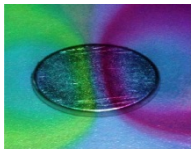
IMST – Innovationen machen Schulen Top

Themenprogramm: Kompetenzen im mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht



TITEL

„ICH ERKLÄRE MEINER MUTTER AM MITTWOCH DIE MATHEMATIK“

ID 1786

Karin Zotter

Ingrid Filzmoser

Johanna Hütter

NMS Birkfeld

Birkfeld, Juni, 2016

ABSTRACT **3**

VORWORT **4**

1 ZIELE **5**

1.1 Ziele auf LehrerInnen-Ebene 6

1.2 Ziele bezüglich Gender und Diversität 7

1.3 Ziele auf SchülerInnen-Ebene 7

1.4 Ausgangssituation 8

1.5 Fachdidaktische Literatur 9

1.6 Maßnahmen 9

1.7 Geplanter Projektablaufplan 10

1.8 Geplanter Kompetenzkatalog 12

2 DURCHFÜHRUNG **14**

2.1 Beschreibung der Umsetzung 14

2.2 Beschreibung einer Lernaufgabe 14

2.3 Verbreitung und Vernetzung 19

3 ERGEBNISSE (EVALUATION) **21**

3.1 Beschreibung einer Leistungsaufgabe 21

3.2 Daten 25

3.3 Interpretation 37

4 GENDER & DIVERSITÄT **39**

5 RESÜMEE UND AUSBLICK **40**

6 LITERATUR **42**

7 ANHANG **44**

ERKLÄRUNG **53**

ABSTRACT

Sehr viele Kinder, Jugendliche und Erwachsene haben mit der Mathematik enorme Schwierigkeiten, die für Betroffene mit den Besonderheiten dieses Faches zusammenhängen. Das Wissen, das sie sich in der Schule aneignen, gewinnt für sie vielfach nur den Status von Prüfungswissen, welches oberflächlich gelernt und entsprechend schnell wieder vergessen wird. Damit verbunden ist oft eine negative Einstellung zum Fach, das dann als Ganzes abgewertet wird (Heymann 2013, S 7).

Insbesondere die Abstraktheit der Mathematik wird als Handicap erlebt: Für viele Schülerinnen und Schüler dominiert der Eindruck, dass sie es mit einem undurchschaubaren, unverstehbaren Begriffsgefüge und Regelwerk zu tun haben (Heymann 2013, S 7).

Tiefenverständnis ist gegeben, wenn Kinder mit mathematischen Inhalten Vorstellungen verknüpfen können (vgl. Blum 2012). Die Frage: „Wie geht das?“ wird dabei ersetzt durch die Frage „Was bedeutet das?“.

Tiefenverständnis aufzubauen – Hattie (2014) spricht in diesem Zusammenhang auch von „konzeptuellem Verstehen“ – ist ein Anspruch, den wir uns im Rahmen eines modernen, kompetenzorientierten Unterrichts nicht entziehen können.

Die vorliegende Arbeit geht der Frage nach, wie es möglich ist, Verständnis im Sinne eines sinnstiftenden Begreifens in den Unterichtsalltag einer NMS zu implementieren.

Impressum

Schulstufe:	6.
Fächer:	Mathematik
Kontaktperson:	Karin Zotter
Kontaktadresse:	8160 Weiz, Leopoldhofweg 9
MitarbeiterInnen	Ingrid Filzmoser, Johanna Hütter

VORWORT

„Mathematik war für mich eher eine Last, die es so schnell wie möglich loszuwerden galt. Was mich an der Mathematik immer abschreckte, war diese oft abstrakte Materie, diese Formeln und Zahlen bzw. Buchstaben, deren Sinn und Zusammenhang ich nicht durchschauen konnte“ (eine Lehrerstudentin 1988, zitiert durch Heymann 2013).

Schon lange beschäftigt mich als Lehrerin die Frage, warum der Erwerb eines mathematischen Grundverständnisses normal begabten Kindern mitunter große Schwierigkeiten bereiten kann. Auch M. ist davon betroffen. Wir sitzen gemeinsam bei unserem ersten KEL (Kind-Eltern-Lehrkraft)-Gespräch. Voll Stolz präsentiert M. ihre Deutschaufsätze. Sie liebt es, mit Sprache zu spielen, schreibt selbst Gedichte und möchte Lehrerin oder Autorin werden. Ich lerne sie von einer ganz anderen Seite kennen. Wir begeben uns auf Ursachenforschung, warum es mit der Mathematik nicht so klappt. Meine Vermutung, dass M. zuhause viel erklärt bekommt, wird von ihrer Mutter bestätigt. Erklärungen von Elternseite sind einem tieferen Verständnis oft abträglich, da sie nicht an inhaltliche Vorstellungen geknüpft sind. Der Frage „Wie geht das?“ wird ein höherer Stellenwert eingeräumt als der Frage „Was bedeutet das?“. Letztere aber hat in einem kompetenzorientierten Unterricht Priorität und wird auch bei Leistungsüberprüfungen eingefordert. Liefert man den Kindern fertige Erklärungen, können sie selbstständige Fähigkeiten oft nicht in gewünschter Weise ausbilden. Sie reproduzieren automatisiert Verfahren oder Phrasen, ohne über Hintergründe Bescheid zu wissen.

Eine Ansicht, die so schon lange existiert, wie im folgenden Zitat von Alfred N. Whitiehead (1913) zum Ausdruck kommt:

Anfälligkeit für Esoterik ist das charakteristische Übel, welches den Nutzen der Mathematik in der allgemeinen Bildung zunichtemachen kann. Macht sich der Mathematikunterricht nicht von solcher Esoterik frei, so müssen wir uns eben damit abfinden, dass kultivierte Menschen im Allgemeinen es nur zu einem miserabel geringen Maß an mathematischer Einsicht bringen werden (Alfred N.Whtiehead 1913, in Heymann 2013).

Zahlreiche wissenschaftliche Publikationen auf dem Gebiet der Mathematikdidaktik unterstreichen die Bedeutung der konstruktivistischen und kooperativen Perspektive. So liest man bei Reiss/Hammer (2013): „Unabhängig von den Inhalten, wird das Individuum nur dann einen Wissenszuwachs haben, wenn es sich dieses Wissen in einem aktiven Konstruktionsprozess aneignet.“

Sind Erwachsene die Erklärenden, besteht die Gefahr, dass die Kinder in eine Passivrolle fallen. Dadurch wird ein aktiver Konstruktionsprozess unterbunden. In der Schule unterstützen vorbereitete Lernumgebungen die Möglichkeit zur selbständigen Wissenskonstruktion. Hierbei sind Geduld und Vertrauen in die eigenen Fähigkeiten gefragt. Ansprüche, die bei vielen Kindern noch ausgebaut werden müssen, auch bei M. mit ihrem Ziel, die Leistungen in Mathematik zu verbessern.

Im kommenden Schuljahr möchte sie eine höhere Kompetenzstufe erreichen. Über die Anforderungen ist sie gut informiert. Zurzeit pendelt sie zwischen Kompetenzstufe 1.0 und 1.5. Sie möchte über 2.0 hinauskommen. Insgesamt gibt es 4 Kompetenzstufen. Um dies zu erreichen, ist es notwendig, dass M. an Selbstständigkeit gewinnt und sich intensiv verstehensbasiert mit der mathematischen Materie auseinandersetzt. Wir einigen uns darauf, den Unterstützungsmodus der Mutter umzukehren. Fortan sollte die Rolle der Erklärenden Marie übernehmen. Die Mutter ist Zuhörerin, stellt Fragen und gibt Rückmeldung. Wir einigen uns auf eine wöchentliche Zusammenkunft. Der Tag Mittwoch bietet sich an. Somit ist der Projekttitel „geboren“. Da ein Tiefenverständnis Erklärungskompetenz mit einschließt entscheide ich, in dieses Projekt alle meine SchülerInnen der zweiten Klassen einzubeziehen.

1 ZIELE

Padberg (2012) sieht das zentrale Anliegen des Mathematikunterrichts zunächst im Aufbau eines gesicherten Verständnisses. Ohne dieses kommt es lediglich zu zeitlich begrenzten „Scheinleistungen“, die im Falle des Vergessens nicht wieder hergeholt werden können. Folglich kann es im Mathematikunterricht nicht um das Auswendiglernen von (Routine-)Verfahren gehen, sondern es muss die notwendige Zeit aufgebracht werden, die für ein tiefergreifendes Verständnis eines Begriffs, eines Sachverhalts oder eines Verfahrens erforderlich ist.

Auch für uns hat das Ziel, mathematisches Tiefenwissen aufzubauen und damit eine Basis für verstehensorientiertes Lernen zu schaffen oberste Priorität.

Eine Formulierung für verstehensorientiertes Lernen findet man bei Werner Blum:

„Schüler können mathematisches Verständnis nur ausbilden, wenn im Mathematikunterricht sorgfältig und langfristig angelegte inhaltliche Vorstellungen zu mathematischen Begriffen und Verfahren aufgebaut werden (Leitfrage: „Was bedeutet das?“). Vorstellungen zu aktivieren ist eine Basis, ohne die Kompetenzen nicht wirksam werden können. Im Mathematikunterricht wird ein Großteil der Aktivitäten hierfür aufzubringen sein“ (Blum 2012, S 34).

Bruder (2008) bringt es auf den Punkt: „Es genügt nicht ein Drittel von 600 formal zu berechnen, sondern es sollen dabei Vorstellungen aktiviert werden können (z.B. Preisverleihung in Form von Geld).“

Im Mathematikunterricht werden Zahlen häufig isoliert behandelt und Rechnungen rein formal gelöst. Dadurch wird Mathematik von vielen als abstrakt und realitätsfern wahrgenommen. Weist man Zahlen oder Variablen Bedeutungen zu, generieren sich die Vorstellungen automatisch. Darauf werden wir besonderes Augenmerk legen. Ergebnisse und Rechenschritte sollen erklärt und interpretiert werden. Die Entwicklung alternativer Rechenwege wird gefördert. Ein kompetenter Umgang mit den Grundrechenarten („Werkzeuge der Mathematik“), Unterscheidung von „Teilen“ und „Messen“ sowie der verschiedenen Arten der Multiplikation ersetzen dabei Hilfsmittel wie Tabellen, Schlüsse, oder Regeln, die oft auch verständnislos angewandt werden können. Durch diese Maßnahmen wollen wir unsere SchülerInnen zunehmend zu einer auf Tiefenverständnis beruhenden Erklärungskompetenz führen.

Auf eine Vernetzung von Lerninhalten unter Nutzung von Synergien wird besonderer Wert gelegt. Die Forderungen des Lehrplans bezüglich verständnisvollen Lernens und Wahl verschiedener Unterrichtsformen werden konsequent umgesetzt:

Die dazu gehörenden Lehrplaninhalte lauten:

Systematisches und situationsbezogenes Lernen, verständnisvolles Lernen:
Verständnisvolles Lernen ist ein individueller, aktiver und konstruktiver Prozess. Die Schülerinnen und Schüler sind nicht Konsumierende eines fix vorgegebenen Wissens, sondern Produzierende ihres Wissens, mit Betonung auf aktives Erarbeiten, Erforschen, Darstellen, Reflektieren. Mathematische Begriffe und Verfahren werden durch die eigenen Aktivitäten von den Schülerinnen und Schülern in ihr Wissenssystem eingebaut.

Unterrichtsformen:
Einzelarbeit, Partnerarbeit, Gruppenarbeit und projektorientierter Unterricht sollen die bestimmenden Unterrichtsformen des Mathematikunterrichts sein. Schriftliche Darstellungen von Lösungswegen sollen erst dann angeboten werden, wenn sich die Schülerinnen und Schüler mit einer Aufgabe – zumindest teilweise – auseinandergesetzt haben. Auch bei leistungsstärkeren Schülerinnen und Schülern ist handlungsorientiert vorzugehen. Keinesfalls soll der Unterricht auf das unreflektierte Erlernen von Verfahren und Fertigkeiten beschränkt werden.

Neben konstruktivistischen Ansätzen spielt für ein verstehensorientiertes Lernen auch das Vorwissen eine wichtige Rolle. Wir lesen dazu bei Prediger (2014):

„Damit verstehensorientiert gelernt wird, müssen die vorgegebenen Informationen oder andere Lernvorlagen (z.B. bestimmte Lernaufgaben) mit Hilfe des Vorwissens bedeutungshaltig interpretiert werden, d.h. vorgegebene oder generierte Informationen müssen in eine Ordnung gebracht werden mit den bereits vorhandenen Wissensbeständen verbunden und in diese integriert werden“ (Prediger et al. 2014, S 16)

Daraus ergibt sich das Ziel, dem Vorwissen der SchülerInnen konsequent Beachtung zu schenken und auf dieses aufzubauen.

Auch die besonderen Erfordernisse der NMS-Entwicklungsforschung wie das rückwärtigen Lerndesign (Wiggins und Mc Tighe 2012), begleitet von einer kompetenzorientierten Beurteilung (Marzano 2014) gilt es in die Arbeit zu integrieren. Durch tieferes Eindringen in mathematische Prozesse sollen individuelle Denkansätze in Gang gebracht werden. Wissenstransfer auf verschiedene Aufgabenstellungen ist dabei anzustreben und stellt ein wichtiges Ziel im Sinne der Nachhaltigkeit von Mathematikunterricht dar.

1.1 Ziele auf LehrerInnen-Ebene

In der Unterstufe ist es in unserer Gegend üblich die NMS zu besuchen, was eine überaus große Heterogenität innerhalb einer Jahrgangsstufe bewirkt. Hochbegabte SchülerInnen und IntegrationsschülerInnen teilen sich einen Klassenraum und damit auch den Unterricht. Das stellt alle unterrichtenden Lehrpersonen vor große Herausforderungen. Diesen gilt es in besonderer Weise gerecht zu werden.

In unserem Unterricht wollen wir im Sinne der Inklusion von fremdbestimmten Gruppenteilungen Abstand nehmen und trotzdem eine optimale Entfaltung individueller Anlagen ermöglichen.

Weinert (2014) charakterisiert das Lernen begabter SchülerInnen durch folgende Attribute: fakultativ (systematisch, situiert) und antizipierend (selbständig, selbstgesteuert, kooperativ und partizipativ).

Als besondere Merkmale nennt er ein höheres Lerntempo, höheres kognitives Niveau (durch Tiefe und die Komplexität des Verstehens bestimmt) eine intelligentere Wissensorganisation, höhere metakognitive Kompetenzen und höhere kreative Fähigkeiten (Weinert 2000, Trautmann 2005 zitiert durch Prediger 2014).

Diese Fähigkeiten begabter SchülerInnen bilden eine gute Basis für einen gelingenden, offenen Unterricht und der damit einhergehenden Notwendigkeit flexibler Differenzierung.

Wir wollen im Zuge dieses Projekts dem aktiven Erarbeiten, Erforschen, Darstellen und Reflektieren breiten Spielraum gewähren. Dadurch sollen die SchülerInnen befähigt werden, Lerninhalte erklären zu können und sich zunehmend fachlicher Begriffe, also einer mathematischen Sprache zu bedienen.

„Lehren bedeutet, Lernprozesse anzuregen, zu unterstützen und zu begleiten” (vgl. Reiss & Hammer 2013). In diesem Sinne beobachten wir genau die Lernprozesse unserer SchülerInnen und intervenieren, falls erforderlich durch differenzierendes Material.

Im Zuge unserer Arbeit wollen wir Einblicke gewinnen in die Gedankenwelt unserer SchülerInnen um individuelle Förderung zu ermöglichen.

In diesem Zusammenhang ist für uns die Frage bezüglich unterschiedlicher Denkkonzepte mathematisch begabter und weniger begabter SchülerInnen von besonderem Interesse. Gezielte Beobachtungen im Zuge des Vorgängerprojekts ließen erkennen, dass Schülerinnen mit guten Leistungen über bessere bildhafte Vorstellungen verfügen und weniger regelgeleitet agieren. Sie können Ergebnisse

interpretieren und auf Richtigkeit überprüfen. Es fällt ihnen leicht, neue Wissensinhalte in das vorhandene Wissenssystem zu integrieren und Umstrukturierungen vorzunehmen. Sie können abschätzen, wo Spielräume von Veränderungen zur Verfügung stehen und wo nicht.

Leistungsschwächere SchülerInnen verfügen nur in einem sehr geringen Ausmaß über diese Fähigkeiten. Sie halten eher an eingeschliffenen Konzepten fest (zum Beispiel der Dividend ist größer als der Divisor, bei einer Division wird das Ergebnis immer kleiner, bei einer Multiplikation größer) und ändern Rechenzeichen und Angaben um zu einem Ergebnis zu kommen, das ihren Vorstellungen entspricht (z.B. Vertauschen von Dividend und Divisor).

Es fällt ihnen verhältnismäßig schwer, bildhafte Vorstellungen aufzubauen und gewonnene Erkenntnisse mit einfachem Zahlenmaterial auf komplexeres zu übertragen. Sie argumentieren eher mit auswendig gelernten (leider oft unverstandenen) Regeln und erkennen dabei nicht die dahinter steckenden mathematischen Konzepte.

Aus diesen Beobachtungen ergibt sich für uns das (längerfristige) Ziel, unterschiedliche Denkkonzepte mathematisch mehr oder weniger Begabter einander anzunähern. Damit soll die Erfolgsquote Letzterer durch positive Beeinflussung von Denk- und Lösungsstrategien erhöht werden.

Überprüft wird der Leistungsfortschritt durch die Qualität und Häufigkeit der Antworten im Zuge der mündlichen und schriftlichen Mitarbeitsleistungen sowie der entwickelten Erklärungskompetenz.

Gut Begabte werden viele Möglichkeiten vorfinden, alternative Lösungswege zu entwickeln und vorzustellen.

Inhalte werden schon in frühen Lernphasen vernetzt dargeboten, um Synergien nutzbar zu machen. Das erfordert eine Umstellung der in den Schulbüchern dargebotenen Didaktik. Damit haben wir schon im Vorjahr begonnen und das soll im heurigen Schuljahr weiter fortgeführt werden. Das Zurückführen mathematischer Inhalte auf einige wenige Grundkonzepte soll den Kompetenzaufbau erleichtern.

1.2 Ziele bezüglich Gender und Diversität

Aus Beobachtungen im Vorfeld ist bekannt, dass in einer der beiden Klassen in Mathematik tendenziell die Buben leistungsstärker sind, während es in der zweiten teilnehmenden Klasse genau umgekehrt ist. Im Zuge des Projekts soll beobachtet werden, ob dieser Umstand erkennbare Auswirkungen zeigt.

Die Möglichkeit selbstständiger Wissenskonstruktion durch offen angelegte Lernumgebungen soll individuelle Stärken ohne Zeitdruck zur Entfaltung bringen. Dadurch werden Konkurrenzsituationen zwischen den Geschlechtern minimiert und der Leistungsdruck vermindert. Wir erhoffen, dass davon im Besonderen die Mädchen profitieren.

1.3 Ziele auf SchülerInnen-Ebene

Die Anforderungen an SchülerInnen sind während der Projektphasen sowohl im affektiven als auch im kognitiven Bereich sehr hoch einzustufen. Die Lernumgebungen beinhalten kaum Musterlösungen und leicht anwendbare Merksätze. Diese werden von dem SchülerInnen anhand entsprechender Lernaufgaben im Rahmen der Lernprozesssteuerung selbst entwickelt. Hohe Denkansprüche verhindern demnach ein Abgleiten in Routinetätigkeiten.

Von SchülerInnenseite häufig formulierte Wünsche nach Vorgabe einfach umzusetzender Regeln können mit Blickwinkel auf langfristig aufzubauendes Tiefenwissen nicht erfüllt werden. Durch ent-

sprechende Aufklärung der Eltern sollen Regelvorgaben auch im Rahmen von häuslicher Betreuung möglichst vermieden werden.

Die SchülerInnen bekommen im Gegenzug einen breiteren Zeitrahmen und die Möglichkeit der freien PartnerInnenwahl im Erarbeitungsprozess. Das ist wiederum an eine selbstständige Steuerung des Lernprozesses und Ausbildung von Eigenverantwortung gekoppelt.

Die Entwicklung eines guten Gespürs für optimale Teamzusammensetzungen stellt eine wichtige Basis für bestmögliche Entfaltung individueller Ressourcen und kooperatives Lernen dar. Damit in Zusammenhang stehen hohe soziale Ziele wie etwa Rücksichtnahme und Einfühlungsvermögen.

1.3.1 Fachliche Kompetenzen

Neben den bereits genannten Kompetenzen selbständigen Wissenserwerbs stehen die Handlungsbereiche Argumentieren und Begründen sowie Interpretieren im Vordergrund. Dazu gekoppelt sind die Inhaltsbereiche Zahlen und Maße, geometrische Figuren und Körper sowie funktionale Abhängigkeiten.

1.4 Ausgangssituation

Wir führen das Projekt in zwei der vier zweiten Klassen durch. Insgesamt sind 38 SchülerInnen und drei Lehrpersonen involviert. Unsere Klassenzusammensetzungen sind, wie schon erwähnt, sehr heterogen. Da sich in der ländlichen Gegend ein Besuch des 25 km entfernten Gymnasiums bis dato nicht etabliert hat, leben wir das Beispiel einer typischen Gesamtschule. Seit drei Jahren sind wir zusätzlich in das Konzept der NMS eingebunden. Durch Wegfall der äußeren Differenzierung in Form von Leistungsgruppen und die im Zuge der NMS-Entwicklung geforderte Etablierung professioneller Lerngemeinschaften innerhalb des LehrerInnenkollegiums sind wir mit neuen Herausforderungen konfrontiert. Vor allem die Zusammenarbeit in großen LehrerInnenteams gestaltet sich noch schwierig und ungewohnt. Die vor drei Jahren stattgefundene Zusammenführung der zwei bis dahin getrennten Hauptschulen trug zu einer Verschärfung der Problematik bei, weil unterschiedliche Vorstellungen von Unterricht aufeinander prallen. Insofern bieten sich Projekte sehr gut an, weil man in kleineren Teams alternative Wege beschreiten und Forschungsarbeit betreiben kann.

Jegliche Aktivitäten in diese Richtung werden von Leiterseite sehr begrüßt. Unser neu gestaltetes Schulhaus bietet mit seinen Lerninseln optimale Rahmenbedingungen und auch die Ressource des Teamteachings kann gut genutzt werden.

Bereits im Vorjahr arbeiteten wir im Rahmen des Vorgängerprojekts konsequent am Aufbau inhaltlicher Vorstellungen unter Minimierung von Regellernen. Daraus ergaben sich in Folge einige Probleme. Viele Eltern sehen in Regelerklärungen nach wie vor eine gute Möglichkeit, Kinder zu Erfolg zu führen. Dass dieser nicht von langer Dauer sein kann, wird oft nicht bedacht, da primär gute Schularbeitenergebnisse im Vordergrund zu stehen scheinen.

Schon Hasemann (1986) verdeutlichte, dass fehlerfreies Rechnen (prozedurales Wissen) nicht bedeutet, dass die Schüler auch die dazugehörigen Vorstellungen besitzen (konzeptuelles Wissen). Viele SchülerInnen weichen stattdessen auf ein pures Regellernen aus, womit – teilweise erfolgreich – die Rechenaufgaben im Unterricht bewältigt werden können. In Anwendungssituationen ist dieses Vorgehen allerdings meist zum Scheitern verurteilt.

Im heurigen Schuljahr möchten wir neben dem Aufbau inhaltlicher Vorstellungen auch die Kompetenzen unserer SchülerInnen im Erklären und Begründen schulen. Die Umsetzung erfolgt auf mündlicher Basis mittels Dialog durch geschickte Fragestellungen und Andocken an Vorwissen und auf

schriftlicher Basis durch Festhalten gewonnener Erkenntnisse im Übungsheft sowie bei Erklärungen im Rahmen von Hausübungen. Tabelle 1 zeigt die Verteilung der Schülerinnen und Schüler in den beiden beteiligten Klassen.

Tabelle 1: beteiligte Klassen

Schulstufe	Klasse	Anzahl Mädchen	Anzahl Buben	Gesamtanzahl SchülerInnen
6.	2a	9	9	18
6.	2b	9	11	20

1.5 Fachdidaktische Literatur

Die zugrundeliegenden Überlegungen, die Planung und Umsetzung dieses Projektes werden von fachdidaktischer Seite unter anderen durch Ausführungen in folgenden Artikeln bzw. Publikationen gestützt:

REISS, Kristina; HAMMER, Christoph (2013). Grundlagen der Mathematikdidaktik: Birkhäuser.

HECKMANN, Kirsten; PADBERG, Friedhelm (2012). Unterrichtsentwürfe Mathematik Sekundarstufe 1.: Springer.

SCOTT, Darell; MARZANO, Robert (2014). Awaken the Learner: Marzano Research Laboratory.

WIGGINS, Grant; MC TIGHE, Jay (2012). The Understanding by Design Guide to Advanced Concepts in Creating and Reviewing Units: Heinle Elt.

1.6 Maßnahmen

Im Lehrerinnenteam werden Inhaltsbereiche nach dem rückwärtigen Lerndesign (RLD) geplant. Der erste Schritt stellt dabei die Formulierung entsprechender Wissens-, Verstehens- und Tun-Könnensziele dar.

- Die *Wissensziele* geben den SchülerInnen Auskunft darüber, was zu lernen ist. Sie bilden sozusagen das Grundlagenwissen ab, eine Voraussetzung für das Verstehen von Zusammenhängen (= *Verstehensziele*).
- Die Kombination beider Zielarten führt zu Kompetenz, dargelegt in Form der „*Tun-Können-Ziele*“. In diesen findet man auch die Synergien zu weiteren Lerninhalten und zu Anwendungswissen verschiedener Berufsgruppen.

Kompetenzen umfassen Wissen und Können, aber eben auch die Fähigkeit und die Bereitschaft, diese flexibel und erfolgreich einzusetzen. Insoweit hat der Kompetenzbegriff viel mit allgemeiner Problemlösefähigkeit zu tun (Weinert 2001).

Erfahrungsgemäß ist eine Selbsterarbeitung mathematischer Inhalte durch entsprechende Aufbereitung möglich. Vor allem begabte SchülerInenn zeichnen sich dabei durch hohe Eigenständigkeit aus (vgl. Weinert 2001). Das ermöglicht eine intensivere Unterstützung einzelner SchülerInnen mit erhöhtem Förderbedarf.

Auch Transferleistungen und Verschriftlichungen stellen viele SchülerInnen vor Probleme. Aufgaben, die dem Vorstellungsbereich entsprechen, werden von einem Großteil der SchülerInnen gelöst. Gleiche mathematische Handlungen mit größeren Zahlen gelingen oft nicht mehr, auch wenn Zusammenhänge zuvor selbst entdeckt wurden. Der Aufbau dieser Kompetenz nimmt viel Zeit in Anspruch. Auch SchülerInnen müssen sich in Geduld üben. Rasches Aufgeben ist dem Lernprozess abträglich, und das nicht nur in der Schule.

Maßnahmenkatalog:

1) Bei der Vorbereitung der Lernumgebung wird darauf geachtet, dass die SchülerInnen an ihr Vorwissen andocken können und sich Wissensinhalte schrittweise konstruieren. Es werden dabei keine Regeln oder Merksätze vorgegeben.
2) Um die Vorstellungsfähigkeit zu schulen, werden im Anschluss an den Lernprozess Lernkarten mit bildlichen Darstellungen zur Festigung inhaltlicher Vorstellungen zur Verfügung gestellt. Anhand dieser lässt sich mathematische Erklärungskompetenz gut schulen.
3) Im Rahmen der Erarbeitungen werden häufig Erklärungen eingefordert.
4) Die Handlungsbereichen Argumentieren und Begründen sowie Interpretieren werden verstärkt auch in Leistungsaufgaben eingebaut.
5) Wie schon im Vorjahr wird auf das Verständnis der „Werkzeuge der Mathematik“ großer Wert gelegt (Unterscheidung zwischen Größen, Vorgängen, Multiplizieren, Erweitern, Teilen, Messen und Kürzen) um den Einsatz anhand entsprechender Aufgabenstellungen begründen zu können.
6) Grundlegende Lerninhalte werden, wenn möglich, miteinander vernetzt.
7) Einmal pro Woche werden die erarbeiteten Lerninhalte zuhause erklärt und aufgenommen.

1.7 Geplanter Projektablaufplan

Inhaltsbereich Zahlen und Maße

1. Wiederholung der Bedeutung von Zahlen (stehen für Größen/Mengen/Vorgänge) und der Bedeutung der „Werkzeuge der Mathematik“ (=Grundrechenarten) und deren Rolle beim Erweitern und Kürzen von Brüchen.
2. Wiederholung verschiedener Darstellungen (Stellenwertsystem, Größen)
3. Anwendung (Festigung) dieser Kompetenzen und allgemein gültiger Gesetzmäßigkeiten im Bereich der positiven rationalen Zahlen, und zwar Kommutativgesetz, Assoziativgesetz und Distributivgesetz sowie Vorrangregeln
4. Übertrag der Kompetenz des Erweiterns auf die Bruchformen
5. Anwendung des „Gesetzes der Addition/Subtraktion“ und der Kompetenz des Erweiterns bei der Lösung von Additionen/Subtraktionen in Bruchform
6. Multiplikation (in Bruchform in Zusammenhang mit Teilen, Anwendung der Bedeutung des Bruchstrichs und daraus resultierend die Multiplikation mit dem Kehrwert $: 2 \cdot = \cdot \frac{1}{2}$)

7. Übertragen des Teilens (einen Teil berechnen – Einheit(en) bleiben) und Messens (Wie oft passt der Divisor in den Dividenden- Einheiten fallen (kürzen) sich weg) auf das Rechnen in Bruchform.

<u>Inhaltsbereich Geometrische Figuren und Körper</u>

1. Winkel als Maß für eine Drehung
2. Bedeutung des rechten Winkels
3. Besondere Winkel, Winkelsumme in Dreiecken, Vierecken
4. Kreiseigenschaft als Voraussetzung der Konstruktion von Strecken/Winkelsymmetralen, SSS-Satz bei Konstruktion von Dreiecken
5. Dreiecke – Eigenschaften – Einteilung - selbständige Konstruktion (SSS, SWS, SSW) und Ermittlung der Euler`schen Gerade mit Hilfe der zuvor erworbenen Kompetenzen.

<u>Inhaltsbereich Variable, funktionale Abhängigkeiten</u>

1. Kartesisches Koordinatensystem als Grundlage für die Darstellung von Grafen
2. Proportionen (Anwendung der Werkzeuge: Division (Teilen) und Multiplikation)
3. Prozente (Anwendung der Werkzeuge Teilen und Multiplikation (Prozentwert/Grundwert), sowie Messen (Prozentsatz = Bruchform in Hundertstel).

Die genannten Inhalte sind in den folgenden Tabelle 2 und 3 noch einmal zusammengefasst.

Tabelle 2: Inhaltsbereiche Zahlen und Maße sowie funktionale Zusammenhänge

Inhaltsbereiche: Zahlen und Maße – funktionale Zusammenhänge				
„Werkzeuge der Mathematik“				
Addition/Subtraktion	Multiplikation (Werkzeug für Erweitern)		Division (Werkzeug für Kürzen) Bedeutung des Bruchstrichs	
Gesetz: nur gleiche Größen (Variablen, Brüche)	Größe · Vorgang <u>Kurzform:</u> G·V	(ein Teil einer) Größe · Größe xG·yG (gleiche Größen) G1/G2 · G2	Teilen (ein Teil einer Größe berechnen) <u>Kurzform:</u> G1/G2 (2 Größen) G/Teile (1 Größe)	Messen <u>Kurzform:</u> xG/yG
Bruchformen addieren/subtrahieren Umfangsberechnungen	Bruchformen multiplizieren (Division als Multiplikation mit dem Kehrwert) Anteile von Größen berech-	Flächeninhalts-Berechnungen Direkte und indirekte Proportionalität	Anteile von Größen berechnen (Multiplikation als Division mit dem Kehrwert) Direkte und indirekte Proportionalität	Bruchformen dividieren in Messaufgaben

	nen Berechnung von Prozentwert und Grundwert		Prozentwert berechnen Grundwert berechnen	Prozentsatz berechnen

Tabelle 3: Inhaltsgebiet: Geometrische Figuren und Körper

Inhaltsgebiet: Geometrische Figuren und Körper	
Winkel	„Kreiseigenschaft“: Bedeutung für die
• als Maß für eine Drehung • Winkelmessen • Besondere Bedeutung des rechten Winkels für: • Eigenschaften der Streckensymmetrale • Eigenschaften von Seiten und Diagonalen besonderer Vierecke • Berechnung von Flächeninhalten	• Konstruktion von Streckensymmetralen (gleich weit entfernt von Punkten, Orten) • Konstruktion der Winkelsymmetralen (gleich weit entfernt von Strecken, Straßen) • Konstruktion von Dreiecken und Vierecken

1.8 Geplanter Kompetenzkatalog

Tabelle 4: Kompetenzkatalog

1. Gewählter **fachlicher Inhalt** und **Kontext**, um den genannten Kompetenzbereich (die genannten Bereiche) zu fördern;	Menge der positiven rationalen Zahlen und Maße (Rechnen in Bruchform, Anteile von Größen berechnen); Funktionale Zusammenhänge (direkte und indirekte Proportionalität, Prozentrechnung).
2. Geplante **Handlungen** von Seiten der Schülerinnen und Schüler:	Lösungswege selbständig finden und erklären; Transfer zu komplexeren Aufgaben oder wenig vertrauten Zahlen herstellen; verschiedene Darstellungen in Verbindung bringen, Argumentieren, Begründen, Interpretieren.
3. Mögliche **Herausforderungen** beim Lernen (Lernschwierigkeiten):	Übersetzungsprobleme: Mangelnde Vorstellungskraft; Sprachdefizite, Motivation, fehlende Mitarbeit der Eltern.
4. **Vorhandenes Wissen und Können** (auch Alltagserfahrungen) bzw. mögliche (Fehl-) **Vorstellungen**, von denen wir ausgehen bzw. mit denen eventuell zu rechnen ist:	Bezug zu Aufgabenstellungen herstellen- richtiger Einsatz der Rechenwerkzeuge. Fehlende Konzepte und Vorstellungen werden zum Problem im Bereich der rationalen Zahlen: Division zweier Zahlen liefert stets einen Wert, der kleiner als der Zähler ist, Multiplikation einer Größe führt immer zu größerem Wert, ..

5. Gründe für unsere Wahl der Unterrichts- und **Lernschritte** und für das geplante Vorgehen:	Konzept des RLD soll die Bedeutung der Inhalte für das weitere Leben offen legen, Wissensziele legen Grundstein für gezieltes Lernen, Zusammenhänge sollen verstanden werden, um zur Kompetenz zu gelangen; wissenschaftliche Erkenntnisse im Bereich der selbständigen Wissenskonstruktion, Lehrplanforderung.
6. Mit welchen **Aufgabenstellungen** wollen wir feststellen, ob meine SchülerInnen die erwarteten Kompetenzen erworben haben? Welche Lösungsvorschläge sind zu erwarten?	Aufgaben, die selbständiges Entdecken des Lösungswegs ermöglichen und verschiedene Deutungen zulassen: Lernumgebungen zur Kompetenzentwicklung und Steuerung von Lernprozessen Aufgaben, die Transferleistungen zeigen.

2 DURCHFÜHRUNG

2.1 Beschreibung der Umsetzung

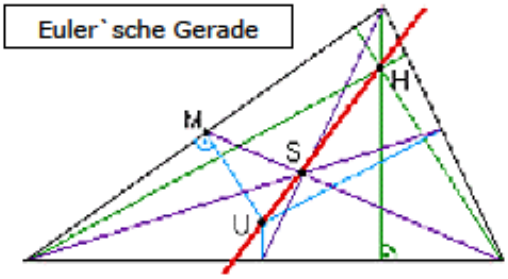
Die Durchführung des Projekts gestaltete sich für uns sehr interessant und war äußerst lehrreich. Einige Stolpersteine waren unsere Wegbegleiter. Damit hatten wir nicht gerechnet …..

Im Zuge des Klassenforums informierten wir die Eltern über unser Vorhaben. Der Gesamteindruck, den ich vermittelt bekam, war durchaus positiv und motivierte sehr zum Weitermachen. Die Eltern teilten unsere Anliegen in Bezug auf einen verständnisorientierten Mathematikunterricht nach neuen wissenschaftlichen Erkenntnissen. Einige von ihnen erklärten sich gerne bereit, Erklärungsversuche ihrer Schützlinge aufzuzeichnen. Dieses Vorhaben scheiterte letztlich nicht nur an der Technik (das Herunterladen der Videos sprengte eindeutig den dafür eingeplanten zeitlichen Rahmen), sondern auch am Perfektionsstreben mancher Eltern. Die Aufnahmen wurden oft unterbrochen, einzelne Passagen wanderten in eine Endlosschleife an Wiederholungen, bis sie endlich den Elternvorstellungen entsprachen. Die ganze Angelegenheit wurde zur Zerreißprobe und belastete die Familiensituation derart, dass der Motivationspegel der SchülerInnen auch im Unterricht auf den Nullpunkt sank. Die Einsicht, dass Lernprozesse langwierig sein können, nicht linear verlaufen und von Fehlern begleitet sein müssen, war nicht gegeben. Das hätte im Vorfeld von unserer Seite geklärt werden müssen. Eine wichtige Erkenntnis, die leider etwas spät bei uns eintraf. Wir entlasteten Eltern und SchülerInnen und entwarfen Erklärungskärtchen, mit deren Hilfe die SchülerInnen sich gegenseitig ihr Wissen präsentierten. Das machte weitaus mehr Spaß und kam meist zu Beginn einer Arbeitseinheit zum Einsatz. Damit bekamen wir immer wieder gute Einblicke in das Vorwissen unserer SchülerInnen und schulten ihre Vorstellungskraft. Auch die von uns entwickelten Lernkarten wurden zur Unterstützung inhaltlicher Vorstellungen und Hilfestellung für mathematische Erklärungen herangezogen. Die Arbeit nach den Arbeitsplänen lief recht gut, die Proportionalitäten nahmen aber weitaus mehr Zeit in Anspruch, als geplant. Wir mussten manchen unserer SchülerInnen gerade in diesem Bereich verstärkt zusätzliches Arbeitsmaterial anbieten und die Zahl der gemeinsamen Besprechungen erhöhen. Gesamt gesehen bedarf eine intensive und eigenständige Auseinandersetzung mit Lerninhalten, die zu tiefergreifendem Verständnis führen soll, eines wesentlich größeren Zeitrahmens als zur Verfügung steht. Bei kontinuierlicher Einforderung von Verschriftlichung schraubt sich dieser nochmals in die Höhe. Insofern mussten wir immer wieder nach Ausgleichslösungen suchen, nicht zuletzt, weil (leider) zu festgesetzten Terminen Schularbeiten geschrieben werden müssen und die Kluft zu den Nachbarsklassen trotz Projektrahmens nicht zu groß werden darf. Wir nahmen Erklärungsaufgaben für Eltern schließlich zu einem späteren Zeitpunkt wieder in unser Programm auf, ließen diese von den SchülerInnen verschriftlichen und von Eltern unterschreiben. Wie sehr die Eltern auch hier die Arbeit beeinflussten, kann nicht eruiert werden. Zumindest lief es diesmal deutlich besser. Manche SchülerInnen versuchten sich aber immer wieder, gerade diesen Aufgaben zu entziehen.

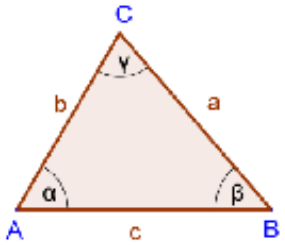
2.2 Beschreibung einer Lernaufgabe

Leisen (2013) definiert Lernaufgabe „als Lernumgebung zur Kompetenzentwicklung“, die den Lernprozess durch eine Folge von gestuften Aufgabenstellungen mit entsprechenden Lernmaterialien steuert. Im Folgenden ist die Aufbereitung von Lernumgebungen mit den Zielen nach dem RLD dargestellt.

Euler`sche Gerade

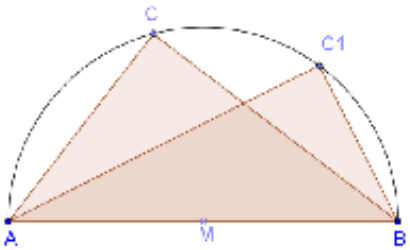


Lerndesign: Dreiecke

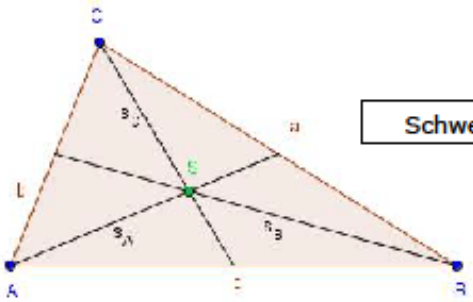


	Das weiß ich und kann beschreiben		Das verstehe ich und kann erklären		Das kann ich tun
W1	Winkel: - messen - zeichnen - Einteilung der Winkel - Normalabstand	V1	wo alle Punkte liegen, die von einem Punkt den gleichen Abstand haben	T1	Dreiecke konstruieren bei Angabe von (S=Seite, W=Winkel) - SSS - SWS - WSW - SSW
W2	Einteilung von Dreiecken nach Seiten und Winkeln in - ungleichseitige - gleichschenklige - gleichseitige - spitzwinkelige - rechtwinkelige - stumpfwinkelige	V2	wie man Strecken- und Winkelsymmetralen konstruiert	T2	Dreieckskonstruktionen entwerfen
W3	Beschriftung der Dreiecke (Eckpunkte, Seiten)	V3	welche Bedingungen Seiten erfüllen müssen, damit man Dreiecke konstruieren kann	T3	Inkreis, Umkreis und Höhenschnittpunkt konstruieren (Euler´sche Gerade)
W4	Schwerlinien	V4	Normalabstand – Höhen im Dreieck	*T4*	*Flächenformeln entwickeln*
W5	welche besonderen Dreiecke in Halbkreisen (Thaleskreis) entstehen, wenn eine Seite der Durchmesser ist	V5	wie groß die Summe der Innenwinkel in Dreiecken ist	*T5*	*rechte Winkel mit Hilfe von Dreiecken bestimmen („Lehrsatz des Pythagoras)*
W6	den Begriff „Kongruenz" (kongruente Dreiecke)	V6	Die maximale Winkelgröße in einem Dreieck	T6	Flächen von zusammengesetzten Figuren berechnen

Das Wissen brauchst du:
Beim Hausbau, Einrichten, in vielen Berufen: TischlerIn, ZimmermannIn, FliesenlegerIn MaturantIn, bei vielen Studien, ..



Thales von Milet



Schwerlinien

Abbildung 1: Lernaufgabe

Arbeitsplan: „Wir erforschen Eigenschaften von Dreiecken"

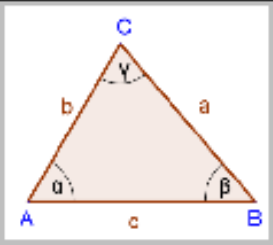
W1 – W2 V1, V2,

Legt die Erklärungskärtchen auf den Tisch:

- Zieht abwechselnd ein Kärtchen und erklärt euren Teampartnern/innen!
- Wenn du ein Kärtchen mit einem Dreieck ziehst ordne es der Tabelle richtig zu
- Übertrage die Tabelle in dein Heft

W 3

Hier siehst du ein richtig beschriftetes Dreieck!



Entscheide dich für die richtigen Angaben oder vervollständige die Sätze!

Die Eckpunkte werden a) im Uhrzeigersinn b) gegen den Uhrzeigersinn beschriftet.
Die Seiten liegen immer .....
Winkel α liegt bei Eckpunkt ....., β bei ..... , γ bei .....

Auf Fehlersuche:

Hole die Abbildungen und klebe sie auf ein Blatt! Finde die zwei falsch beschrifteten Dreiecke! Erkläre, was falsch beschriftet ist!

V3

Seiten im Dreieck

Welche Bedingungen müssen Seiten für Dreiecke erfüllen?

- Schneidet jeweils drei Strohhalme mit folgender Länge ab! 2cm, 4 cm, 6 cm, 8 cm, und 10 cm Länge

a) Stellt ein Dreieck aus drei Strohhalmen dar und notiert euch die Seitenlängen!
b) Stellt mehrere mögliche Dreiecke her und notiert euch die Seitenlängen!
c) Findet alle Möglichkeiten heraus!
d) Begründet, weshalb ihr alle gefunden habt!
e) Warum kann man nicht mit allen Längen Dreiecke bauen? Welche Bedingungen müssen Seiten erfüllen?

Ergänze jeweils mögliche und eine mögliche Längen für die fehlende Seite:

a = 5cm b= 7 cm		c = 12 cm b = 8 cm	
mögliche Längen	nicht mögliche Längen	mögliche Längen	nicht mögliche Längen
c =	c =	a =	a =

V4

Normalabstand - Höhen im Dreieck

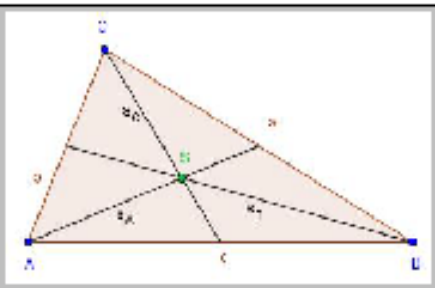
Die Höhe eines Dreiecks ist die kürzeste Verbindung der Seite zum gegenüberliegenden Eckpunkt.

Zeichne ein Dreieck!
Beschrifte es!
Zeichne die drei Höhen ha, hb und hc ein!

W4

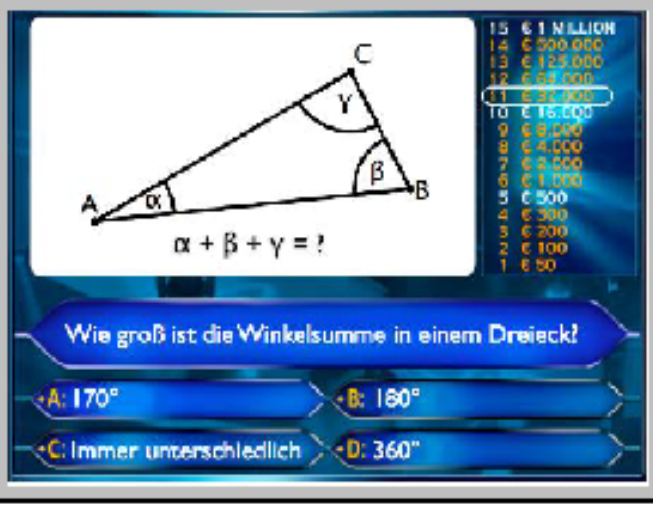
<u>Schwerlinien im Dreieck</u>

Zeichne ein Dreieck auf einen Karton!
Suche jeweils den Mittelpunkt jeder Seite!
Verbinde ihn mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt!
Die Linien heißten Schwerlinien!
Der Schnittpunkt ist der Schwerpunkt!
Schneide das Dreieck aus!
Balanciere es im Schwerpunkt!



V5

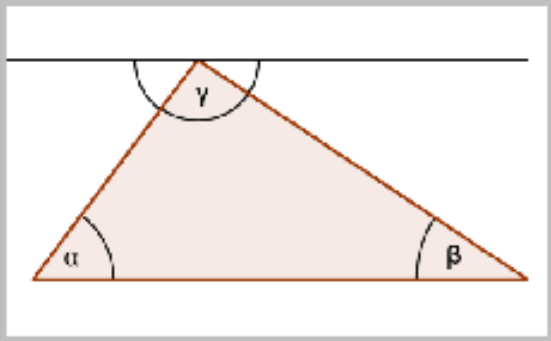
Winkel im Dreieck



V5

Anhand welcher Darstellung findest du die Antwort auf diese Frage?

Zeichne ein Dreieck und schneide es aus!
Reiß die Ecken ab!
Lege die Ecken so aneinander, dass du eine Beobachtung machen kannst, die dir bei der Beantwortung der Quizfrage hilft!
Trifft die Beobachtung auf alle Dreiecke zu? Begründe!



V6

Lege mit Strohhalmen verschiedene stumpfwinkelige Dreiecke! Was kann der größte stumpfe Winkel in einem Dreieck sein? Begründe deine Antwort!

Entstehen mit diesen Angaben Dreiecke?

a) c= 5cm $\alpha = 90°$, $\beta = 90°$	b) c= 5cm $\alpha = 90°$, $\beta = 30°$	b) c= 5cm $\alpha = 100°$, $\beta = 90°$

Ändere nicht passende Winkel !

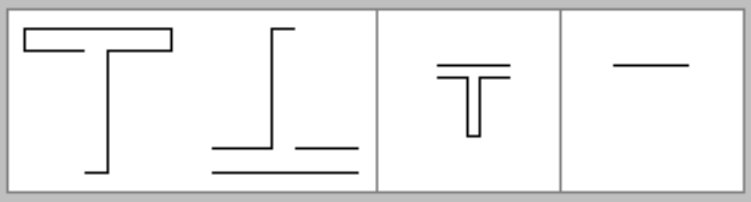
W5

Dreiecke im Halbkreis

1) Zeichne eine Strecke in dein Heft und beschrifte die Eckpunkte! Diese Strecke stellt eine Seite des Dreiecks dar!
2) Suche die Mitte!
3) Stich mit dem Zirkel in den Mittelpunkt ein und zeichne einen Halbkreis!
4) Verbinde verschiedene Punkte des Halbkreises mit den Eckpunkten A und B, dass Dreiecke entstehen!
5) Welche besonderen Dreiecke entstehen?

W6

Erklärung für Kongruenz (Wikipedia)



Die ersten beiden Figuren sind kongruent. Die dritte hat zwar die gleiche Form, ist aber kleiner. Sie ist daher ähnlich der ersten und zweiten Figur, aber nicht kongruent. Die letzte Figur hat nicht die gleiche Form, und ist somit weder ähnlich noch kongruent zu den T-förmigen Figuren.

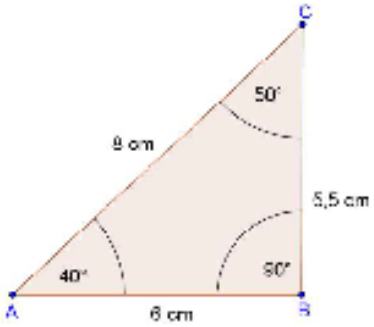
- Schneide die Dreiecke von Arbeitsblatt 1 aus und suche alle kongruenten!
- Gestalte damit eine Seite und erkläre Kongruenz mit eigenen Worten !

T1

Dreieckskonstruktionen:

Ich weiß, wie viele Angaben ich benötige, um Dreiecke konstruieren zu können.

Bei einem Dreieck gibt es sechs Angaben – drei Längen und drei Winkel. Mit wie vielen Angaben und welchen Kombinationen kann man das Dreieck oben rechts konstruieren?



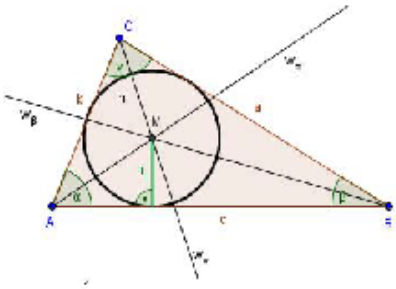
T2

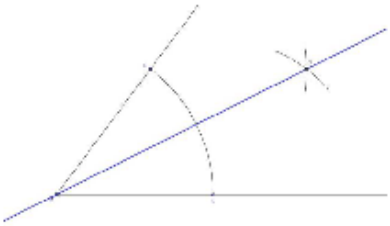
Finde Möglichkeiten für die Konstruktion! Diktiere sie deinem/r Lernpartner/in! Überprüfe, ob er/sie richtig konstruiert hat!

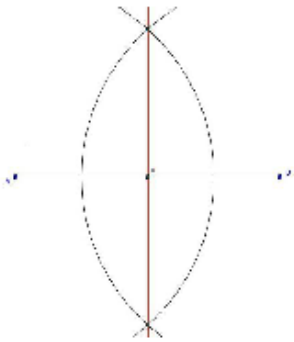
3 mögliche Angaben		
SSS Gib drei mögliche Seiten an!	WSW Gib eine Seite und zwei mögliche Winkel an!	SWS Gib zwei Seiten und einen möglichen eingeschlossenen Winkel an.

Lerndesign: Gleich weit weg von Punkten (Orten) und Seiten (Strahlen, Geraden, Straßen, ...)

	Das weiß ich und kann beschreiben		Das verstehe ich und kann erklären		Das kann ich tun
W1	die Begriffe Gerade, Strahl und Strecke	V1	warum Symmetralen auch „Halbierende" genannt werden	T1	Punkte (Orte) finden, die von 2 Orten exakt den gleichen Abstand haben
W2	wie Linien und Punkte in der Mathematik beschriftet werden	V2	wo alle Punkte liegen, die von einem gegebenen Punkt den gleichen Abstand haben	T2	Inkreis – und Umkreismittelpunkt von Dreiecken ermitteln
W3	Begriffe: „Normale", „Abstand", „Normalabstand"	V3	wie ich Punkte finde, die von 2 gegebenen Punkten den gleichen Abstand haben	T3	Dreiecke und Vierecke konstruieren
W4	wann Strecken Seiten heißen	V4	wie ich aus diesen Punkten die Strecken- oder Seitensymmetrale ermitteln kann		
W5	einen Winkel und seine Bezeichnung	V5	Konstruktion von Streckensymmetralen		
W5	Begriff: symmetrisch – Symmetrale	V6	Konstruktion von Seitensymmetralen		
W6	Eigenschaften der Streckensymmetrale	V7	Konstruktion von Winkelsymmetralen		
W7	Eigenschaften der Winkelsymmetrale				
W8	Definition des Kreises (Radius – Durchmesser d)				







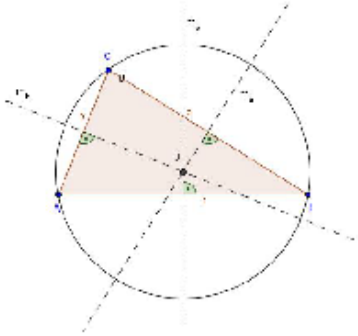


Abbildung 2: weitere Lernaufgaben und Arbeitspläne

2.3 Verbreitung und Vernetzung

Ja, in Form von regionalen Lehrerfortbildungen.

Möglichkeiten individueller Differenzierung

Eine gute Möglichkeit der Differenzierung bieten nach Storz (2014) die im Folgenden angeführten Aufgabenstellungen, welche im Rahmen des Arbeitsprogramms „Proportionalitäten“ zum Einsatz kamen. Durch die Einteilung der Arbeitsaufträge in:

a) Ich finde einen Wert.
b) Ich finde mehrere Werte.
c) Ich finde alle Werte.
d) Ich kann erklären, warum ich alle Werte finde

lassen sich Kompetenzen unterschiedlicher Komplexität schulen:

Teilaufgabe a) und b) - Reproduzieren (Komplexität 1) Teilaufgabe c) - Komplexität 2, weil hier müssen Zusammenhänge hergestellt werden und Teilaufgabe d) Verallgemeinern und Reflektieren, daher Komplexität 3.

„Wie viele y- Werte (=Preise) finde ich?“ „Wie finde ich sie?“

- Ich kann eine Wertepaar (x/y) eintragen.
- Ich finde mehrere Wertepaare.
- Ich finde alle Wertepaare.
- Ich kann begründen, warum ich alle Wertepaare finde: y = _____ x

Angabe:	
x	y
	€
So berechne ich den	
Preis y = ___ x	

Angabe:	
x	y
	€
So berechne ich den	
Preis y = ___ x	

Angabe:	
x	y
	€
So berechne ich den	
Preis y = ___ x	

3 ERGEBNISSE (EVALUATION)

3.1 Beschreibung einer Leistungsaufgabe

Zu einem einsichtsvollen Lernen gehört nach Padberg (2012) auch das Reflektieren über mathematische Prozesse und dabei insbesondere deren Bewertung. Diese bezieht sich vor allem auf den Wert der vermittelten Erkenntnis und den Nutzen im Hinblick auf Anwendungen. Dies ist recht anspruchsvoll, da auf einer Meta-Ebene über Mathematik geredet wird. Aufgaben, die hierauf abzielen, sind daher meist dem Anforderungsbereich III zuzuordnen.

Manchmal lassen sich aus unterschiedlichen Lösungskonzepten („Vergleiche die gegebenen Lösungswege miteinander. Worin unterscheiden sich die Argumentationen?“) oder auch aus Fehlern („Stelle fest, wer die Aufgabe richtig gelöst hat, und gib denjenigen, die Fehler gemacht haben, Tipps, wie sie es besser machen können!“) gute Lern- und Leistungsaufgaben erstellen. Im Zuge der Erarbeitung von „Divisionen in Bruchform“ entwickelte einer unserer Schüler einen alternativen Lösungsweg, indem er das bei der Division in Dezimalform erarbeitete Konzept auf die Bruchform übertrug. Dadurch erhielten wir drei unterschiedliche Zugänge zur Division (eine über das Teilen, zwei über das Messen), über die wir unsere SchülerInnen nachdenken ließen.

Kinder erklären: **„Wie löst man Divisionen in Bruchform?"**

Vergleiche die gegebenen Lösungswege miteinander. Worin unterscheiden sich die Argumentationen?

Philipp: Ich löse durch Messen. Ich schaue, wie oft der Divisor im Dividenden enthalten ist!

Zum Beispiel ist $\frac{1}{8}l$ in einem Liter 8-mal enthalten, oder in einem halben Liter 4-mal. Das kann ich als Division anschreiben:

$1l : \frac{1}{8}l = 8$ oder $\frac{1}{2}l : \frac{1}{8}l = 4$

Sebastian: „Wenn ich zum Beispiel die Hälfte einer Größe berechne, kann ich dies über Division : 2 (ich nehme die Hälfte) oder über Multiplikation $\cdot \frac{1}{2}$ (Ich nehme ein halbes Mal) tun.

Weil Multiplikation und Division zusammenhängen, löse ich Divisionen in Bruchform immer über die Multiplikation. Da rechne ich dann Zähler · Zähler und Nenner · Nenner. So kann ich jede auch noch so schwierige Division ohne viel Nachdenken lösen. Ich lasse die Größe (erste Zahl) gleich, nehme statt des : ein · und bilde den Kehrwert der 2. Bruchzahl, indem ich Zähler und Nenner vertausche. Habe ich keinen Nenner, so denke ich mir die Zahl 1 (Eintel=stehen für Einer).

$6 : \frac{1}{3} = \frac{6}{1} \cdot \frac{3}{1} = 9$ *oder* $\frac{1}{3} : \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{1} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

Lorenz: „ Ich mache die Nenner gleichnamig und löse die Aufgabe über das Messen. Ich wende einfach das, was wir über Dezimalbrüche gelernt haben auf andere Bruchformen an:

$\frac{8}{10} : \frac{2}{10} = 4$, weil $\frac{2}{10}$ in $\frac{8}{10}$ 4 mal enthalten sind. 8 : 2 ist die gleiche Rechnung und die ist einfach! Man nimmt sie ja auch statt 0,8 : 0,2 !

Wenn ich eine kompliziertere Aufgabe lösen muss, z.B. $\frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ mache ich die Nenner gleichnamig:

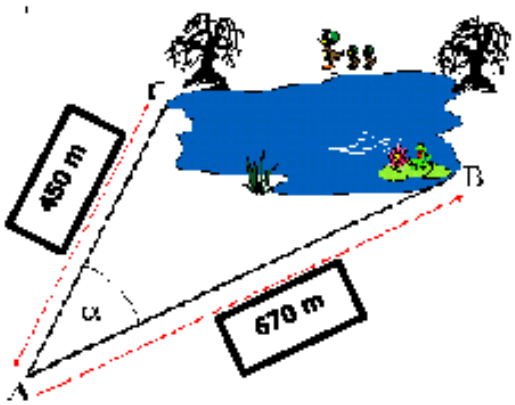
$\frac{1}{3} : \frac{1}{4} = \frac{4}{12} : \frac{3}{12} = 4 : 3 = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ $\frac{3}{12}$ sind in $\frac{4}{12}$ $\frac{4}{3}$ mal enthalten.

Welche der drei Lösungswege ist für dich die einfachste? Begründe! Finde selbst Beispiele und löse sie auf verschiedene Arten!

Abbildung 3: Kinder erklären ihre Lösungswege

Nach einer intensiven Auseinandersetzung mit der Materie wurden den Lernenden immer wieder Gelegenheiten geboten, ihr Wissen und Können zu überprüfen und die eigenen Kompetenzen mit den geforderten zu vergleichen. Im Folgenden sind einige Leistungsaufgaben angeführt, welche zu diesem Zweck konzipiert wurden.

Thomas prahlt: Ich bin im Sommer 1,2km geschwommen. Wie kannst du ihm beweisen, dass er nicht recht hat?

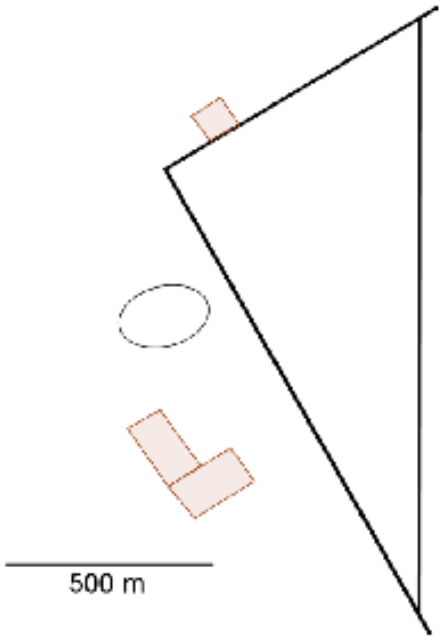


Quelle: Leuders/Prediger/Barzel/Hußmann: mathewerkstatt 7

Gleich weit weg von Straßen

Frösche und Kröten benötigen zum Laichen ein Gewässer. Wenn sie auf Dem Weg zu ihrem Laichgewässer eine Straße überqueren, werden die Tiere oft von Autos überfahren. Ein wirksamer Schutz für Kröten und Frösche besteht darin, für sie einen Teich anzulegen. Der Teich sollte möglichst wie von den Straßen entfernt sein, mindestens 250 m von jeder Straße.

An welchem Punkt ist die Kröte gleich weit entfernt von allen Straßen? Ist es möglich die Bedingung einzuhalten? Um das herauszufinden übertrage den Plan maßstabsgetreu auf ein Blatt !



3. Wichtige Begriffe in der Geometrie

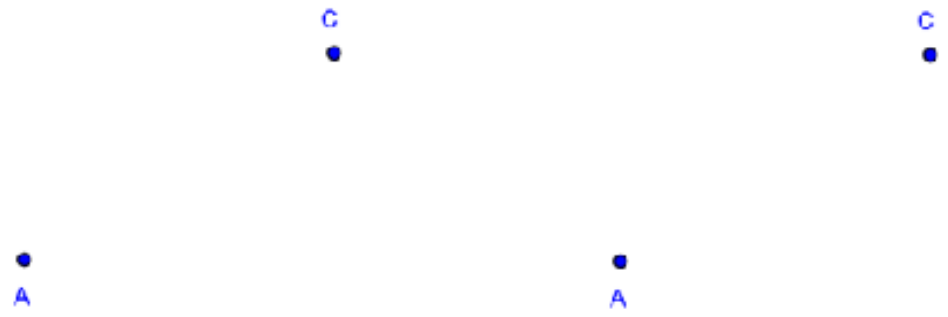
3.1. Wer bin ich? Ordne den Beschreibungen die richtigen Begriffe zu! Trage dazu den entsprechenden Buchstaben in die graue Spalte ein!

a	Auf mir befinden sich alle Punkte, die von einem Punkt gleich weit entfernt sind.		Schwerlinie
b	Um mich zu zeichnen, brauchst du dein Geodreieck: Ich bin die kürzeste Verbindung eines Eckpunkts zur gegenüberliegenden Seite eines Dreiecks.		Winkelsymmetrale
c	Ich bin eine Strecke im Dreieck und gehe von der Mitte einer Seite zum gegenüberliegenden Eckpunkt.		Normalabstand
d	Auf mir befinden sich alle Punkte, die von 2 Seiten (Strahlen) den gleichen Normalabstand haben.		Höhe
e	Ich bin der kürzeste Abstand eines Punktes zu einer Geraden (Strecke).		Kreislinie
f	Auf mir liegen alle Punkte, die von 2 Punkten den gleichen Abstand haben.		Streckensymmetrale

3.2 Ist die Aussage richtig oder falsch? Kreuze an!

Es gibt unendlich viele Punkte, die ...	richtig	falsch
... von einem Punkt den gleichen Abstand haben.		
.... von 2 Punkten gleichen Abstand haben.		
..... von 3 Punkten gleichen Abstand haben.		
.... von 2 Seiten gleichen Normalabstand haben.		
.... von 3 Seiten gleichen Normalabstand haben.		

Streckensymmetralen kann man zeichnen oder konstruieren. Zeichne oder konstruiere die Streckensymmetrale auf zwei verschieden Arten! Finde für jede Art einen Vorteil!



Vorteil	Vorteil

Abbildung 4: Leistungsaufgaben

3.2 Daten

Unterrichtsbeobachtungen

Während der Erarbeitungsphasen wurden die SchülerInnen immer wieder aufgefordert, ihre Rechenwege zu erklären, Ergebnisse zu interpretieren und mit bildhaften Vorstellungen zu versehen.

Dabei fiel auf, dass auf Seiten lernschwacher SchülerInnen typische, auf falschen Denkstrategien beruhende Fehler, wie in Kapitel 1 unter „Ziele“ näher erläutert, tendenziell abnahmen. Durch häufiges Hinterfragen scheinen Denkkonzepte zu einem gewissen Ausmaß positiv beeinflussbar. SchülerInnen begannen offensichtlich verstärkt über ihr Vorgehen nachzudenken und ließen unreflektierte Lösungswege häufiger weg. Im Dialog lässt sich erkennen, dass auch lernschwache SchülerInnen Tiefenstrukturen ausgebildet haben, auch wenn die Lösung neuartiger Aufgabenstellungen noch nicht gelingt.

Bei den Lernaufgaben zur Proportionalität entwickelten einige SchülerInnen alternative Schreibweisen für Angaben wie 1,2€/200g und leiteten daraus weitere Werte ab, z.B. 2,4€/400g. Dabei fielen wie selbstverständlich die Begriffe Erweitern und Kürzen. Nach Ersatz des „Bruchstrichs“ durch das Divisionszeichen konnte schließlich ein Teil berechnet werden. Die SchülerInnen erkannten, dass dies der Schlüssel zum Erfolg für das Finden aller y-Werte ist und legten damit den Grundstein für das spätere Verständnis von Funktionen der Form $y = k \cdot x$.

Manche SchülerInnen kamen bei Aufgaben zur direkten Proportionalität über das Messen zu richtigen Ergebnissen, eine Methode die bei Proportionsgleichungen zum Einsatz kommt.

Einige SchülerInnen verfügen für ihr Alter bereits über einen sehr hohen Vernetzungsgrad. Es fällt ihnen leicht, Anteile von Größen auf verschiedene Arten zu berechnen. Sie können dieses Wissen bei der Berechnung des Prozentwerts gezielt einsetzen. Durch überlegten Einsatz der Werkzeuge Division (bewusstes Unterscheiden von Teilen bzw. Messen) und Multiplikation konnten wir auf Hilfsmittel wie Tabellen oder Schlüsse verzichten und dadurch eine höhere Flexibilität im Denken unserer SchülerInnen erwirken. Die Formeln zur Berechnung von Prozentwert, Grundwert und Prozentsatz wurden von sehr vielen eigenständig entwickelt.

Wie unterschiedlich das Denken einzelner SchülerInnen ausgeprägt ist, lässt sich anhand des unten angeführten Beispiels zeigen, das auf unterschiedliche Arten gelöst wurde (siehe Tabelle 5):

Aufgabenstellung: Drei Freunde teilen sich die Kosten von 70€ für einen Ausflug. Franz zahlt die Hälfte, Florian bezahlt 20% und Ferdinand den Rest. Wie viel zahlt jeder der Freunde?

Tabelle 5: unterschiedliche Lösungswege

Lösung 1:	**Lösung 2:**	**Lösung 3:**
70€ : 2 = 35€ oder 70€:100·50		
70€ : 100 · 20 = 0,7€ . 20 = 14€	70€ · 0,5 = 35€	70€ · 0,3 = 21€
35€ + 14 € = 49€	70€ · 0,2 = 14€	
70€ - 49€ = 21€	35€ + 14 € = 49€	
	70€ - 49€ = 21€	

Beispiele für gute Erklärungen mathematischer Sachverhalte im Rahmen der Hausübungen:

Direkte & Indirekte Proportionalität

Bei der direkten, genauso wie bei der indirekten Proportionalität gibt es einen gleichbleibenden Wert:

Direkt

3 Zuckerl/Kind · 2 (3, 4, 5, ...) Kinder

gleichbleibender Wert — sich verändernter Wert

Es gibt keinen größten Wert.
(Theoretisch) habe ich unendlich viele Zuckerl, und egal wie viel Kinder ich habe, jedes bekommt 3 Zuckerln

Indirekt

12 Zuckerl : 3 (4, 5, 6 ...) Kinder

gleichbleibender Wert — sich veränderter Wert

Es gibt einen größten Wert. Der größte Wert bleibt immer gleich, egal auf wie viele Kinder ich ihn aufteile.

U: Leitenbauer Gottfried

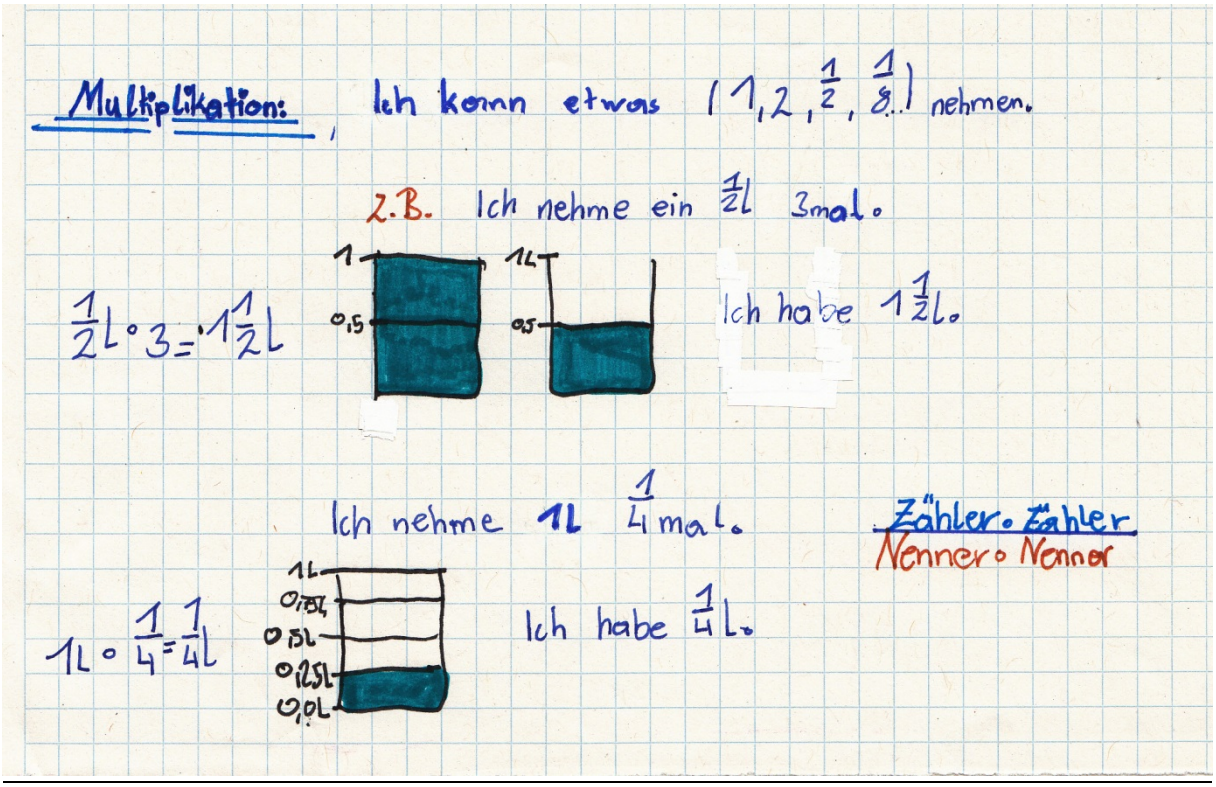


Abbildung 5: Hausübungen der Kinder

Gedanken zur Evaluation:

Bezüglich der Evaluation zogen wir mehrere Verfahren in Betracht. Unsere Überlegungen erstreckten sich dabei von Eltern- über SchülerInnenfragebögen bis zur Ermittlung individueller Lernstände. Die zu Projektbeginn angedachte Aufnahme von Erklärungen konnte wegen der bereits angeführten Gründe nicht vollzogen werden. Wir nahmen nach mehreren Diskussionen im Team von Elternfragebögen Abstand, da aus eigenen Erfahrungen das Ankreuzen vorgegebener Aussagen oft mit Willkür verbunden ist und daher nicht sehr aussagekräftig scheint. Außerdem würde uns eine Auswertung für die weitere Planung unterrichtlicher Maßnahmen nicht wirklich behilflich sein.

Ich lud anstatt dessen Ms. Mutters zu einem Elterngespräch in die Schule ein. Gemeinsam mit M. ließen wir das vergangene Schuljahr revue passieren. M. hatte Fortschritte gemacht. Sie war insgesamt mit ihren Leistungen zufriedener, obwohl das Erklären noch nicht so gelang, wie erhofft. Ich nutzte die Zeit um M. und ihrer Mutter Hilfestellungen zu geben hinsichtlich mathematischer Erklärungen, aktiven Zuhörens bzw. gezielten Nachfragens. Diese Aufgaben stellen Eltern vor große Herausforderungen. Aktives Zuhören und gezieltes Nachfragen sind schwerer zu bewältigen als Regeln zu erklären. Was mir als Lehrkraft leicht fällt, ist für Eltern auf Grund fehlender Erfahrungen nicht immer so. Ich weiß genau, wie ich nachfragen muss, um erwünschte Antworten zu erhalten. Ich kann abschätzen, wo die Lücken im Lernprozess sind und wie man an vorhandene Tiefenstrukturen heran kommt. Erfahrungen, die den Eltern klarer Weise fehlen. Die Hilfestellungen anhand der Lernkarten wurden sehr positiv aufgenommen. Aber auch hier wäre eine Einschulung sinnvoll, damit man weiß, worauf es ankommt.

Zudem entschieden wir uns für eine Erhebung der Lernstände unserer SchülerInnen am Ende des Schuljahres. Die erhaltenen Rückmeldungen geben Aufschluss, wie weit das verstehensbasierte Lernen vorangeschritten ist und in welchen Bereichen weitere Maßnahmen ergriffen werden müssen.

Dabei stellten wir die Grundkompetenzen (= Verständnis für den Einsatz der Grundrechenarten) in den Fokus, da auf diese viele weitere Lerninhalte der kommenden zwei Jahre aufbauen. Wir unter-

suchten durch gezielte Fragestellungen, wie weit das Verständnis gediehen war. Jeder Kompetenzbereich sollte mit einer eigenen Aufgabenstellung, Zeichnung und Erklärung erläutert werden. Diese Kompetenzen stehen in Folge für die Erarbeitung weiterer mathematischer Kapitel zur Verfügung:

<u>Auflistung der Grundkompetenzen mit Bezug zum täglichen Leben und Synergie zu weiteren Lerninhalten</u>

Tabelle 6: Kompetenzen, reale Situationen, Vernetzung

Grundkompetenz	Bezug zum täglichen Leben	Vernetzung mit weiteren Lerninhalten
Division: Teilen: Man teilt eine Größe zu gleichen Teilen auf eine zweite auf. Kurzform: G1/G2	Zusammengesetzte Größen: km/h g/cm³ €/kg	Funktionen, Erstellen von Geradengleichungen G1/G2 wird ersetzt durch k; ….
Division: Teilen: Eine gegebene Größe wird in kleinere Teile geteilt. Kurzform: G/Teile	Bestimmte Teile einer Größe berechnen (die Hälfte, ein Drittel, ein Prozent, ….)	Bruchteile von Größen, Prozentwert, Grundwert…
Division: Messen Kurzform: xG/yG	Abfüllen bestimmter Lebensmittel (Apfelsaft, Honig, ..); Anzahl von Fliesen für eine gegebene Fläche, Stufen für eine gegebene Höhe,… bestimmen. Größen miteinander vergleichen	Prozentsatz und relative Häufigkeiten ermitteln; Prozentsätze interpretieren (12% Steigung), Kürzen gleicher Variablen bei der Division; …
Größe · Vorgang Kurzform: G · V	Kurzform der Addition gleicher Größen (Vorgang aus dem Bereich der natürlichen Zahlen)	Vernetzung mit der Division: Kehrwertbildung im Bereich der rationalen Zahlen: $\cdot \frac{1}{2} = \; : 2$ Bruchteile von Größen (Prozentwert) über Multiplikation berechnen, ….
Größe · Größe (gleiche Größen) Kurzform: xG · yG	Flächeninhalts- bzw. Volumsberechnungen	Flächenformeln über Einheitsquadrate, Volumsformeln über Einheitswürfel herleiten; Quadrieren und Potenzieren von Variablen, …..
Proportionen: Von einem Teil einer zusammengesetzten Größe kann man auf alle schließen: Kurzform: G1/G2 · G2	Wegberechnungen (km/h · h) Preiskalkulationen (€/kg · kg) Dichteberechnungen (g/cm³· cm³)	„Schlussrechnungen“ - Proportionen im direkten und indirekten Verhältnis, Division und Multiplikation mit Variablen, Kürzen gleicher Variablen, ….

Aufgabenblatt zur Überprüfung der Grundkompetenzen

1. Division: Teilen – 2 verschiedene Größen (G1/G2)

2. Division: Teilen – eine Größe (G/Teile)

3. Division: Teilen – Messen (xG/yG)

Meine Grundkompetenzen: Werkzeuge
Rechnung – Bild - Erklärung

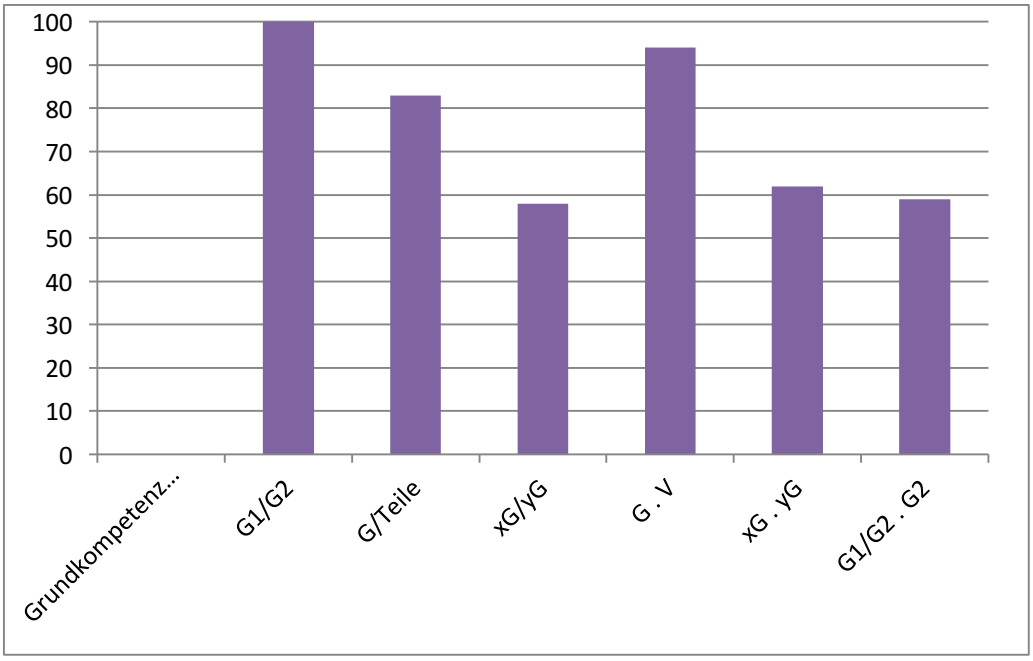
NAME: _____

4. Multiplikation: Größe · Vorgang (G·V)

5. Multiplikation: gleiche Größen (xG· yG)

6. Multiplikation: ein Teil einer Größe · Größe (G1/G2 · G2)

Lösungshäufigkeiten der erreichten Grundkompetenzen in Prozent: 2A – Klasse



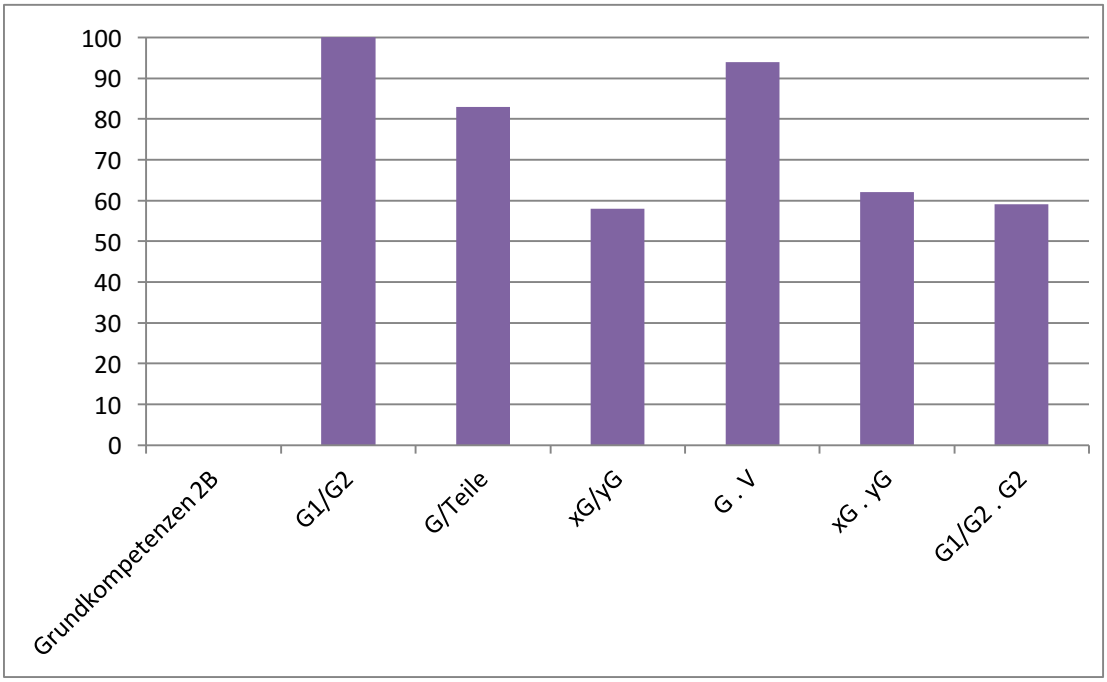


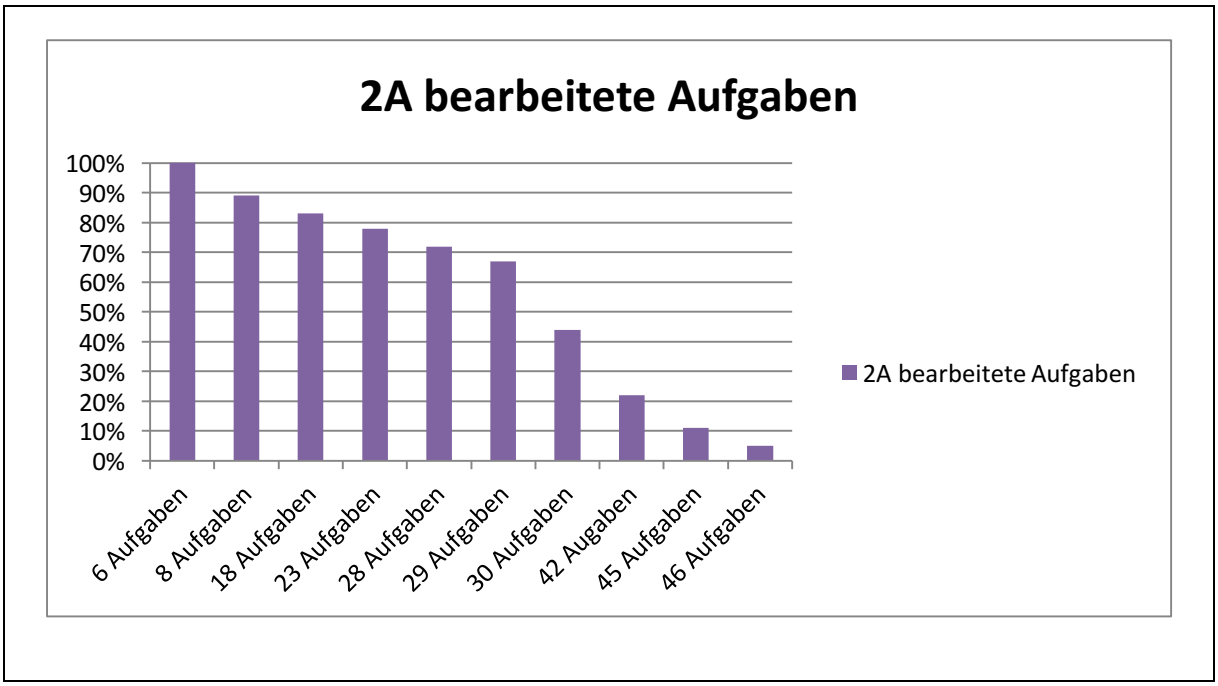
Abbildung 6: Leistungsstand der beiden Klassen

Die Diagramme der beiden Klassen sind sehr ähnlich. Am besten scheint das Aufteilen zweier Größen in der Vorstellung der SchülerInnen verankert. Ein Zuwachs an Verständnis ist auch im Bereich G·V zu verzeichnen. Im Vorjahr konnten nur 30% der SchülerInnen dazu Vorstellungen generieren. An den anderen Kompetenzen werden wir mit manchen Kindern weiterhin gezielt arbeiten müssen.

Untersuchung weiterer Kompetenzen

Die restlichen Aufgabenstellungen liefern einen Überblick über Tiefenverständnis, Vernetzungsgrad und Erklärungskompetenz unserer SchülerInnen. Sie hatten dafür zwei Schulstunden (in der 2A eine Doppelstunde und in der 2B zwei Einzelstunde) zur Verfügung. Alle Aufgabenstellungen sind im Anhang abrufbar. Die Zeit reichte leider nicht aus, alle Aufgaben zu bearbeiten. An der unterschiedlichen Anzahl gelöster Aufgaben ist die Heterogenität der Klassenzusammensetzungen gut ablesbar. Ein weiterer Nachteil war, dass in der 2 B Klasse in beiden Stunden SchülerInnen fehlten. Gegen Ende des Schuljahres gestaltet sich die Vornahme von Evaluationen schwierig. Zuvor waren wir mit Schularbeiten und Notenabschlüssen beschäftigt. Wir wollten den Lernstand am Ende des Schuljahres erheben, damit wir im kommenden Schuljahr gut mit individuellen Förderungen, die entsprechender Materialaufbereitung bedürfen, ansetzen können. Die abgefragten Kompetenzen geben Aufschluss über das Verständnis des bisherigen Lernstoffs. Sie stellen eine gute Grundlage für den weiteren Wissensaufbau. Es ist geplant, die gleiche Überprüfung zu Beginn des neuen Schuljahres nochmals durchzuführen und die Ergebnisse zu vergleichen.

Prozentsatz der bearbeiteten Aufgabenstellungen:



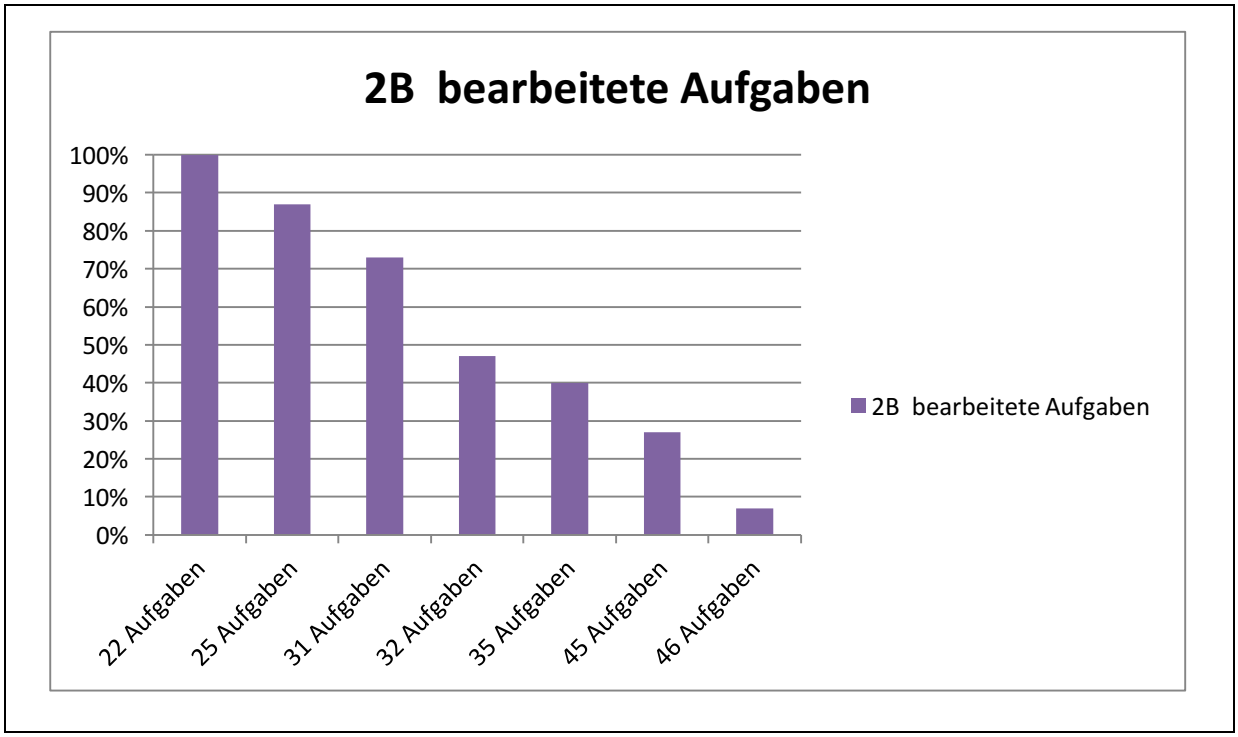


Abbildung 7: Anzahl der bearbeiteten Aufgaben in den beiden Klassen

Übersicht der Ergebnisse der 2 A – Klasse

Wir untersuchten verschiedene Kompetenzen mit Schwerpunkt auf Erklärungen. Eine zur Gänze ausgewiesene Kompetenz bekommt die Bewertung 1,0. Alle 1,0 Bewertungen sind dunkelgrau hinterlegt. Lässt sich ein Verständnis nicht genau aus der SchülerInnenlösung ablesen, wurde es mit 0,5 bewertet, scheint es nicht gegeben mit 0,0. Felder für nicht gelöste Aufgaben sind leer (2B) oder auch mit 0,0 (2A) bewertet.

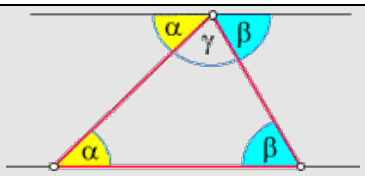
2A	G1/G2	G/Teile	G/yG	G · V	G/yG	G1/G2 · G2	Ergebnisse interpretieren: G1/G2	Ergebnisse interpretieren G/Teile	Ergebnisse interpretieren G · V	Ergebnisse interpretieren: xG · yG	Ergebnisse interpretieren xG/yG	Ergebnisse interpretieren : G1/G2 · G2	Kompetenzen zuordnen G/Teile	Kompetenzen zuordnen xG/yG	Kompetenzen zuordnen G1/G1 . G1	Kompetenzen zuordnen xG yG	Rechnung interpretieren (±80)	Prozentwert berechnen/erklären	verschiedene Möglichkeiten für Prozentwert	Begründen, warum Rechnung sinnlos ist	sinnlose Rechnung richtigstellen	Winkelsumme im Dreieck anhand einer Abbildung erklären	Bruchstrich als Divisionszeichen (Bd0)	Anwendung für andere Schreibweise	Division in Dezimalform 8:0,1	Multiplikation in Dezimalform 8,0,1	Division in Bruchform 51/2 : 1/8 =	Erklärung des Vorgehens	Erklärung der Kommasetzung	Erklärung und Anwendung der Kreiseigenschaft	Vorkommen des rechten Winkels	fehlende Winkel berechnen	Grundverständnis des Stellenwertsystems: Messen	STWS: Anschreiben in kleineren Größen	STWS: Prozente und Promille ablesen	STWS: dekadische Einheiten multiplizieren	Verständnis für das Erweitern	Gesetz der Addition: Anwendung	Gesetz der Addition: Bruchform	direktes und indirektes Verhältnis	Prozentsatz in Anwendung	Punkt-vor Strichrechnung	Punktvor Strichrechnung - Erklärung	sinnvolles Runden	Division als Multiplikation mit dem Kehrwert	
	0,0	0,0	1,0	1,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	1,0	0,0	0,5	1,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	8,5
	1,0	0,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,5	1,0	0,0	1,0	1,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	17,0
	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,5	0,5	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	1,0	0,0	1,0	2,0	0,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	32,0
	0,5	1,0	0,0	1,0	1,0	0,0	1,0	1,0	0,0	1,0	1,0	0,0	0,0	0,5	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	1,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	16,0
	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	1,0	1,0	0,0	1,0	0,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	0,0	1,0	0,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	0,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	0,0	28,0
	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	9,0
	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	31,0
	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	0,0	1,0	1,0	0,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,5	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	23,5
	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,5	1,0	1,0	1,0	1,0	0,5	0,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	0,5	0,5	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	24,0
	1,0	0,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	1,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	1,0	0,5	0,0	1,0	0,0	0,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	13,0
	1,0	1,0	0,5	0,5	1,0	0,0	1,0	1,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,5	0,0	1,0	1,0	1,0	0,0	0,0	1,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	13,5
	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	0,5	1,0	1,0	0,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,5	1,0	1,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	1,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	27,0
	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,5	0,5	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	1,0	0,5	2,0	0,5	0,5	1,0	0,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,5	0,0	1,0	0,0	0,0	0,5	0,0	36,5
	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,5	1,0	1,0	1,0	0,5	1,0	1,0	1,0	0,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	33,5
	1,0	0,5	0,5	1,0	1,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	5,0
	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	29,5
	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,5	1,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	9,0
	1,0	0,5	0,0	1,0	0,0	1,0	1,0	1,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	1,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	9,5
	16,5	14,0	15,0	17,5	17,0	12,5	15,0	13,5	9,0	9,0	8,5	11,5	7,5	5,5	9,0	10,0	13,0	15,0	8,0	7,5	14,0	8,0	15,0	9,0	8,0	6,0	7,5	5,5	##	4,5	3,0	4,0	2,0	5,0	5,0	4,0	2,5	3,5	1,5	0,0	2,0	4,0	2,0	1,5	1,0	365,5	
richtige Lösungen in %	92	78	83	97	94	69	83	75	50	50	47	64	42	31	50	56	72	83	44	42	78	44	83	60	57	50	54	39	96	45	43	57	29	71	71	67	42	70	30	0	40	80	67	75	100		

2B	G1/G2	G/Teile	G/yG	G · V	G/yG	G1/G2 · G2	Ergebnisse interpretieren: G1/G2	Ergebnisse interpretieren G/Teile	Ergebnisse interpretieren: G · V	Ergebnisse interpretieren: xG · yG	Ergebnisse interpretieren xG/yG	Ergebnisse interpretieren : G1/G2 · G2	Kompetenzen zuordnen G/Teile	Kompetenzen zuordnen xG/yG	Kompetenzen zuordnen G1/G1 . G1	Kompetenzen zuordnen xG yG	Rechnung interpretieren (±80)	Prozentwert berechnen/erklären	verschiedene Möglichkeiten für Prozentwert	Begründen, warum Rechnung sinnlos ist	sinnlose Rechnung richtigstellen	Winkelsumme im Dreieck anhand einer Abbildung erklären	Bruchstrich als Divisionszeichen (Bd0)	Anwendung für andere Schreibweise	Division in Dezimalform 8:0,1	Multiplikation in Dezimalform 8,0,1	Division in Bruchform 51/2 : 1/8 =	Erklärung des Vorgehens	Erklärung der Kommasetzung	Erklärung und Anwendung der Kreiseigenschaft	Vorkommen des rechten Winkels	fehlende Winkel berechnen	Grundverständnis des Stellenwertsystems: Messen	STWS: Anschreiben in kleineren Größen	STWS: Prozente und Promille ablesen	STWS: dekadische Einheiten multiplizieren	Verständnis für das Erweitern	Gesetz der Addition: Anwendung	Gesetz der Addition: Bruchform	direktes und indirektes Verhältnis	Prozentsatz in Anwendung	Punkt-vor Strichrechnung	Punktvor Strichrechnung - Erklärung	sinnvolles Runden	Division als Multiplikation mit dem Kehrwert	
	1,0	1,0	0,5	1,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	1,0	1,0	0,0	1,0	0,0																											8,5
	1,0	0,5	0,0	1,0	1,0	1,0																																											4,5
	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	1,0	0,5	1,0	0,0	1,0	0,5	1,0	1,0	0,0	1,0	1,0	1,0	0,0	1,0	1,0	0,5																											16,5
	1,0	1,0	1,0	0,5	1,0	0,0																																											4,5
	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,5	0,0	0,5	1,0	1,0	1,0	0,5	1,0	1,0	1,0	0,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,5	1,0	0,5	0,5	0,0	1,0	0,5	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	1,0	0,0	0,5	0,5	0,5	34,5
	1,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	1,0	0,5	0,5	1,0	1,0	0,5	0,0	0,0	0,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	1,0	0,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	1,0	1,0	0,0	1,0	0,5	1,0	0,5	0,5	0,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,5		25,0
	1,0	1,0	0,0	1,0	0,0	0,0	1,0	1,0	1,0	0,0	1,0	1,0	1,0	0,0	0,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	1,0													23,0
	1,0	1,0	0,5	0,5	0,5	0,5	0,0	0,0	0,5	0,5	1,0	1,0	0,0	0,5	1,0	1,0	0,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	1,0	0,5	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	0,0	0,5	0,5	0,5	0,0	0,5	0,5	1,0	1,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,5		26,0
	1,0	0,0	0,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,5	1,0	1,0	1,0	0,5	1,0	0,0	0,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	1,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,5	0,5	0,5	0,5																	20,0
	1,0	1,0	0,0	1,0	0,0	1,0	0,0	0,5	0,0	0,5	0,0	1,0	0,0	1,0	0,0	0,0	1,0	0,5	0,0	1,0	0,5	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,5	0,5	0,5	0,5																	18,0
	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	0,0	1,0	0,5	0,5	0,0	0,0	0,5	1,0	0,0	0,0	0,0	0,5	1,0	1,0	0,0	1,0	0,0	1,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,5	0,5	0,0	0,0	1,0	1,0	1,0	0,0	0,5	0,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,5		18,5
																																																	0,0
	1,0	1,0	0,5	1,0	1,0	0,0	1,0	0,5	0,5	0,0	0,0	0,5	1,0	0,0	0,0	0,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	1,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	1,0	0,0	0,0										18,0
																																																	0,0
	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,5	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	1,0	1,0	1,0																						23,5
	1,0	0,5	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,5	0,0	1,0	0,0	0,5	0,5	0,0	0,0	0,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	1,0	1,0	0,5	1,0	0,0	0,0	0,5																	20,0
	1,0	1,0	1,0	1,0																																													4,0
	1,0	1,0	0,5	1,0	0,5	0,5	1,0	1,0	1,0	0,5	0,5	0,5	0,0	0,5	1,0	0,0	0,5	1,0	0,0	0,5	1,0	0,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,5	0,5	0,0	0,0	0,5	0,5																	19,5
	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	1,0	1,0	1,0	0,5	0,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,5	0,0																			24,0
	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,5	1,0	0,5	1,0	0,5	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,5	0,5	1,0	0,5	1,0	1,0	0,0	0,5	1,0	0,0	0,5																	25,0
	18,0	15,0	15,0	17,0	11,0	10,0	12,0	9,5	10,0	7,5	8,5	9,5	8,5	5,5	9,0	9,0	13,0	14,0	12,0	11,5	14,5	2,5	13,0	10,0	11,0	9,0	7,0	7,0	6,5	2,0	4,0	2,5	2,5	4,5	4,0	2,5	2,5	3,0	2,5	0,0	1,0	1,0	0,5	2,0	0,5	333,0	
richtige Lösungen in %	100	83,3	61	94,4	65	59	80	63	67	50	57	63	57	37	33	60	87	93	80	77	97	17	100	77	85	75	58	58	54	18	36	36	42	75	67	50	50	75	63	0	25	25	13	50	50		

Im Folgenden sind einige SchülerInnenantworten zu den Aufgabenstellungen angeführt. Fehler wurden direkt übernommen. Wir trafen eine Auswahl aus sehr guten sowie den schlechtesten Antworten.

Tabelle 7: Auswahl an SchülerInnenerklärungen

Erkläre, was du damit berechnet hast: **45€ : 100 · 15 = 6,75€**	
Ich berechne wie oft 100 in 45 geht · 15 Derselbe Schüler für 54 km : 2 · 1 Ich berechne die Hälft von 54 km	Ich habe 15% berechnet.
Erkläre, was du damit berechnet hast: **1,5 Tage/A · 6A = 9 Tage (A= Arbeiter)**	
Wenn 1 A 1,5 Tage arbeitet, und 6A die gleiche Arbeit machen, das sie zusammen 9 Tage arbeiten	Ich rechne wie viele Tage arbeiten 6 Arbeiter, wenn 1 Arbeiter 1,5 Tage arbeitet.
Erkläre, was du damit berechnet hast: **1200 g · 0,75 = 900 g**	
Ich habe 75 von 1200g berechnet	Ich berechne 75% von 1200 g
Erkläre, was du damit berechnet hast: $\mathbf{7\frac{1}{2}l : \frac{1}{8}l = 60}$	
Ich habe $\frac{1}{8} l \; von \; 7\frac{1}{2}$ berechnet.	Ich berechne wie oft $\frac{1}{8} l \; in \; 7\frac{1}{2} l \; hineinpasst.$
Thomas ist bei der Lösung der folgenden Aufgaben ein Fehler unterlaufen. **1,5 · 0,03 = 0,15** **Erkläre ihm, warum er im Ergebnis drei Kommastellen braucht! Vielleicht findest du auch eine mathematische Erklärung dafür!**	
Weil man bei der Angabe 3 Komastelen hat	Weil ich bei der Rechnung schon 3 Komastehlen habe und z · h = t
Weil wenn man an den vorder zahlen 2 Kommastellen sind und an der Ergebnissstelle auch eins dann brauchen wir 3 Kommastellen.	Wenn ich z z-mal nehme bekomme ich h, wenn ich es h-mal nehme t.
Ein Grundverständnis für das Stellenwertsystem braucht man: • **Beim Messen 4,8: 0,12 = Erkläre!**	
480 h : 12 h = 40 Es ist leichter weil es auf die h aufgerundet wurde	Weil ich muss schauen wie oft z in z passen (€ in €,)
• **Beim Anschreiben von Größen in kleineren Einheiten: 3,4 m = _____ cm**	

Weil die cm die h sind und deswegen müssen wir auf h aufrunden	1cm = 1h = 1% , erweitern auf h
• **Bei der Multiplikation mit dekadischen Einheiten** • **3,4 · 10 = _____ 3,4 · 100 = _____ 3,4 · 1000 = _____**	
3,4 · 10 = 34 3,4 · 100 = 340 · 10 1 Stelle nach vor · 100 2 Stellen nach vor	Multiplikation mit 10, 100, funktioniert wie Erweitern auf z, h, …
Was ist in der folgenden Zeichnung dargestellt? Was lässt sich daraus ableiten? 	
Diese zwei Seiten sind parallel. Wenn ich die Ecken von den Winkel abreisen würde und zusammenlege haben sie 180°. Die Innen Winkel haben zusammen 180°.	**Ein Dreieck. Daraus leitet sich ab das ein Dreieck immer die Winkelsumme 180° hat**
8 : 0,1 = 80	
8 sind die E und ich habe auf z erweitert und 80z:1z = 80	Ich schaue wie oft 1z in 80 z enthalten sind.
8 · 0,1 = 0,80	
8 sind die E und ich habe auf z erweitert und 80z · 1z = 80 h $\frac{80}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{80}{100}$	**· 0,1 = : 10**
Warum wird die Kreiseigenschaft ausgenützt bei der Konstruktion der Streckensymmetrale?	
Alle Punkte auf der Kreislinie sind im gleichen Abstand zur Streckensymmetrale	Alle Punkte, die auf einer Kreislinie liegen sind alle von dem Mittelpunkt (Einstichpunkt eines Zirkels). Dort wo sich die Kreise treffen sind sie von beiden Punkten gleich weit entfernt.

Prozentsatz der richtig gelösten im Vergleich zu den gelösten Aufgaben: Alle Bereiche, die unter 50% liegen, wurden grau hinterlegt.

2A – Klasse

Prozentsatz der erreichten Kompetenzen 2A	
G1/G2	92
G/Teile	78
xG/yG	83
G . V	97
xG.yG	94
G1/G2.G2	69
Ergebnisse interpretieren: G1/G2	83
Ergebnisse interpretieren G/Teile	75
Ergebnisse interpretieren: G.V	50
Ergebnisse interpretieren: xG□ yG	50
Ergebnisse interpretieren xG/yG	47
Ergebnisse interpretieren : G1/G2 .□G2	64
Kompetenzen zuordnen G/Teile	42
Kompetenzen zuordnen xG/yG	31
Kompetenzen zuordnen G1/G2 . G2	50
Kompetenzen zuordnen xG.yG	56
Rechnung interpretieren (:80)	72
Prozentwert berechnen/erklären	83
verschiedene Möglichkeiten für Prozentwert	44
Begründen, warum Rechnung sinnlos ist	42
sinnlose Rechnung richtigstellen	78
Winkelsumme im Dreieck anhand einer Abbildung erklären	44
Bruchstrich als Divisionszeichen (BaD)	83
BaD: Anwendung für andere Schreibweise	60
Division in Dezimalform 8:0,1	57
Multiplikation in Dezimalform 8.0,1	50
Division in Bruchform	54
Erklärung des Vorgehens	39
Erklärung der Kommasetzung	96
Erklärung und Anwendung der Kreiseigenschaft	45
Vorkommen des rechten Winkels	43
fehlende Winkel berechnen	57
Grundverständnis des Stellenwertsystems: Messen	29
STWS: Anschreiben in kleineren Größen	71
STWS: Prozente und Promille ablesen	71
STWS: dekadische Einheiten multiplizieren	67
Verständnis für das Erweitern	42
Gesetz der Addition: Anwendung	70
Gesetz der Addition: Bruchform	30
direktes und indirektes Verhältnis	0
Prozentsatz in Anwendung	40
Punkt-vor Strichrechung	80
Punkt-vor Strichrechnung - Erklärung	67
sinnvolles Runden	75
Division als Multiplikation mit dem Kehrwert	100

2B - Klasse

Prozentsatz der erreichten Kompetenzen 2B	
G1/G2	100
G/Teile	83
xG/yG	60
G.V	97
xG.yG	60
G1/G2 . G2	60
Ergebnisse interpretieren: G1/G2	80
Ergebnisse interpretieren G/Teile	63
Ergebnisse interpretieren: G.V	67
Ergebnisse interpretieren: xG/yG	50
Ergebnisse interpretieren xG/yG	57
Ergebnisse interpretieren : G1/G2.G2	63
Kompetenzen zuordnen G/Teile	57
Kompetenzen zuordnen xG/yG	37
Kompetenzen zuordnen G1/G2 . G2	33
Kompetenzen zuordnen xG.yG	60
Rechnung interpretieren (:80)	87
Prozentwert berechnen/erklären	93
verschiedene Möglichkeiten für Prozentwert	80
Begründen, warum Rechnung sinnlos ist	77
sinnlose Rechnung richtigstellen	97
Winkelsumme im Dreieck anhand einer Abbildung erklären	17
Bruchstrich als Divisionszeichen (BaD)	100
BaD: Anwendung für andere Schreibweise	77
Division in Dezimalform 8:0,1	85
Multiplikation in Dezimalform 8.0,1	75
Division in Bruchform	58
Erklärung des Vorgehens	58
Erklärung der Kommasetzung	54
Erklärung und Anwendung der Kreiseigenschaft	18
Vorkommen des rechten Winkels	36
fehlende Winkel berechnen	36
Grundverständnis des Stellenwertsystems: Messen	42
STWS: Anschreiben in kleineren Größen	75
STWS: Prozente und Promille ablesen	67
STWS: dekadische Einheiten multiplizieren	50
Verständnis für das Erweitern	50
Gesetz der Addition: Anwendung	75
Gesetz der Addition: Bruchform	63
direktes und indirektes Verhältnis	0
Prozentsatz in Anwendung	25
Punkt-vor Strichrechung	25
Punkt-vor Strichrechnung - Erklärung	13
sinnvolles Runden	50
Division als Multiplikation mit dem Kehrwert	50

Abbildung 8: Gesamtvergleich

3.3 Interpretation

Die besondere Art der Aufgabenstellungen im Rahmen der Lernstandserhebungen ermöglicht nun einen guten Einblick in das vorhandene Grundlagenwissen unserer SchülerInnen, auf das wir in Folge aufbauen wollen, um eine höhere Nachhaltigkeit zu erzielen. Die Grundkompetenzen der Division (G1/G2; G/Teile; xG/yG) sowie der Multiplikation (G·V, xG·yG, G1/G2·G2) sind bei einem Großteil der SchülerInnen gut gefestigt und mit bildhaften Vorstellungen versehen. Die beiden Säulendiagramme zeigen ein ähnliches Bild. Größere Probleme bereitet nach wie vor die Verknüpfung der Multiplikation zweier Längen mit einem Flächeninhalt (xG · yG). Dies kommt bei der bildhaften Darstellung zum Ausdruck, wenn anstatt einer Fläche zwei Längen gezeichnet werden, oder manche SchülerInnen einen €-Betrag mit einem €-Betrag multiplizieren und dies auf Grund der Unsinnigkeit der selbst gewählten Aufgabenstellung nicht bildlich darstellen können.

Auch die Vorstellung des Messens (xG/yG) ist nicht durchgehend gefestigt, obwohl sie immer wieder verbalisiert wird, vielseitig Anwendung findet und bereits in der ersten Klasse in Verbindung mit der Bruchform eingeführt wurde. Probleme diesbezüglich lassen sich aus der folgenden Erklärung ableiten: Ich habe $\frac{1}{8} l\ von\ 7\frac{1}{2}$ berechnet. Hier fehlt die Größenbezeichnung bei $7\frac{1}{2}$ und es ist nicht klar, welche Vorstellungen der/die SchülerIn mit seiner/ihrer Aussage verbindet. Auch bei der Zuordnung der Kompetenzen schnitt das Messen in beiden Klassen sehr schlecht ab (nur 31% bzw. 37% an richtigen Lösungen). Dies wiederholt sich im Bereich des Stellenwertsystems, wenn die SchülerInnen eine Division durch Erweitern auf Hundertstel und anschließendem Messen lösen sollen (29% und 42% richtige Lösungen). Dieser Inhalt wurde in der ersten Klasse mit Hilfe des Hundertergitters erarbeitet. In diesem Fall fehlt es wahrscheinlich weniger an Kompetenz als an Strategie. Würden wir die SchülerInnen mündlich befragen, könnten erfahrungsgemäß alle Aufgaben gelöst und erklärt werden.

Das Fehlen sinnstiftender Vorstellungen kommt auch bei folgenden Erklärungsversuchen zum Ausdruck:

- Ich habe 75 von 1200 g berechnet. Hier ist nicht klar, ob der/die SchülerIn nur das Prozentzeichen vergessen hat oder mangels Vorstellung falsch argumentiert.
- Ich habe berechnet wie oft 100 in 45 geht · 15. Auch hier wird nur der Rechenweg beschrieben, inhaltliche Vorstellungen fehlen. Derselbe Schüler kann aber gut erklären, dass er mit 54 km : 2 · 1, die Hälfte von 54 km berechnet. Das zeigt die bereits erwähnten Schwierigkeiten mancher SchülerInnen bei Transferleistungen.

Manchmal wurde die Mathematik verstanden, aber es fehlt noch an Fachtermini: „Weil die cm die h sind und deswegen müssen wir auf h aufrunden“. Hier wurde das Wort erweitern vergessen, das im Unterricht allerdings viel häufiger verwendet wurde als aufrunden.

Einige Erklärungen verweisen auf ein gut gefestigtes Tiefenwissen, wie jene, dass ein Zehntel von einem Zehntel ein Hundertstel ergibt und auf dieser Tatsache beruhend, die Kommasetzung im Ergebnis erfolgt. Viele SchülerInnen argumentieren mit der Kommaregel, die sie selbst auf Grund der dahinter liegenden Mathematik, aus Zeichnungen abgeleitet, formulierten. Anscheinend ist die Affinität zu Merkregeln größer als zu mathematischen Vorstellungen. Es kann sogar sein, dass diese im Laufe der Zeit eher in Vergessenheit geraten als auswendig gelernte Merksätzchen.

Die Aufgabenstellung zur direkten und indirekten Proportionalität war im Anspruch für alle SchülerInnen beider Klassen zu hoch. Ein ähnliches Beispiel bei der Schularbeit konnte von 65% gelöst werden:

5) Direkte und indirekte Proportionalität

Wähle 2 Größen aus (a,b, ODER c). Erkläre anhand dieser die Unterschiede zwischen direkter und indirekter Proportionalität!

a) Arbeiter und Arbeitszeit	**b)** Futter und Kühe	**c)** Weg und Zeit

5.1.1 Aufgabenstellung im direkten Verhältnis	**5.1.2** Aufgabenstellung im indirekten Verhältnis

Abbildung 9: Aufgabenstellung zur direkten und indirekten Proportionalität aus der letzten Schularbeit

Allgemein konnten folgende Fehlerkategorien identifiziert werden:

- Nicht internalisierter Handlungsvollzug und dadurch Fehler in der Vorstellung der Rechnungshandlung (Rechenzeichen in der bildhaften Darstellung; aus der Zeichnung sind nicht alle Größen und Vorgänge ablesbar, …)
- Fehler durch fehlende Genauigkeit, mangelhafte Ordnungsstrukturen und Probleme beim Kategorisieren: Nichtbeachtung der Rechenzeichen, Malzeichen werden mit Divisionszeichen verwechselt; Teilen und Messen werden verwechselt, falsche Größenvorstellungen bei Flächenmaßen….)
- Fehlende Vorstellung der Multiplikation in Verbindung mit den rationalen Zahlen (ein z von einem z,…..)
- Probleme beim Transfer mathematischer Handlungen (diese gelingen mit höheren Zahlen nicht mehr,…)
- Fehler durch Vergessen von Inhalten: Kreiseigenschaft, Bedeutung des rechten Winkels, Bedeutung von Messen und Teilen im Zusammenhang mit den Größen (muss gelernt werden, damit es unterschieden wird), Erweitern, ……

Wir sind mit dem Projekt unserem Ziel, die Nachhaltigkeit von Wissen durch Verknüpfung mit inhaltlichen Vorstellungen zu erhöhen ein gutes Stück näher gekommen, auch wenn dies nicht so schnell von statten geht, wie erhofft. Wissenstiefe kann anhand schriftlicher Aufträge nicht immer in befriedigender Form festgestellt werden. Dies funktioniert erst durch gezieltes Nachfragen im Dialog mit den SchülerInnnen. Wir wissen genau, welche Fragen wir stellen müssen, um entsprechende Antworten zu erhalten, die dann auch begründet werden können. Vor allem lernschwächere SchülerInnen bedürfen dazu zahlreicher Wiederholungen. Einmal etwas verstanden zu haben, bewirkt noch keine Kompetenz. Lernen ist mitunter ein anspruchsvoller mühsamer Prozess, der viel Eigenleistung und Disziplin abverlangt. Umso schöner ist ein damit verbundener Erfolg, wenn problembehaftete Inhalte letztlich verstanden und in einem weiteren Schritt vernetzt werden können.

4 GENDER & DIVERSITÄT

Formen offenen Unterrichts kommen den Mädchen insgesamt mehr entgegen, da diese strukturierter an Aufgabenstellungen herangehen, mehr Freude an selbst erarbeiteten Beiträgen zeigen und diesbezüglich über ein höheres Kreativitätspotenzial verfügen. Da sie in offenen Unterrichtsphasen nicht in Konkurrenz zu den Burschen stehen, können sie ihr Potenzial besser entfalten. Wir machten im Zuge des Projekts die Beobachtung, dass in der Klasse mit den Mädchen als Leistungsträgerinnen, insgesamt mehr Inhalte geschafft wurden als in der Vergleichsklasse mit den Burschen als Leistungsträgern. In dieser Klasse wurde allgemein intensiver gearbeitet. Die höhere Motivation der Mädchen wirkte sich auch auf die Arbeitshaltung der Burschen positiv aus.

Sachverhalte zu erklären ist ein weiterer Punkt, in dem die Mädchen den Burschen tendenziell überlegen sind.

5 RESÜMEE UND AUSBLICK

Eine der wichtigsten Erkenntnisse für uns ist, dass Lernen selten von schnellem, nachhaltigem Erfolg gekrönt ist. Das Bilden von Vorstelllungen, Erklären von Rechenwegen und Interpretieren von Ergebnissen stellen zwar wichtige Schritte im Verstehensprozess dar, sind aber noch kein Garant für nachhaltiges Lernen. Um Verstehensprozesse einzuleiten, scheint es wichtig, den Zahlen eine Bedeutung zu geben (vgl. Bruder 2008). Durch das in der Mathematik übliche Weglassen von Einheiten können vor allem lernschwächere Kinder häufig nicht zwischen einzelnen Rechenhandlungen unterscheiden. Wie wichtig es ist, Rechenwege immer wieder erklären zu lassen und sich ein Bild davon zu machen, zeigen charakteristische Fehler. Kein Kind würde im täglichen Leben Äußerungen tätigen wie: „Ich hätte gerne 1l mal 3l“ oder „Gib mir bitte 3€ mal 2€.“. In Rechnungen, die von den SchülerInnen zu Erklärungszwecken erstellt wurden, kommen sie dann doch vor. Allerdings bestellt man auch selten 3-mal einen Liter. Trotzdem erscheint diese Äußerung auch den ganz Lernschwachen logisch und sie können Zeichnungen dazu anfertigen, was mit den oberen Beispielen nicht gelingt. Die Ursachen für derart abstruse Fehler könnten in einem frühen, bezuglosen Auswendiglernen liegen. Dabei handelt es sich aber nur um eine Annahme. In diesem Bereich gibt es noch viel zu erforschen. Uns fällt auf, dass lernschwache SchülerInnen auch nach zwei Jahren verstehensbasiertem Unterricht trotz vieler Fortschritte immer wieder auf unlogische Erklärungen zurückgreifen. Macht man sie darauf aufmerksam, wird es ihnen bewusst. Deswegen ist dialogisches Lernen von großer Bedeutung für den Lernprozess. Eltern müssen aber darauf eingeschult werden, um von einer erklärenden zu einer aktiv zuhörenden Haltung zu gelangen.

Manchmal ergeben sich Probleme im Verstehensprozess durch verkürzte Schreibweisen wie dem üblichen Weglassen der Ziffer 1. Das führt bei langsameren LernerInnen manchmal zur Verdrehung zusammengesetzter Größen und aus 1,5 kg/€ können 1,5 €/ kg werden. Beim Anschreiben der 1 (1,5kg/1€) wäre die Zuordnung eindeutig ablesbar. Auch beim Berechnen von Anteilen ist den SchülerInnen oft nicht klar, dass sie bei der Division durch 2 einen Teil von zwei Teilen berechnen, bei der Division durch 100 einen von 100 Teilen.

Man schreibt auch nur: 50€ : 2 oder 50€ : 100 anstatt 50€:2·1 oder 50€:100·1 – dann wären $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{100}$ ablesbar und auch die Bedeutung des Bruchstrichs würde besser zur Geltung kommen. Bei Berechnung mehrerer Teile, muss man nur die 1 ersetzen, zB: 50€:100·3 und man erkennt $\frac{3}{100}$. Damit kann auch die Vernetzung von Division als Multiplikation mit dem Kehrwert leichter vollzogen werden.

Trotz mancher Hürden haben wir eine nicht geringe Anzahl an SchülerInnen, die in der zweiten Klasse bereits über ein komplexes Wissensnetz verfügen, Rechenwege erklären und durch alternative ersetzen können.

Da sich in der Mathematik nur die Inhalte ändern, die mathematischen Handlungen aber gleich bleiben, steht auch lernschwächeren SchülerInnen noch genügend Zeit für den Wissensaufbau zur Verfügung. Auch ihr Wissensnetz wird mit der Zeit komplexer werden. Für die dazu notwendigen Wiederholungen müssen wir allerdings im Rahmen des Unterrichts Sorge tragen. Da wir im Zuge des Projekts individuelle Lernstände erhoben haben, können wir im kommenden Schuljahr mit gezielter Individualförderung ansetzen. Angedacht ist ein speziell entwickeltes Karteikartensystem in Anlehnung an die bereits im Einsatz befindlichen Lernkarten. Dieses soll ein Zurückgehen auf nicht internalisierte Handlungs- und Bildebenen ermöglichen, die SchülerInnen immer wieder zum Nachdenken anregen und dafür Sorge tragen, dass Ergebnisse kritisch betrachtet und interpretiert werden. Mit dessen Hilfe sollte es möglich sein, durch stete Wiederholungen Lücken im Lernprozess zu schließen und Erfolg sichtbar zu machen, dadurch die Motivation zu erhöhen und eine selbständige Steuerung der Lernprozesse zu fördern, als Vorbereitung auf lebenslanges Lernen.

Eine Beobachtung, der ich mich nicht verschließen möchte, obwohl sie meine Vorstellungen von Lernen nicht stützt, ist, dass mathematische Erklärungen tendenziell viel seltener vorkommen als Regelerklärungen. In unserem Unterricht leiten die SchülerInnen Regeln zwar immer aus mathematischen Zusammenhängen ab, trotzdem graben sie sich anscheinend tiefer ins Gedächtnis ein als die dahinter steckenden mathematischen Konzepte. Eine Tatsache, die für Auswendiglernen bestimmter Regeln sprechen würde, allerdings ohne Affinität zu neuesten wissenschaftlichen Erkenntnissen. Im Dialog lasse ich mir die Regeln immer begründen, weil ich nur so auf vorhandenes Tiefenwissen schließen kann.

6 LITERATUR

- PREDIGER, Susanne; HAMMANN, Marcus; ROTHANGEL, Martin; RALLE, Bernd (2014). *Lernaufgaben entwickeln, bearbeiten und überprüfen*. Münster: Waxmann.

- BLUM, Werner; DRÜKE-NOE, Christina; HARTUNG, Ralph; KÖLLER; Olaf (Hrsg) (2012). Bildungsstandards Mathematik:konkret. Berlin: Cornelson

- HATTIE, John; (2014). Lernen sichtbar machen für Lehrpersonen. Baltmannsweiler: Schneider

- REISS, Kristina; HAMMER, Christoph (2013). Grundlagen der Mathematikdidaktik: Birkhäuser

- HECKMANN, Kirsten; PADBERG, Friedhelm (2012). Unterrichtsentwürfe Mathematik Sekundarstufe 1.: Springer

- HEYMANN, Hans Werner (2013). Allgemeinbildung und Mathematik: Beltz

- WEINERT, Franz E. (2014). Leistungsmessungen in Schulen: Beltz

- SCOTT, Darell; MARZANO, Robert (2014). Awaken the Learner: Marzano Research Laboratory

- WIGGINS, Grant; MC TIGHE, Jay (2012). The Understanding by Design Guide to Advanced Concepts in Creating and Reviewing Units: Heinle Elt

- STORZ, Robert (2014). Mathematik differenziert und individualisiert unterrichten: Aulis Verlag

- KRATZ, Henrik (2011). Wege zu einem kompetenzorientierten Mathematikunterricht: Klett

- ENGEL, Manfred (2010). Erfolgreiche Unterrichtsentwürfe. Mathematik Band 1: Ausgewählte Unterrichtsentwürfe in Bezug auf Kompetenzorientierung im Mathematikunterricht: Freiburger Verlag

- THONHAUSER, Josef (2008). Aufgaben als Katalysatoren von Lernprozessen: Waxmann Verlag

- KRÖPFL, Bernhard; SCHNEIDER, Edith (2012). Standards Mathematik unter der Lupe: Profil Verlag

- UNRUH, Thomas; PETERSEN, Susanne (2014). Guter Unterricht: AOL Verlag

- BARZEL, Bärbel; HOLZÄPFEL, Lars; LEUDERS, Timo; STREIT, Christine (2014). Mathematik unterrichten: Planen, durchführen, reflektieren: Cornelsen

- WINTER, Felix (2016). Leistungsbewertung: Schneider Verlag Hohengehren GmbH

- BOHL, Thorsten; KLEINKNECHT, Mark; BATZEL, Andrea; RICHEY, Petra (2013). Aufgabenkultur in der Schule: Schneider Verlag Hohengehren GmbH

- VON SALDEM; Matthias (2011). Von der Note zum Kompetenzraster: Kindle edition

7 ANHANG

Aufgaben zur Lernstandserhebung

Meine Erklärungskompetenz

Name:

Thomas möchte 80% von 64€ auf folgende Weise berechnen:

64€ : 80 =

a) Warum ist das falsch?

b) Wie berechnest du 80% einer Größe?

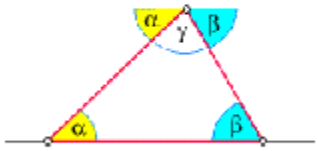
c) Findest du noch andere Möglichkeiten 80% einer Größe zu berechnen?

3,5 km/h · 2 km =

a) Erkläre, warum diese Rechnung keinen Sinn macht!

b) Ändere sie so ab, dass eine sinnvolle Aufgabe entsteht und erkläre, was du damit berechnet hast!

Was ist in der folgenden Zeichnung dargestellt? Was lässt Sich daraus ableiten?



1

a) Für welches Rechenzeichen steht ein Bruchstrich?

b) Gib eine andere Schreibweise für die Rechnung an:

36 km : 4 · 3 =

c) Was berechnest du damit?

d) Gib die Dezimalform von $\frac{5}{8}$ an! Wie viele Möglichkeiten hast du, diese zu finden?

Wie lauten die Ergebnisse der folgenden Aufgaben? Schreibe auf, wie du bei Lösung vorgehst?

8 : 0,1=	8 · 0,1 =	$5\frac{1}{2} : \frac{1}{8} =$

Thomas ist bei der Lösung der folgenden Aufgabe ein Fehler unterlaufen.

1,5 · 0,03 = 0,15

Erkläre ihm, warum er im Ergebnis drei Kommastellen braucht! Vielleicht findest du auch eine mathematische Erklärung dafür!

Warum wird die Kreiseigenschaft ausgenützt:

a) Bei der Konstruktion der Streckensymmetrale?

b) Bei der Konstruktion der Winkelsymmetrale?

c) Bei der Konstruktion von Dreiecks- (Vierecksseiten)?

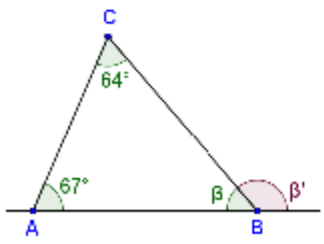
Den rechten Winkel brauchst du zum Zeichnen von Normalen. Wozu brauchst du ihn noch?

a)

b)

c)

Erkläre, wie du die beiden fehlenden Winkel berechnen kannst!



1

Ein Grundverständnis für das Stellenwertsystem braucht man:

- **Beim Messen 4,8 : 0,12 =**

Erkläre:

- **Beim Anschreiben von Größen in kleineren Einheiten: 3,4 m = _____ cm**

Erkläre:

- **Beim Ablesen der Prozente und Promille: 0,03 = _____ % = _____ ‰**

Erkläre:

- **Bei der Multiplikation mit dekadischen Einheiten (10, 100, 1000, ...)**

3,4 · 10 = _____ 3,4 · 100 = _____ 3,4 · 1000 = _____

Erkläre:

Bei welcher der drei Rechnungen a) b) oder c) handelt es sich um Erweitern? Begründe!

Schreibe die Rechnungen auch in Bruchform an!

	Dezimalform	Bruchform
a)	**0,5l** : 2 · 2 =	
b)	**0,5l** : 2 · 1 =	
c)	**0,5l** : 2 · 3 =	

Warum hast du für jede Bruchform unendlich viele Möglichkeiten?

1

a) Welche Aufgaben sind lösbar? Welche nicht ? Löse die lösbaren und erkläre, warum du manche nicht lösen kannst!

1,5 m + 2, 8 m =	**2,1 kg – 1,8 kg =**	**7,5 l + 4 € =**
3a + 4b =	**3a + 5a =**	$1\frac{2}{5}kg + 2\frac{3}{4}\,kg =$
45 cm² + 8 cm³ =	**0,5 kg + 45 dag =**	**8,4 m + 5 m² =**

Ein Imker teilt Honig auf Gläser auf. Wenn er 500 g in ein Glas einfüllt, benötigt er 30 Gläser. Wie viele Gläser braucht er, wenn er nur 125 g einfüllt ?

Berechne und erkläre anhand von 2 Merkmalen, ob die Größen zueinander in einem direkten oder indirekten Verhältnis stehen!

FUSSBALL EM

Welchen Tormann setzt du für das Elferschießen ein? Tormann A hat von 20 Elfermeterschüssen 5 Schüsse abgewehrt, Tormann B von 32 Schüssen 8 Schüsse.

1

Gib den Zahlen eine Bedeutung und erkläre damit, dass gilt:

Punkt- vor Strichrechnung!

$$5 + 4 \cdot 3 =$$

Folgende Größen haben zu viele Kommastellen! Runde sie sinnvoll! Begründe, warum du so gerundet hast!

35,6789 € ~	**5,6789 m ~**
25,3214 kg ~	**56,6789 cm² ~**

Erkläre anhand eines Beispiels, warum jede Division eine Multiplikation mit dem Kehrwert ist!

Schreib eine Division mit Zahlen in Bruchform auf und löse sie!

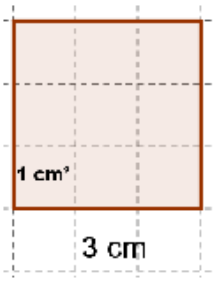
1

Rechnungen erklären und Kompetenzen zuordnen

	Erkläre, was du damit berechnest!	Grundkompetenz
4500 g : 100 cm³ =		
45€ : 100 · 15 =		
54 km : 2 · 1 =		
20 km/h · 5h =		
8 cm · 0,7 cm =		
1,5 Tage/A · 6 A=		
1200 g · 0,75 =		
$7\frac{1}{2}l : \frac{1}{8}l =$		
Welche Grundkompetenz brauchst du?		
Du berechnest 45 % von 60€ :		
Du berechnest wie viel % 5m von 25 m sind :		
Du berechnest, wie viel du für 5 kg bezahlen musst :		
Du berechnest wie viele 1/8 l – Gläser du mit 4 l abfüllen kannst :		
Du berechnest den Flächeninhalt eines Rechtecks:		

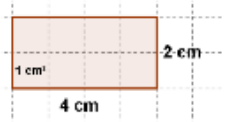
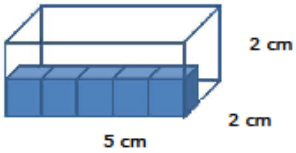
Beispiele für Lernkarten

G · V G/Teile	Vernetzung	Anwendung
	AgG, BaD	Mehrere Teile von Größen berechnen Prozentwert, Grundwert berechnen

Verkürzung der Addition gleicher Größen:	Anteile von Größen über Multiplikation berechnen:
Ich nehme die gleiche Größe/Menge 2 (3,4,5, ... mal) 10 LB + 10 LB + 10 LB + 10 LB Umfangsberechnungen **3cm + 3cm + 3cm + 3cm =**  Flächenberechnungen **3cm² + 3cm² + 3cm² =**	Ich habe **eine Größe** (Menge) (= das Ganze = 1 = $\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}$, ...) und berechne davon

4 kg	1Teil von 2 Teilen ($\frac{1}{2}$)	die Hälfte von 4kg:2·1 = ein „Halbes mal" 4kg · $\frac{1}{2}$ = 4kg · 0,5 =
21 €	1 Teil von 3 Teilen (–)	ein Drittel von 21€ :3·1 = ein „Drittel mal" 21€ · – = 21€ · =
0,8 dm²	1Teil von 4 Teilen (–)	
25 l	1Teil von 5 Teilen (–) ...	
50 km	1 Teil von **100** Teilen (– = 1%)	
	3 Teile von **100** Teilen	
	20 Teile von **100** Teilen	
	120 Teile von **100** Teilen	

xG·yG G1/G2·G2	Vernetzung	Anwendung
	G1/G2 RW	Arbeit, Stromverbrauch, Energieumsatz, .. Funktionen Flächen – und Volumsberechnungen direkte und indirekte Proportionalität

xG·yG	G1/G2 ·G2
a) gleiche Größen 1) Flächenberechnungen: „Wie viel cm² haben Platz?"  **4 cm · 2 cm = 8 cm²** *Zeichne andere Möglichkeiten!* 2) Volumsberechnungen: „ Wie viele cm³ haben Platz?"  **5 cm · 2 cm · 2 cm = 20 cm³** *Finde andere Möglichkeiten!*	**b) ein Teil** einer (zusammengesetzten) Größe · Größe Wenn ich den Preis von 1 kg weiß, kann ich alle Preise berechnen: 5 €/ **kg** · 2 **kg** = 10 € · 10 kg = 50 € · 0,5 kg = 2,50 € Von **1 kg** kann ich auf **2kg;** 3kg; 4kg; ..... 0,5kg .....) schließen. Das funktioniert bei allen Größen: a) 3 kg/€ · 2 € = _____ b) 4 km/h · 3 h = _____ *Beschreibe, was du ausgerechnet hast!*
b) verschiedene Größen Berechnung der elektrischen Energie: 5 **kW** · 3 **h** = 15 **kWh** Berechnung der Arbeit: 5 **N** · 2 **m** = 10 **Nm**	*Finde sinnvolle Ergänzungen und beschreibe, was du ausgerechnet hast!* c) 50 €/m² · _____ = d) 5 g/cm³ · _____ =

ERKLÄRUNG

"Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit (=jede digitale Information, z.B. Texte, Bilder, Audio- und Video Dateien, PDFs etc.) selbstständig angefertigt und die mit ihr unmittelbar verbundenen Tätigkeiten selbst erbracht habe. Alle aus gedruckten, ungedruckten oder dem Internet im Wortlaut oder im wesentlichen Inhalt übernommenen Formulierungen und Konzepte sind zitiert und durch Fußnoten bzw. durch andere genaue Quellenangaben gekennzeichnet. Ich bin mir bewusst, dass eine falsche Erklärung rechtliche Folgen haben wird. Diese Erklärung gilt auch für die Kurzfassung dieses Berichts, sowie eventuell vorhandene Anhänge."