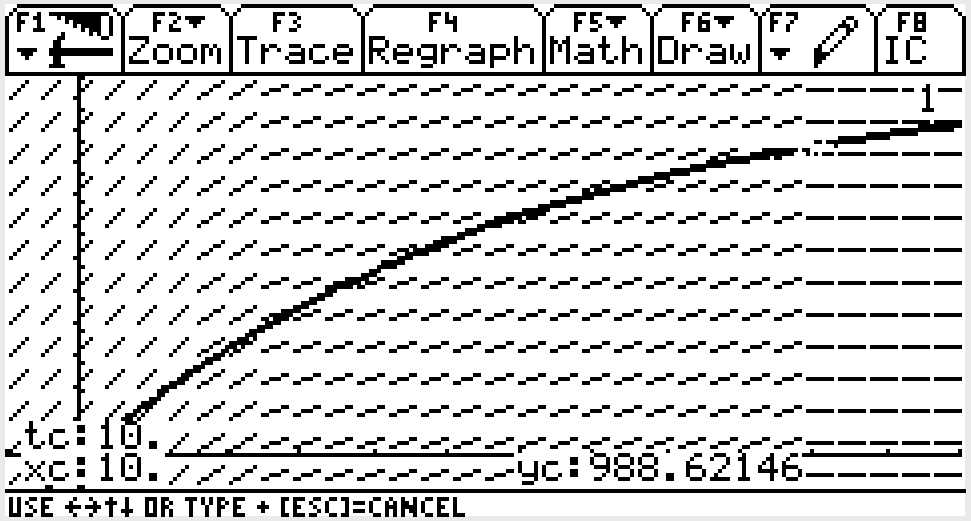

4
2
0
-2
0
2
4
-2


4
2
0
-2
0
2
4
-2


4
2
0
-2
0
2
4
-2


4
2
0
-2
0
2
4
-2


F1
F2 Zoom
F3 Edit
F4
F5 All
F6 Style
PLOTS
Plot 2: x:c3 y:c4
Plot 1: x:c1 y:c2
t0=0.
y1'=200·(.85)^t
yi1=0
y2'=
yi2=
y3'=
yi3=
y2'(t)=
GA2015 DEG AUTO DE


F1
F2 Zoom
F3 Trace
F4 Regraph
F5 Math
F6 Draw
F7
F8 IC
1
tc:10.
xc:10.
yc:988.62146
USE ←→↑↓ OR TYPE + [ESC]=CANCEL

30. Gegeben sei $y' = f(x)$, gesucht $y = \int f(x)\ dx = F(x) + c$. $y' = f(x)$ läßt sich deuten als Steigung der gesuchten Kurven $y = F(x) + c$. Durch die Gleichung $y' = f(x)$ ist jedem Punkt P der x-y-Ebene eine ganz bestimmte Steigung zugeordnet, ein sogenanntes Richtungselement der durch P gehenden Kurve aus der Schar $y = F(x) + c$. Alle Richtungselemente bilden ein Richtungsfeld. In ein solches Richtungsfeld legt sich jede der gesuchten Integralkurven so hinein, daß ihre Richtung sich stetig ändert.

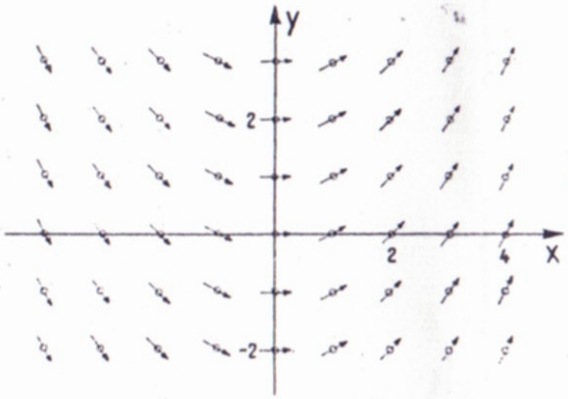


Abb. 56. Das durch $y' = \frac{1}{2}x$ bestimmte Richtungsfeld.

In der Abb. 56 ist das durch $y' = \frac{1}{2}x$ bestimmte Richtungsfeld gezeichnet. Die Integralkurven sind leicht zu sehen.

a) Das Richtungsfeld und jeweils einige Integralkurven sind in den Fällen $y' = \frac{1}{3}x$, $y' = \frac{1}{4}x^2$, $y' = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ zu zeichnen.

b) Eine bestimmte Integralkurve wird dadurch festgelegt, daß für sie eine Anfangsbedingung vorgeschrieben wird. Es kann z. B. ein Punkt gegeben werden, durch den die Kurve laufen soll.

Aus den Kurven der unter **a)** gezeichneten Kurvenscharen sind die zu bestimmen, die durch den Punkt $(1|1)$ gehen. Wie heißen die Gleichungen dieser Kurven?

Aus: Reinhard-Zeisberg: Oberstufe Analysis 1956