Lernprogramm Mathematik

Vektorrechnung im $\mathbb{R}^2$

Das ist Golden Retriever Tessa bei einem Grabungsprojekt an der Königsee Ache. Retriever sind eigentlich Jagdhunde – aber man könnte sie auch im Tunnelbau einsetzen ☺

Tessa stellt interessierten Leser/innen folgende Aufgabe:

Ein Hund beginnt seine Grabung im Punkt A=(1|5). Nach einer Sekunde ist er im Punkt B=(3|3) angelangt. (Alle Einheiten in cm.)

a) Stelle die Gerade, entlang der die Grabung vor sich geht, in Parameterform dar!

b) Welchen Punkt C hat der Hund nach 5 Sekunden erreicht?

c) Mit welcher Geschwindigkeit wird die Grabung vorangetrieben?

Impressum:

Dieses Skriptum wurde von mir selbst erstellt und ist ausschließlich zum Gebrauch im eigenen Unterricht bestimmt.

Wer dafür Verwendung hat, darf diese Unterlagen gerne ganz oder auszugsweise verwenden. Es muss auch niemand dazusagen, wo er die Unterlagen her hat. Es möge nur niemand so tun, als hätte er selbst diese Unterlagen erstellt.

Die Weitergabe dieses Skripts erfolgt meinerseits unentgeltlich oder gegen Ersatz der Druckkosten. Es ist daher ausdrücklich untersagt, diese Unterlagen oder Teile davon kommerziell mit Gewinnabsicht zu vertreiben.

Anregungen, insbesondere Fehlermeldungen, jederzeit willkommen:

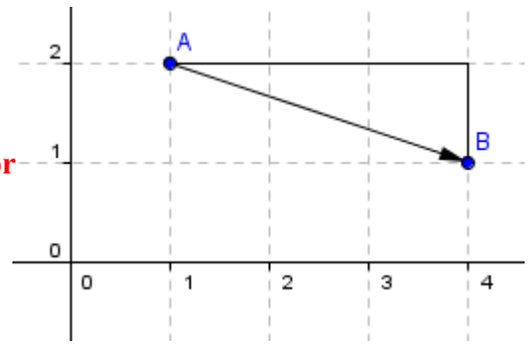
pfg150880@gmail.com

VEKTORRECHNUNG IM R^2: GRUNDLAGEN

Vektor: Paar von zwei Zahlen

als Punkt: A = (1 / 2) →**Ortsvektor**

als Weg von A nach B: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$→**Richtungsvektor**



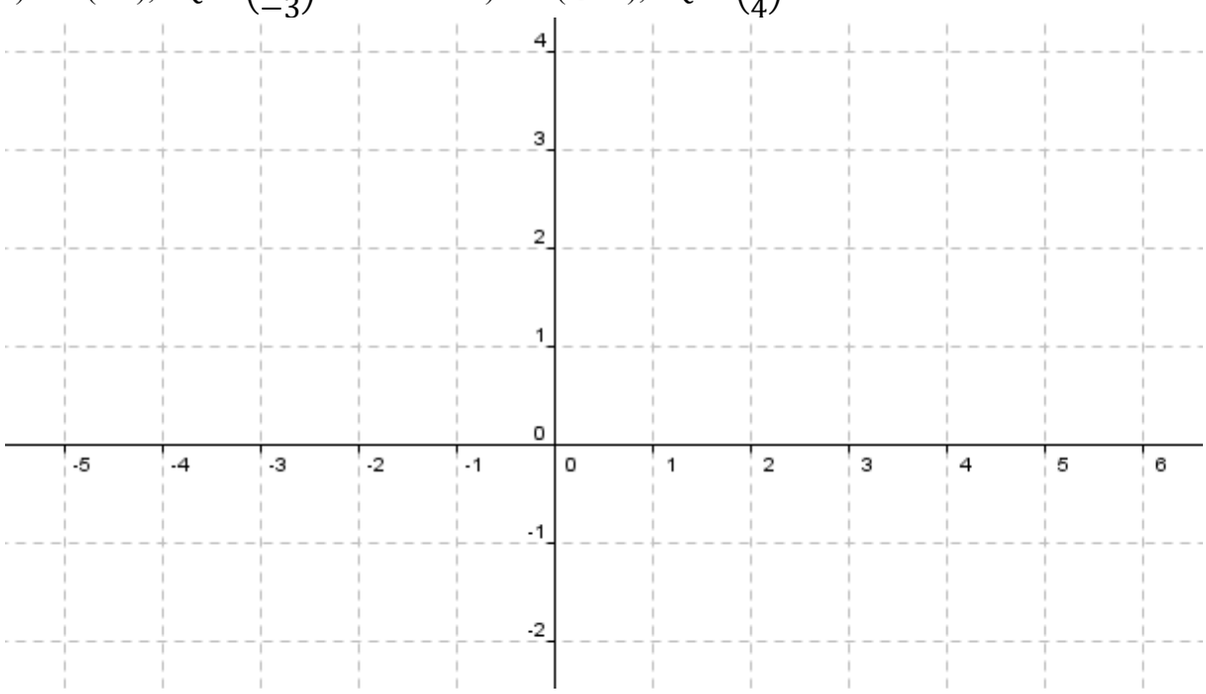
Punkt B berechnet man so:

Neuer Punkt = Startpunkt + Richtungsvektor

$$B = A + \overrightarrow{AB}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1: Zeichne den Punkt P und den Vektor PQ in das Koordinatensystem ein. Wie lauten die Koordinaten des Punkts Q?

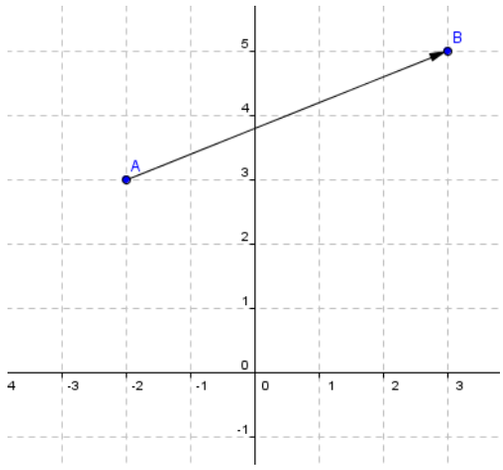
a) P = (2/1); $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ b) P = (-3/-2); $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$



Aufgabe 2: Gegeben sind jeweils ein Punkt P sowie ein Richtungsvektor $\vec{v}$. Berechne den Punkt $Q = P + \vec{v}$!

a) P = (-3 | 5); $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) P = (-7 | 13); $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Vektor zwischen zwei Punkten



$$\overrightarrow{AB} = B - A \text{ (koordinatenweise)}$$

Beispiel: A = (-2/3); B = (3/5)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bei einfachen Zahlen oft schneller
durch „Ergänzen“ (im Kopf):

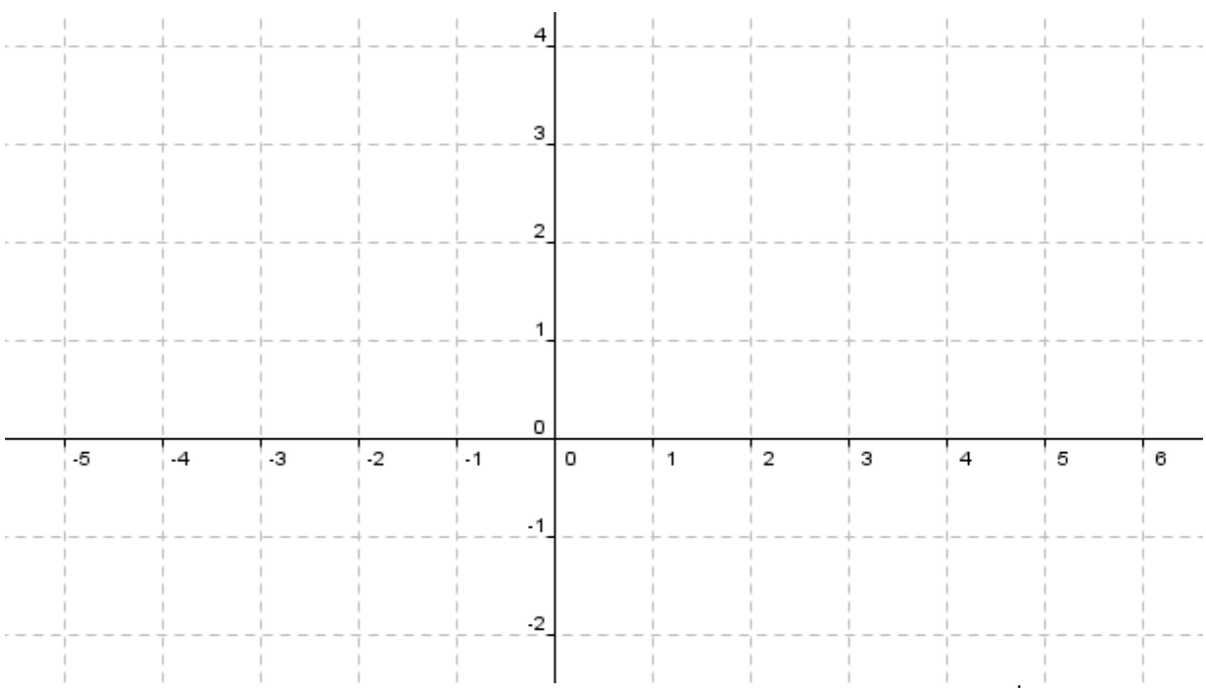
-2 plus wie viel gleich 3 → 5
3 plus wie viel gleich 5 → 2

Aufgabe 3: Berechne den Richtungsvektor $\overrightarrow{AB}$!

a) A = (2 | 5); B = (6 | 7) b) A = (-3 | 1); B = (4 | -2) c) A = (-3 | -7); B = (-5 | -4)

Aufgabe 4: Zeichne den Vektor zwischen den gegebenen Punkten in das Koordinatensystem ein. Wie lauten die Koordinaten dieses Vektors?

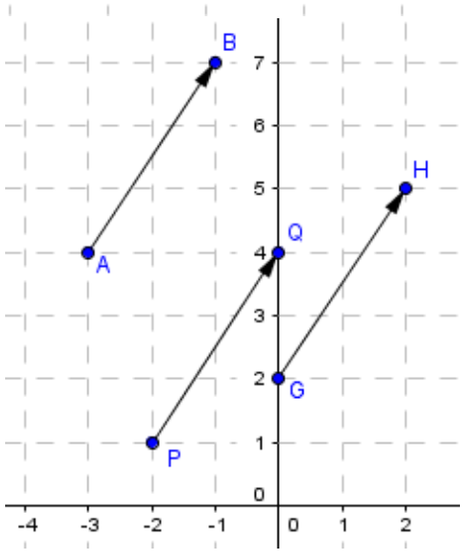
a) A=(-3/4); B=(1/-2) b) P=(-4/-1); Q=(3/4)



Zwischen verschiedenen Punkten können die gleichen Richtungsvektoren liegen:

x-Koord ↔ waagrechter Abstand zwischen 2 Punkten (mit Vorzeichen)
y-Koord ↔ senkrechter Abstand zwischen 2 Punkten (mit Vorzeichen)

Beispiel: für die Punkte A, B, P, Q, G und H gilt
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{GH}$ (gleicher Richtungsvektor);
der Richtungsvektor ist jeweils $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$



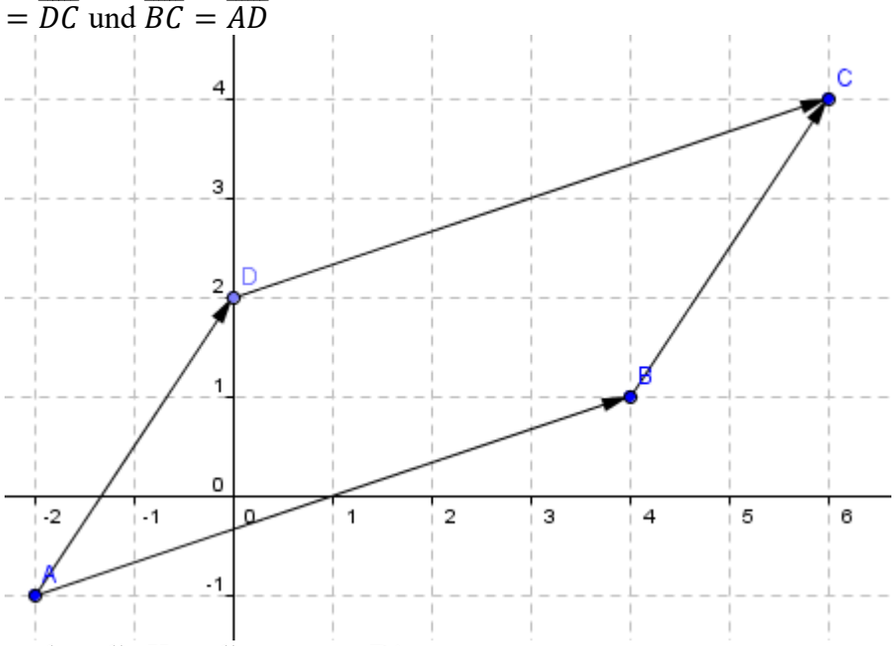
*Man nennt jeden solchen Pfeil (jeden der drei Pfeile) einen **Repräsentanten** des Richtungsvektors* $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5: Zeichne zwei Repräsentanten des Vektors $\vec{v}$ in ein Koordinatensystem ein!

a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Punkte in Parallelogrammen bestimmen

gegeben: Parallelogramm A = (-2/-1); B = (4/1); C = (6/4); D = (x/y)
hier gilt $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$



Aufgabe: Berechne die Koordinaten von D!

Erinnerung: neuer Punkt = Startpunkt + Richtungsvektor

D = A + $\overrightarrow{AD}$

Idee: statt $\overrightarrow{AD}$ kann man auch $\overrightarrow{BC}$ verwenden (sind ja die gleichen Richtungsvektoren ☺)

Berechnung: $\overrightarrow{BC} = C - B = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

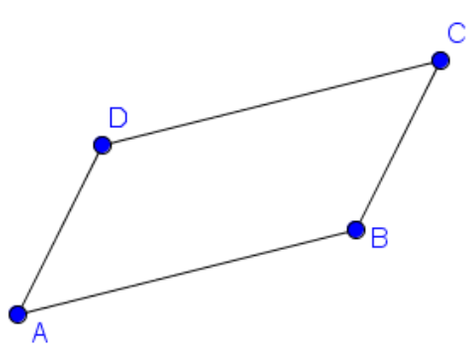
$D = A + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6: Ermittle den fehlenden Endpunkt des Parallelogramms durch Berechnung (erstelle bei Bedarf zusätzlich eine Skizze).

a) A = (-3/-2); B = (2/0); D = (-1/3) b) A = (-4/-2); D = (-1/5); C = (6/1)

Aufgabe 7: Gegeben ist das Parallelogramm ABCD (siehe Grafik). Kreuze die beiden zutreffenden Formeln an!

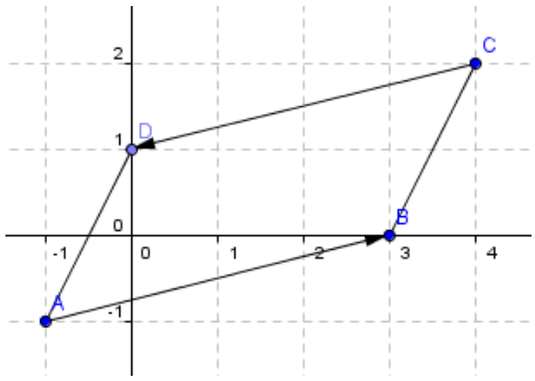
- ❑ $B = A + \overrightarrow{DC}$
- ❑ $D = C + \overrightarrow{AB}$
- ❑ $C = A + \overrightarrow{AD}$
- ❑ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$
- ❑ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$



Vorzeichen bei Richtungsvektoren

Vorzeichenwechsel (bei beiden Koordinaten) bewirkt Änderung der Orientierung
(Pfeil dreht sich um = „zeigt in die andere Richtung“)

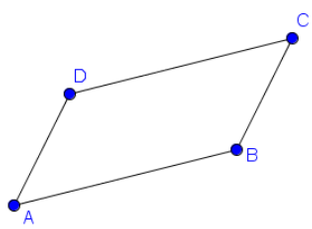
$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$



Beispiel:
Von einem Parallelogramm sind der Punkt C = (4/2) und der Richtungsvektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben. Berechne die Koordinaten von D!

Idee: der Vektor $\overrightarrow{CD}$ entspricht dem Vektor $\overrightarrow{AB}$ „in der anderen Richtung“
$\rightarrow\ \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$.

Berechnung:
$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad D = C + \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



Aufgabe 8: Gegeben ist das Parallelogramm ABCD (siehe Grafik). Kreuze die beiden zutreffenden Formeln an!

❑ $D = D + \overrightarrow{DC}$ ❑ $B = C - \overrightarrow{AD}$ ❑ $A = B - \overrightarrow{DC}$ ❑ $D = C + \overrightarrow{AB}$ ❑ $B = A + \overrightarrow{AD}$

Multiplikation von Richtungsvektoren mit einer Zahl

Zahl · Richtungsvektor → beide Koordinaten werden multipliziert

Beispiel: $3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \end{pmatrix}$

Richtungsvektor wird auf ein Vielfaches „gestreckt“ bzw. „gestaucht“

Beispiel: A = (-3/-2); B = (1/4) → Richtungsvektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

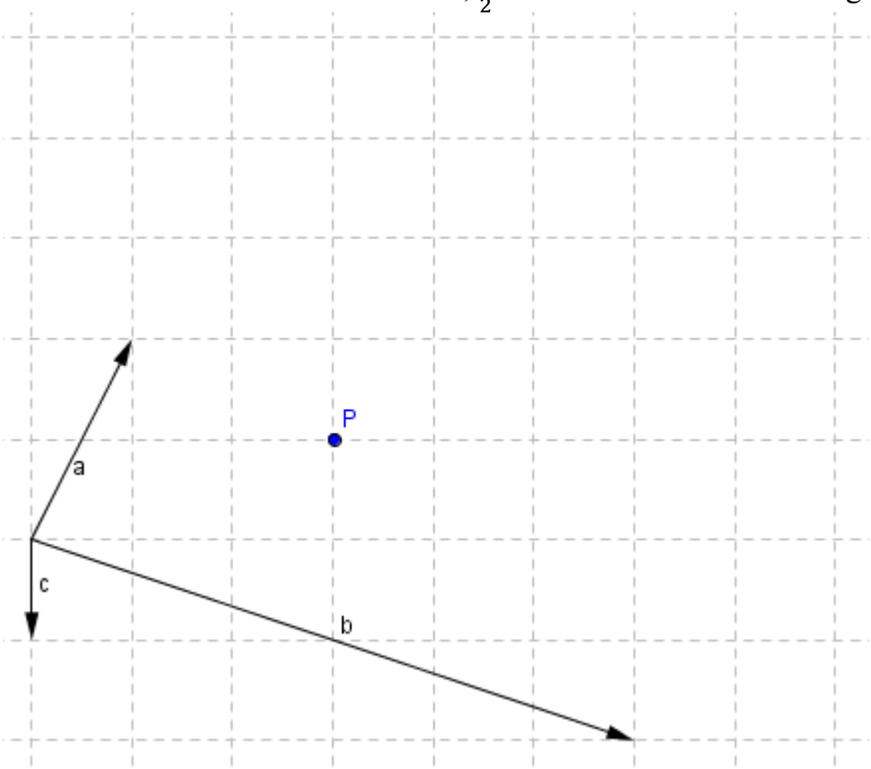
Wo liegt $C = A + 2 \cdot \overrightarrow{AB}$? →

$$C = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9: Berechne die Koordinaten des Vektors v!

a) $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $v = 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 10:
Stelle ausgehend vom Punkt P die Vektoren $2 \cdot \vec{a}$, $\frac{1}{2} \cdot \vec{b}$ und $-3 \cdot \vec{c}$ durch Pfeile grafisch dar!



Halbierungspunkt

Halbierungspunkt („Mitte“) von A und B: $H_{AB} = \frac{A+B}{2}$
zuerst Koordinaten addieren (zeilenweise), dann beide Koordinaten (Zeilen) durch 2

Beispiel: Bestimme den Halbierungspunkt von A = (6/-2) und B=(10/4)!

$$H_{AB} = \frac{A+B}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 16 \\ -2 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

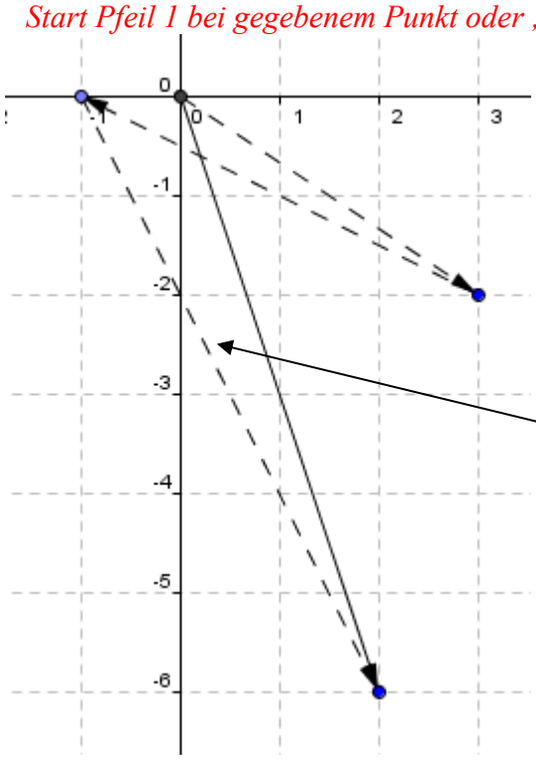
Aufgabe 11: Ermittle den Halbierungspunkt von A und B!
a) A=(-6/2); B=(-4/6) b) A=(3/7); B=(8/-1)

Resultierender Vektor

Beispiel: Ermittle den Vektor $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ a) durch Rechnung und b) durch Konstruktion (ausgehend vom Koordinatenursprung)!

a) Rechnung: $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

b) **Konstruktion von Richtungsvektoren**
Pfeile hintereinander zeichnen → Ende Pfeil 1 = Start von Pfeil 2 usw.
Ergebnispfeil = Verbindung von Start Pfeil 1 bis Ende letzter Pfeil
Start Pfeil 1 bei gegebenem Punkt oder „irgendwo" (zB im Ursprung)

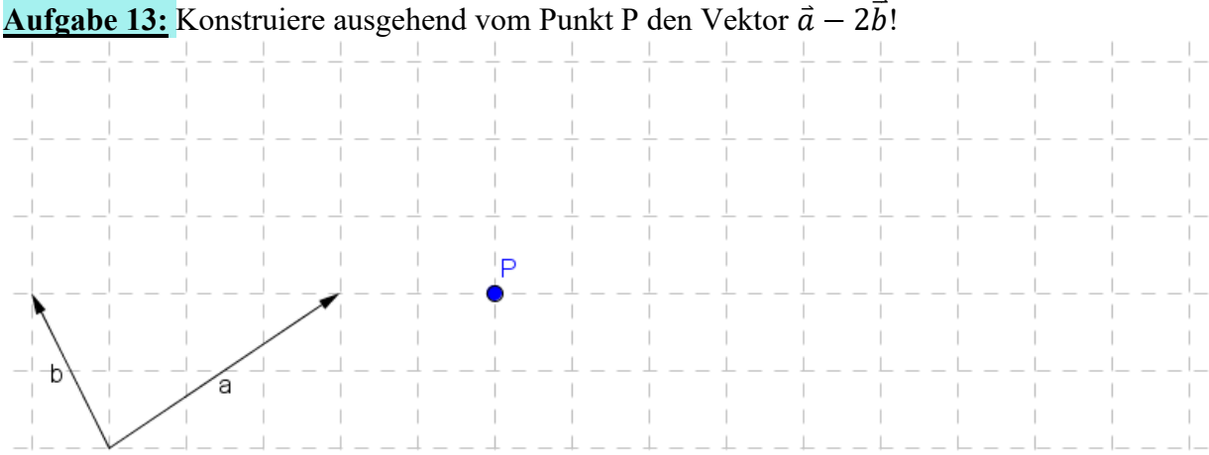


Vorsicht beim Einzeichnen von $-3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$*:*
man muss $\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ *einzeichnen, also mit*
-3 multiplizieren (Vorzeichen beachten!!)

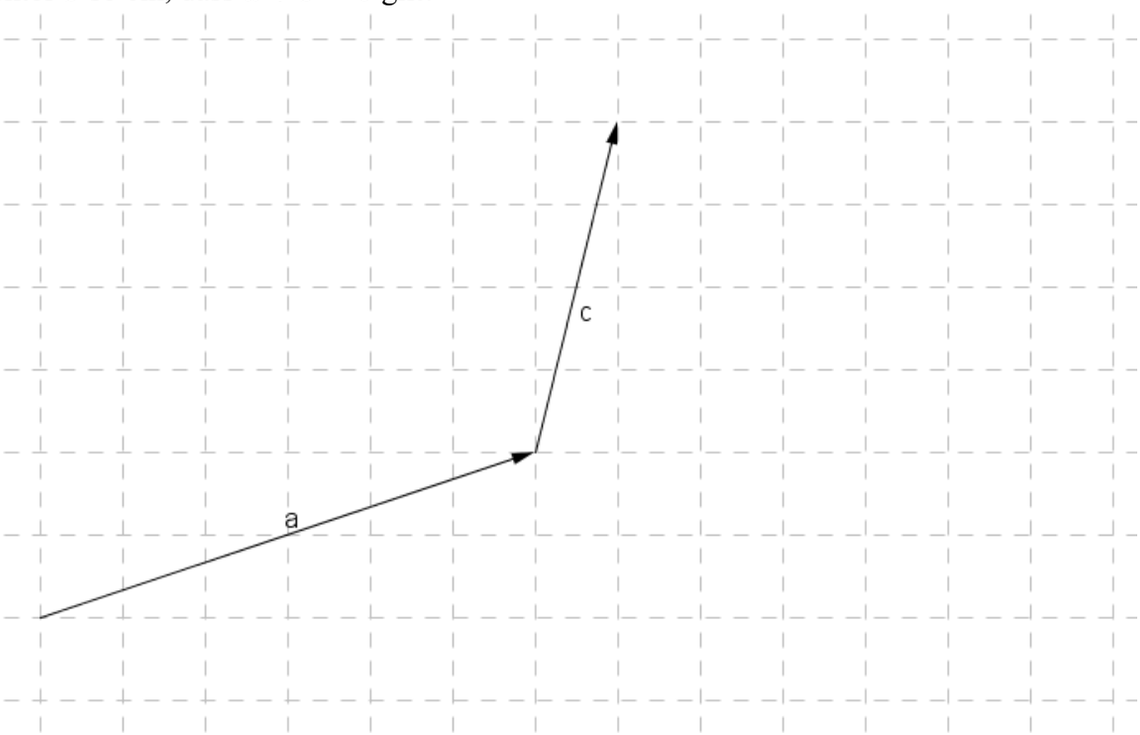
Aufgabe 12: Ermittle den Vektor v durch Rechnung sowie durch Konstruktion!

a) $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $v = 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 13: Konstruiere ausgehend vom Punkt P den Vektor $\vec{a} - 2\vec{b}$!



Aufgabe 14: Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{c}$. Zeichne in die gegebene Grafik einen Vektor $\vec{b}$ so ein, dass $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ gilt!



parallele Richtungsvektoren

Richtungsvektoren sind parallel, wenn ein Vektor ein Vielfaches des anderen ist

Beispiel 1: $\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ ist parallel zu $\begin{pmatrix}-6\\9\end{pmatrix}$, weil $\begin{pmatrix}-6\\9\end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$

Beispiel 2: $\begin{pmatrix}10\\y\end{pmatrix}$ ist parallel zu $\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$, wenn y = 6 ist (10 = 2·5 → dann muss y=2·3 sein)

Aufgabe 15: Sind die angegebenen Vektoren parallel?

a) $\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}12\\3\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}-7\\3\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}14\\-6\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}8\\11\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

Aufgabe 16: Bestimme die fehlende Koordinate so, dass die beiden Vektoren parallel sind:

a) $\begin{pmatrix}6\\y\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}-7\\4\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}x\\-8\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}x\\-3\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}12\\-9\end{pmatrix}$

Aufgabe 17: Kreuze die beiden zum Vektor $\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ parallelen Vektoren an!

❑ $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ ❑ $\begin{pmatrix}-4\\-8\end{pmatrix}$ ❑ $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ❑ $\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ ❑ $\begin{pmatrix}6\\-12\end{pmatrix}$

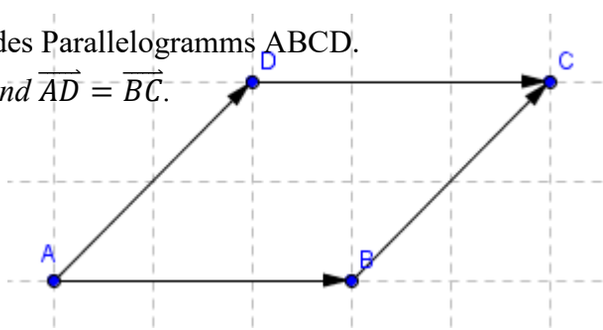
Kompetenzcheck: Vektoren im R²

1) Zeichne folgende Punkte in ein Koordinatensystem ein:
   A=(-3/-3); B=(2/-1); C=(2/-3); D=(-1/4); P=(-4/0); Q=(3/2).
   a) Zeichne folgende Richtungsvektoren (Pfeile) ein: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{PQ}$.
   b) Berechne die Richtungsvektoren $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{PQ}$.

2) Berechne den Richtungsvektor zwischen den Punkten A und B:
   a) A=(5/2); B=(7/4)
   b) A=(6/-3); B=(2/1)

3) Gegeben sind der Punkt P und der Richtungsvektor (Weg) von P nach Q. Berechne die Koordinaten des Punkts Q.
   a) P=(3/-1); $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$
   b) P=(-2/5); $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

4) Ermittle die Koordinaten des fehlenden Eckpunkts des Parallelogramms ABCD.
   Hinweis: In einem Parallelogramm gilt $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ *und* $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.
   a) A=(-2/-3); B=(1/-1); D=(-2/4)
   b) A=(-4/-4); B=(1/2); C=(3/5)



5) Ermittle den Vektor v (durch Rechnung):
   a) $v = \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$
   b) $v = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
   c) $v = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix}$

6) Ermittle den Vektor v durch Konstruktion und durch Rechnung.
   a) $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$
   b) $v = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \end{pmatrix}$

Lösungen:
1b) $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$
2a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$
3a) $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}$
4a) C=(1/6) b) D=(-2/-1)
5a) $\begin{pmatrix} 20 \\ -12 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 7 \\ -9 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$
6a) $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

senkrechte Richtungsvektoren („Kippregel“)→ Normalvektoren

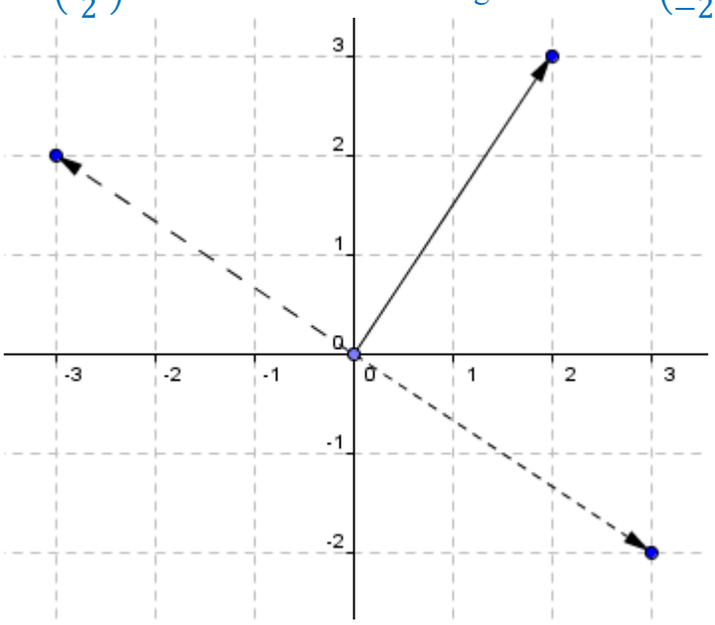
Normalvektor bedeutet: die Vektoren bilden einen rechten Winkel

Koordinaten vertauschen und ein Vorzeichen ändern ergibt einen Normalvektor
Koordinaten vertauschen und (danach!) Vorzeichen bei x-Koordinate ändern
→ ergibt um 90° nach links gedrehten („gekippten“) Vektor
Koordinaten vertauschen und (danach!) Vorzeichen bei y-Koordinate ändern
→ ergibt um 90° nach rechts gedrehten („gekippten“) Vektor

Linksdrehung entspricht der üblichen Reihenfolge, in der Punkte (zB eines Rechtecks) bezeichnet werden.

Beispiel: Richtungsvektor v = $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

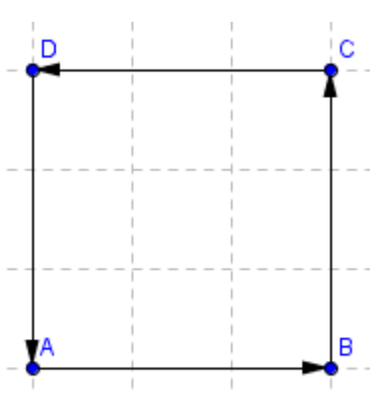
Drehung nach links: $\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ Drehung nach rechts: $\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$



Aufgabe 18: Finde einen zum Vektor $\overrightarrow{AB}$ normalen Vektor!
a) A=(-1/-3); B=(4/-2) b) B=(3/0); C=(4/4)

Aufgabe 19: Ermittle die fehlenden Koordinaten des Quadrats ABCD!
a) A=(5/6); B=(9/7) b) C=(6/-4); D=(12/-2)

Hinweis: *Vektor $\overrightarrow{AB}$ berechnen und 90° nach links drehen ergibt den Vektor $\overrightarrow{BC}$.*



Skalarprodukt und Orthogonalität („Rechtwinkligkeit“)

Skalarprodukt zweier Vektoren: $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} = 3\cdot 2 + 4\cdot(-3) = 6 - 12 = -6$

Regel: xKoordinate·xKoordinate + yKoordinate· yKoordinate

Zwei Richtungsvektoren sind orthogonal (bedeutet: bilden einen rechten Winkel), wenn das Skalarprodukt gleich 0 ist.

Schreibweise: $a \perp b$ bedeutet: a und b bilden einen rechten Winkel (sind orthogonal)

Aufgabe 20: Bestimme das Skalarprodukt der beiden Richtungsvektoren a und b. Sind diese beiden Vektoren orthogonal zueinander?

a) $\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$

Aufgabe 21: Bestimme die fehlende Koordinate so, dass die beiden Richtungsvektoren normal aufeinander stehen (normal = im rechten Winkel).

a) $\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}4\\y\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}x\\9\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}3\\-7\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}x\\6\end{pmatrix}$

Beispiel: Bestimme x so, dass $\begin{pmatrix}x\\3\end{pmatrix}$ normal zu $\begin{pmatrix}9\\-12\end{pmatrix}$ ist!

Lösung: Skalarprodukt muss 0 ergeben, also $\begin{pmatrix}x\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9\\-12\end{pmatrix} = 0$

$$\begin{aligned} x\cdot 9 + 3\cdot -12 &= 0\\ 9x - 36 &= 0\\ 9x &= 36\\ x &= 4 \end{aligned}$$

Aufgabe 22: Berechne die fehlenden Eckpunkte des Rechtecks ABCD!

a) A=(5/3); B=(7/5); C=(6/y); D=(x/y) b) A=(x/-9); B=(6/2); C=(4/5); D=(x/y)

Hinweis:

In einem Rechteck müssen die beiden Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ einen rechten Winkel bilden!

Beispiel: Die Punkte A = (-3|5), B=(5|7), C = (1|y) und D=(x|y) bilden ein Rechteck. Bestimme die fehlenden Koordinaten!

Lösung: $\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC} = C - B = \begin{pmatrix}1\\y\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\y-7\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 0 \quad\rightarrow\quad \begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\y-7\end{pmatrix} = 0$

$8\cdot -4 + 2\cdot(y-7) = 0$ *Klammer setzen!*

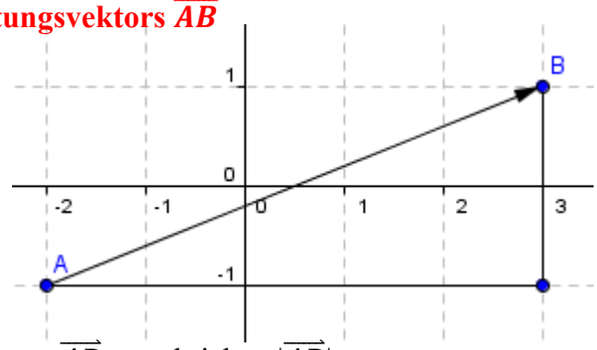
$$\begin{aligned} -32 + 2y - 14 &= 0\\ 2y - 46 &= 0\\ 2y &= 46\\ y &= 23 \quad\rightarrow\quad C = (1|23) \end{aligned}$$

$D = A + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4\\23-7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\21\end{pmatrix}$

Länge eines Richtungsvektors = Abstand zweier Punkte

Abstand der Punkte A und B = Länge des Richtungsvektors $\overrightarrow{AB}$

Beispiel: A=(-2/-1); B = (3/1) $\rightarrow \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$



Länge von $\overrightarrow{AB}$:
$\sqrt{5^2 + 2^2} = 5.39$ *(Satz von Pythagoras!)*

Man nennt die Länge von $\overrightarrow{AB}$ den **Betrag des Vektors** $\overrightarrow{AB}$, geschrieben $|\overrightarrow{AB}|$.

Formel: $\left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Durch das Quadrieren fällt das Vorzeichen weg $\rightarrow$
Berechnung wird einfacher, wenn man das Vorzeichen-Minus gleich weglässt

Beispiel: $\left|\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4^2 + 7^2} = 8.06$ statt $\sqrt{4^2 + (-7)^2} = 8.06$

Aufgabe 24: Berechne den Betrag des Vektors v.
a) $v = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ b) $v = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $v = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

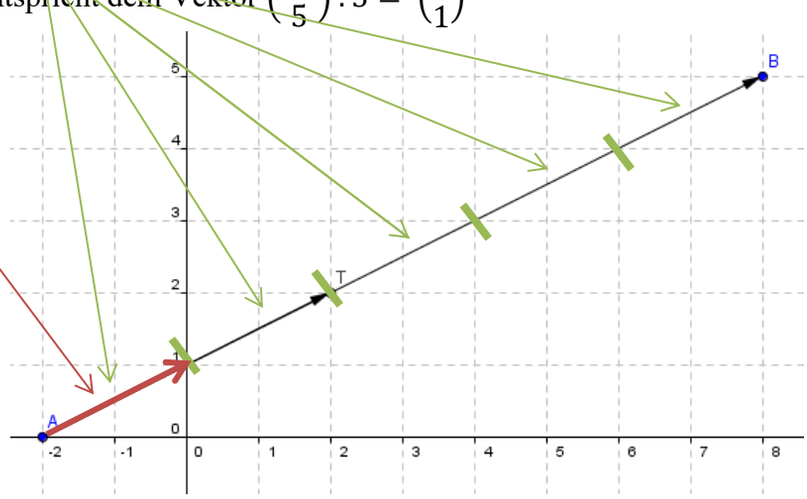
Aufgabe 25: Berechne den Abstand der Punkte A und B.
a) A=(3/5); B=(1/-2) b) A=(-2/7); B=(5/3)

Teilungspunkte

Beispiel: Wo liegt der Punkt T, welcher die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis 2:3 teilt?
A = (-2/0); B = (8/5)

Verhältnis 2:3 bedeutet 2 + 3 = 5 Teilstrecken
$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow$ eine Teilstrecke entspricht dem Vektor $\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} : 5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

von A bis T benötigt man zwei solche Teilstrecken
$T = A + 2 \cdot Teilstreckenvektor$
$= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$



Aufgabe 26: Bestimme jenen Punkt T, welcher die Strecke $\overline{AB}$ im angegebenen Verhältnis teilt.
a) A = (1/4); B = (-5/1); Verhältnis 2:1 b) A = (-4/-3); B = (10/4); Verhältnis 2:5

Aufgabe 27: Der Punkt T teilt die Strecke $\overline{AB}$ im angegebenen Verhältnis. Ermittle die Koordinaten des fehlenden Endpunkts!
a) A=(7/-5); T=(9/1); Verhältnis 3:7 b) T=(-3/5); B=(11/-2); Verhältnis 2:5

Hinweis:
Der Vektor $\overrightarrow{AT}$ entspricht 3 Teilstrecken $\rightarrow$ $\overrightarrow{AT}$: 3 ergibt einen Teilstreckenvektor von T bis B benötigt man dann 7 Teilstreckenvektoren

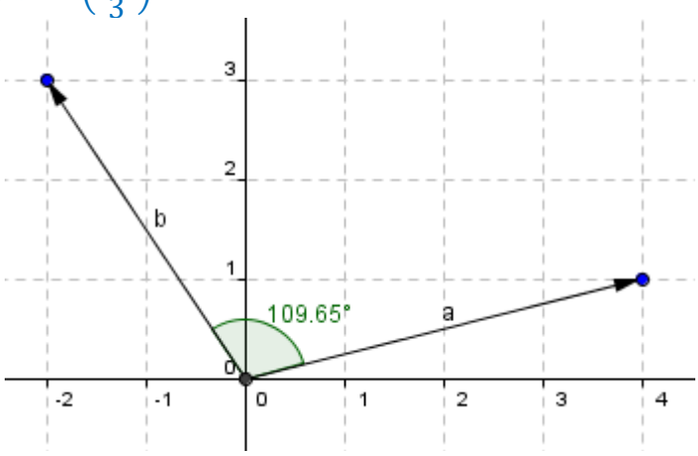
Winkel zwischen zwei Richtungsvektoren

Winkel α wird mit folgender Formel bestimmt:

$$\cos(\alpha) = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|}$$

cos (Abkürzung für cosinus) ist dabei eine spezielle Winkelfunktion (eigene Taste am Taschenrechner).

Beispiel: $a = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$



Skalarprodukt bilden (siehe oben)

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right|}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{4 \cdot -2 + 1 \cdot 3}{\underbrace{\sqrt{4^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2}}_{14.8661}}$$

Betrag bilden (siehe oben) und dann multiplizieren

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-5}{14.8661}\right) = 109.65°$$

Umkehrfunktion: am Taschenrechner 2nd und cos drücken

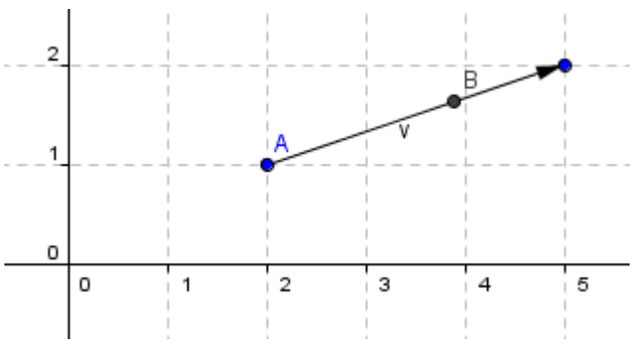
Anmerkung: *Für den Winkel zwischen zwei Vektoren ist immer auch 180° - α eine mögliche (richtige) Antwort.*

Aufgabe 28: Berechne den Winkel zwischen den beiden Richtungsvektoren a und b:
a) $a = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $a = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Abtragen bestimmter Streckenlängen

wissen schon, wie man einen Richtungsvektor von einem Punkt aus abtragen kann
(wenn nicht: bei Aufgabe 1 nachschaun ☺)
Richtungsvektor kann dabei beliebig lang sein →
Problem jetzt: in der gegebenen Richtung eine bestimmte Länge abtragen

Beispiel: Punkt A = (2/1); Punkt B ist von A aus 2 Längeneinheiten (zB 2cm) in Richtung $v = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ entfernt. Wie lauten die Koordinaten von B?

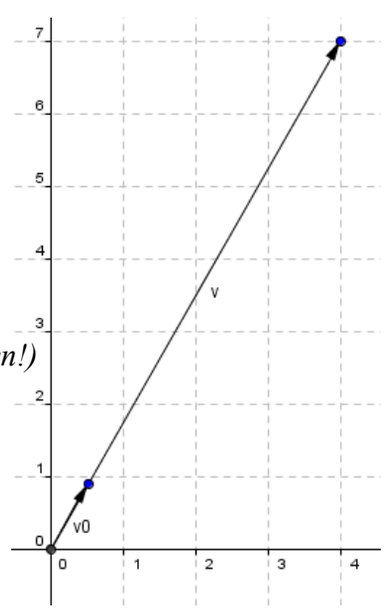


Formel: $B = A + \frac{\text{Entfernung (Längeneinheiten)}}{\text{Betrag von Vektor } v} \cdot v$

$$B = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \frac{2}{\sqrt{3^2+1^2}} \cdot \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + 0.6325 \cdot \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3.90\\1.63\end{pmatrix}$$

Aufgabe 29: Bestimme die Koordinaten des Endpunkts B:
a) $A = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$; B liegt in Richtung $v = \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$; Entfernung $\overline{AB} = 4$
b) $A = \begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$; B liegt in Richtung $v = \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$; Entfernung $\overline{AB} = 6$

Einheitsvektor



gegeben: Richtungsvektor v, zB $v = \begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}$
Einheitsvektor: Vektor in gleicher Richtung,
aber mit Länge (Betrag) gleich 1

Berechnung:
Einheitsvektor von v, geschrieben v_0: $\boldsymbol{v_0} = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$
(beide Koordinaten dividieren!)

Beispiel (Angaben von oben):

$$v_0 = \frac{\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}}{\sqrt{4^2+7^2}} = \frac{\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}}{0.124} = \begin{pmatrix}0.496\\0.868\end{pmatrix}$$

Aufgabe 30: Ermittle den Einheitsvektor zum Vektor v.
a) v = $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ b) v = $\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$

Aufgabe 31: Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an!

❑ Zwei Vektoren stehen normal aufeinander, wenn ein Vektor ein Vielfaches des anderen ist.
❑ Der Einheitsvektor von $\overrightarrow{AB}$ entspricht dem Abstand zweier Punkte A und B.
❑ Der Vektor $-\vec{v}$ bildet einen Normalvektor zum Vektor $\vec{v}$.
❑ Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bilden einen rechten Winkel, wenn ihr Skalarprodukt 0 ergibt.
❑ Der Betrag eines Einheitsvektors hat stets den Wert 1.

Aufgabe 32: Ergänze die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils zutreffenden Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

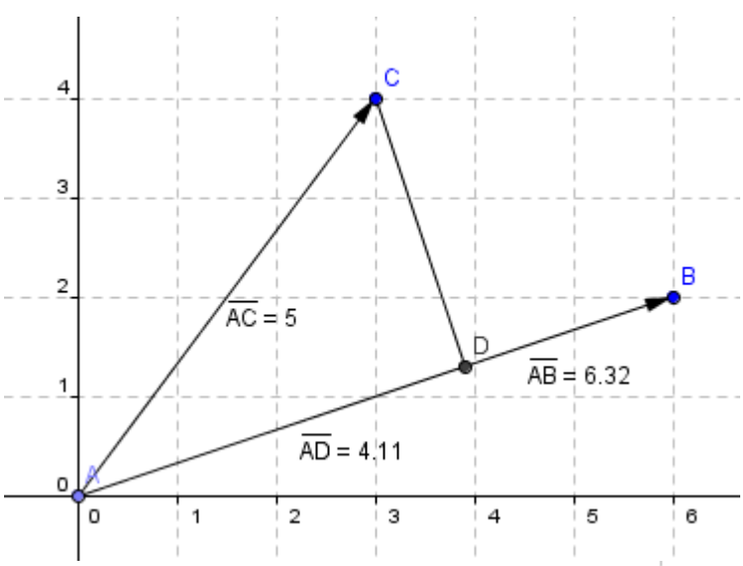
Die beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ sind ____①____, weil ____②____ .

①	
parallel	❑
zueinander normal	❑
gleich gerichtet	❑

②	
ihr Skalarprodukt 0 ergibt	❑
alle Koordinaten ganzzahlig sind	❑
$\vec{b}$ ein Vielfaches von $\vec{a}$ ist	❑

Ergänzung: geometrische Bedeutung des Skalarprodukts

$a \cdot b$ = Länge von a mal Länge der Normalprojektion von b auf a



Beispiel:

Vektor $a = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

Vektor $b = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Normalprojektion von a auf b:
Vektor $\overrightarrow{AD}$, Länge $\overline{AD} = 4.11$

Skalarprodukt:
$a \cdot b = 6 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 26$

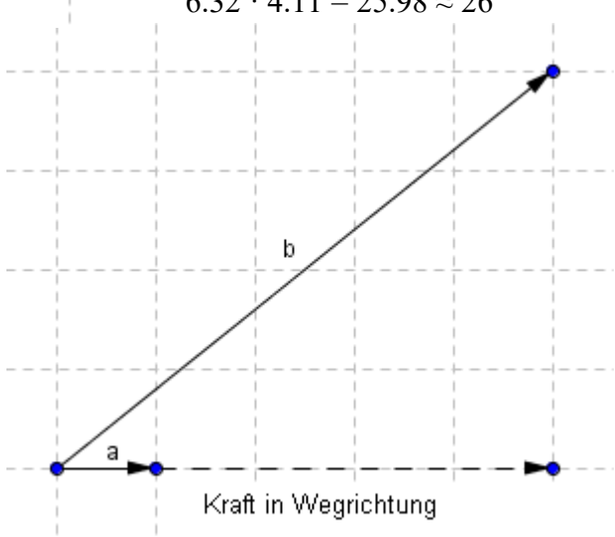
Länge von a mal Länge der Normalprojektion:
$6.32 \cdot 4.11 = 25.98 \approx 26$

Spezialfall:

a gibt Wegrichtung an (Vektor mit Länge 1)

b gibt Wirkung einer Kraft an
(Betrag von b entspricht Stärke der Kraft)

→a·b entspricht der Kraft in Wegrichtung

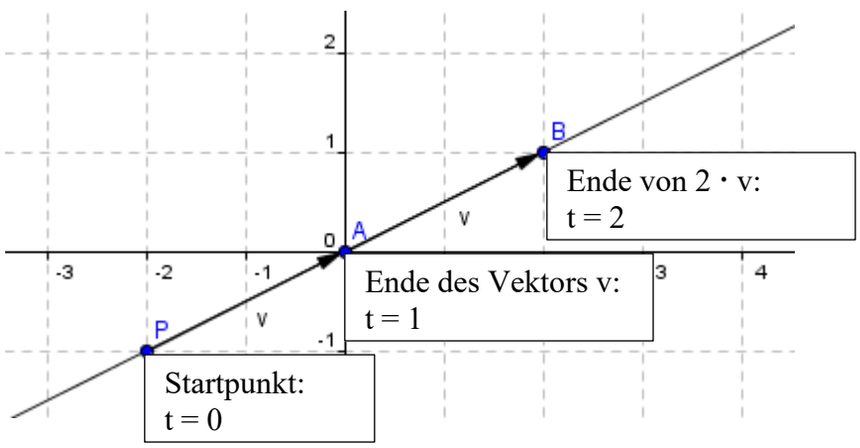


GERADENGLEICHUNG IM $\mathbb{R}^2$

geradlinige Bewegung (Flugzeug am Radarschirm, Schiff am Ozean, …) wird beschrieben durch
- **Startpunkt P** = (-2/-1) und
- **Richtungsvektor** $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bedeutung des Richtungsvektors:
in einer Sekunde (andere Zeiteinheit natürlich möglich) bewegt sich das Objekt um den Vektor $\vec{v}$
Betrag von $\vec{v}$ = Geschwindigkeit des Objekts

Parameter t → Zeitdauer („wie lange das Objekt unterwegs ist“)

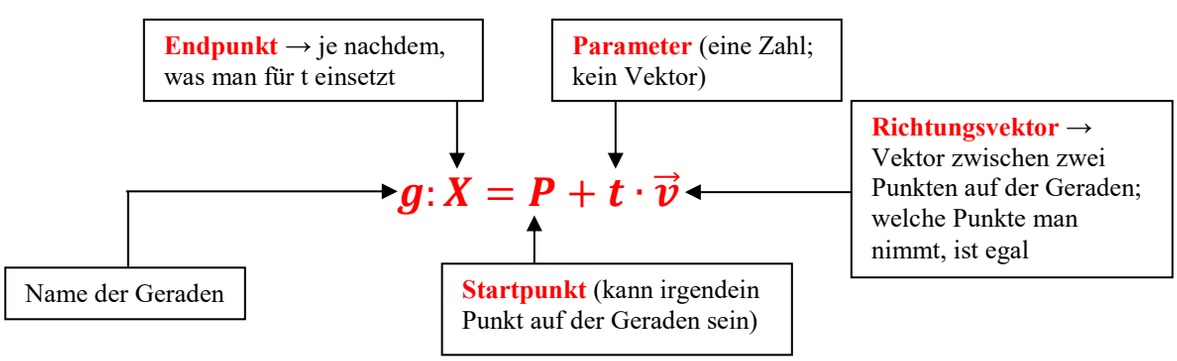


nach 1 Sekunde befindet sich das Objekt im Punkt $A = P + 1 \cdot v = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

nach 2 Sekunden befindet sich das Objekt im Punkt $B = P + 2 \cdot v = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

nach t Sekunden befindet sich das Objekt im Punkt $P + t \cdot v = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Geradengleichung:

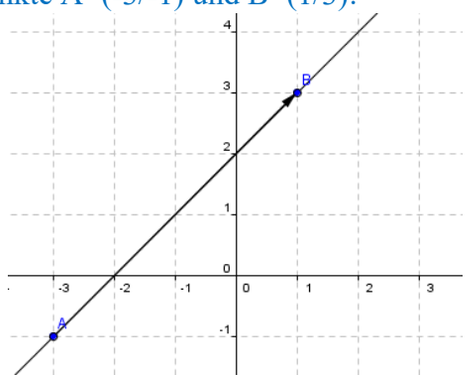


Aufgabe 33: Berechne den Punkt Q auf der gegebenen Geraden, wenn man den gegebenen Parameterwert t einsetzt! („*Wo befindet sich das Objekt nach t Sekunden?*“)

a) g: $X = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$; t = 2 b) g: $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$; t = -1

Gerade durch 2 Punkte

Beispiel: Bestimme die Gleichung der Geraden durch die Punkte A=(-3/-1) und B=(1/3)!



Richtungsvektor der Geraden = Vektor von A nach B

$\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$

als Startpunkt kann man A wählen (B wäre genauso möglich)

Geradengleichung:

$g: \vec{X} = \begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$

Richtungsvektor kann durch einen parallelen Vektor ersetzt werden
→ beide Koordinaten mit derselben Zahl multiplizieren oder dividieren

$\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$ ist parallel zu $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$[beide Koordinaten durch 4 dividieren]

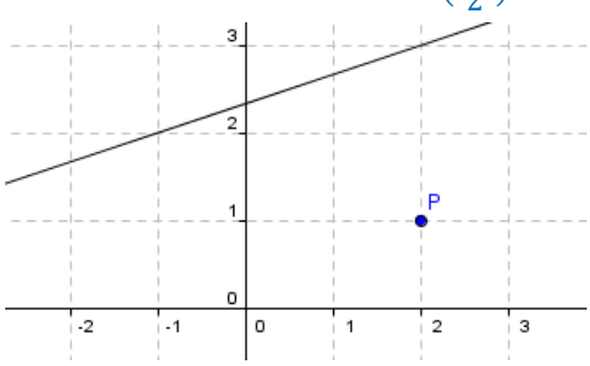
Geradengleichung kann auch so geschrieben werden: $g: \vec{X} = \begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

Aufgabe 34: Ermittle die Gleichung der Geraden durch die beiden Punkte P und Q!

a) P=(5/3); Q=(7/-1) b) P=(-3/0); Q=(2/2)

Lagebeziehung Punkt – Gerade

Beispiel: Liegt der Punkt P=(2/1) auf der Geraden $g: \vec{X} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$?



Punkt P auf der linken Seite der Geradengleichung einsetzen (statt *X*):

$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$→ somit 2 Gleichungen: $\begin{aligned}2 &= -1 + 3 \cdot t\\ 1 &= \ \ 2 + 1 \cdot t\end{aligned}$

1. Zeile: 2 = -1 + 3t /+1
3 = 3t /:3
1 = t

2. Zeile: 1 = 2 + 1t /-2
-1 = 1t
-1 = t

2 verschiedene t → Punkt P liegt nicht auf g [zwei Mal gleiches Ergebnis → P liegt auf g]

Aufgabe 35: Überprüfe (durch Rechnung), ob der Punkt P auf der Geraden g liegt!

a) P=(5/2); $g: \vec{X} = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ b) P=(6/-2); $g: \vec{X} = \begin{pmatrix}12\\-6\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$

Beispiel: Bestimme die fehlende Koordinate so, dass der Punkt P auf der Geraden g liegt!

P = (2/y); $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

P einsetzen (statt X) $\rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. Zeile: 2 = -1 + 3t /+1
3 = 3t / :3
1 = t → t=1 in der zweiten Zeile einsetzen: y = 2 + 1·1 = 3
→ Punkt P=(2/3)

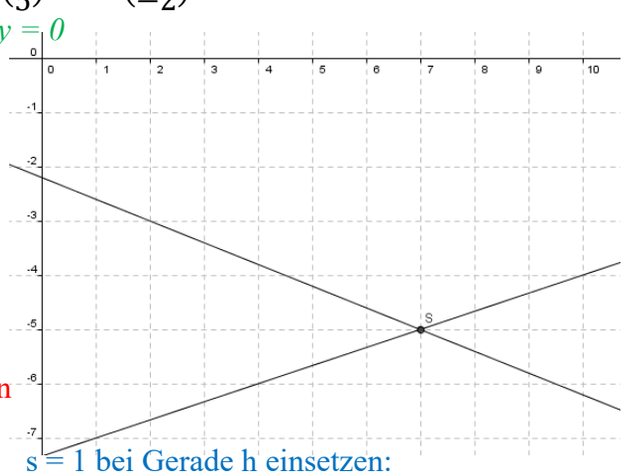
Aufgabe 36: Bestimme die fehlende Koordinate so, dass der Punkt auf der gegebenen Geraden liegt!

a) A=(-2/y); $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ b) A=(x/3); $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) Ermittle den Schnittpunkt der Geraden $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit der x-Achse!

Hinweis: *für einen Punkt auf der x-Achse gilt y = 0*

Schnittpunkt von zwei Geraden



Beispiel: Berechne den Schnittpunkt der beiden Geraden $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$!

Gleichungen von g und h zeilenweise gleichsetzen

1. Zeile: -3 + 5t = 4 + 3s / ·2
2. Zeile: -1 – 2t = -6 + s / ·5

$\boxed{+}$ $\begin{cases} -6 + 10t = 8 + 6s \\ -5 - 10t = -30 + 5s \end{cases}$

-11 = -22+ 11s / +22
11 = 11s / :11
1 = s

s = 1 bei Gerade h einsetzen:

$\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt S = (7/-5)

Aufgabe 37: Berechne den Schnittpunkt der beiden Geraden g und h.

a) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 11 \\ -9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$; $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} -4 \\ -9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Spezialfälle:

beim Lösen des Gleichungssystems fallen s und t weg und es bleibt eine wahre Aussage stehen (zum Beispiel 1=1) → g und h sind identisch (beide Gleichungen ergeben dieselbe Gerade; unendlich viele Schnittpunkte)

wenn eine falsche Aussage (zum Beispiel 2=3) stehen bleibt → g und h sind parallel (kein Schnittpunkt)

Aufgabe 38: Bestimme die Lagebeziehung der beiden Geraden g und h!

a) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$; $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$

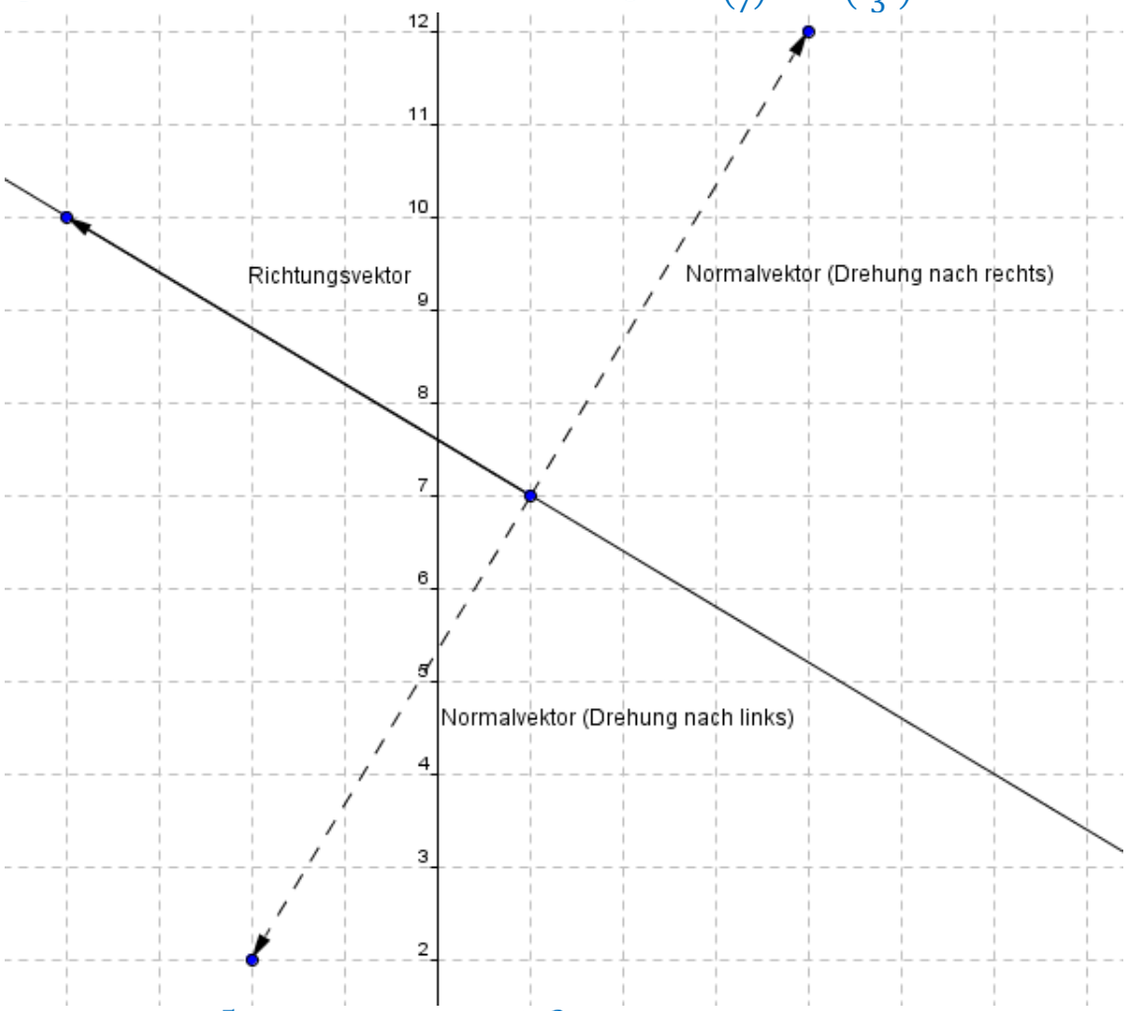
b) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

Normalvektor einer Geraden

Normalvektor einer Geraden = Normalvektor des Richtungsvektors

Erinnerung (Kippregel): Koordinaten vertauschen und (danach) ein Vorzeichen ändern)

Beispiel: Wie lautet der Normalvektor der Geraden $g: \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$?



Richtungsvektor $\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix} \rightarrow$ Normalvektor $\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}$ [bei Drehung nach links]

zweite mögliche Antwort: Normalvektor $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ [bei Drehung nach rechts]

Aufgabe 39: Gib einen Normalvektor zur Geraden g an!

a) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\9\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$

b) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix}-3\\8\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$

Aufgabe 40: Ergänze die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils zutreffenden Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Gegeben ist die Gerade g: $X = \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$. Der Vektor _____①_____ ist ein Punkt auf der Geraden g, und der Vektor _____②_____ ist ein Normalvektor von g.

①	
$\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$	❑
$\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$	❑
$\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$	❑

②	
$\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$	❑
$\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$	❑
$\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$	❑

Normalvektorform einer Geraden - Geradengleichung

(Funktionsgleichung einer Geraden)

Beispiel: Ermittle die Gleichung der Geraden $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$!

Normalvektor von g: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Formel (Normalvektorform):

$$\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{n} \cdot P$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

-2·x + 3·y = -2·-4 + 3·-1
-2x + 3y = 8 – 3
-2x + 3y = 5 → **Geradengleichung in der Form ax + by = c**

Funktionsgleichung einer Geraden hat die Form y = k·x + d → weiter umformen:
-2x + 3y = 5 / +2x
3y = 2x + 5 / :3
y = 2/3 x + 5/3 → **Funktionsgleichung in der Form y = k·x + d**

Aufgabe 41: Ermittle die Gleichung der Geraden in der Form y = k·x + d!

a) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ b) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 42: Gib einen Normalvektor zur Geraden g: 7x – 3y = 9 an!

Aufgabe 43:

a) Gib eine Geradengleichung für die x-Achse bzw. für die y-Achse an!
b) Nicht jede Gerade lässt sich durch eine Funktionsgleichung der Form y = k·x + d darstellen. Begründe, warum diese Aussage zutrifft!

Geradengleichung → Parameterform

Geradengleichung: 5x – 2y = 8

Koordinaten des Normalvektors

→ $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ → Richtungsvektor = $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ (Kippregel!)

(irgendein) Punkt auf der Geraden → für x (oder y) irgendeine Zahl einsetzen
(man kann sich hier irgendeine Zahl aussuchen, egal welche)

Beispiel: setzen x = -2 ein → 5·(-2) – 2y = 8 /+10
- 2y = 18 /: -2
y = -9 → Punkt = (2/-9)

Parameterform: X = Punkt + t · Richtungsvektor → $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

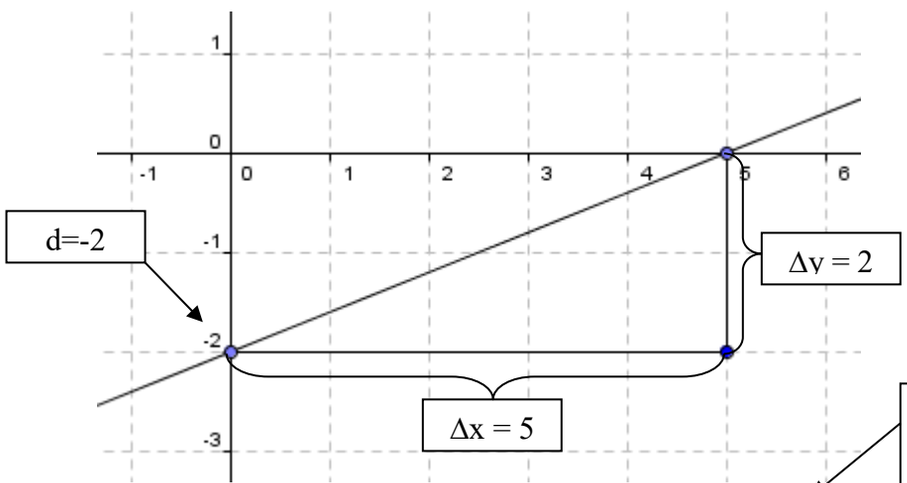
Aufgabe 44: Ermittle die Parameterform der Geraden g!

a) 3x – 4y = 12 b) 2x + 3y = 18

Funktionsgleichung → Parameterform

Funktionsgleichung einer Geraden: $y = \frac{2}{5}x - 2$

Steigung $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ d = Schnittpunkt mit der y-Achse



$k = \frac{2}{5} \rightarrow$ Richtungsvektor nach Schema „Nenner oben, Zähler unten“

Δx und Δy sind die Koordinaten des Richtungsvektors $\rightarrow \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt mit der y-Achse (x=0, y = d) → P=(0/-2)

Parameterform: $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 45: Ermittle die Parameterform der Geraden g!

a) y = 3/7 x + 5 b) y = -3/5 x – 1

Parallele Geraden

Beispiel 1(Gerade in Parameterform): Gesucht ist die zur Geraden $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ parallele Gerade durch den Punkt P=(1/3).

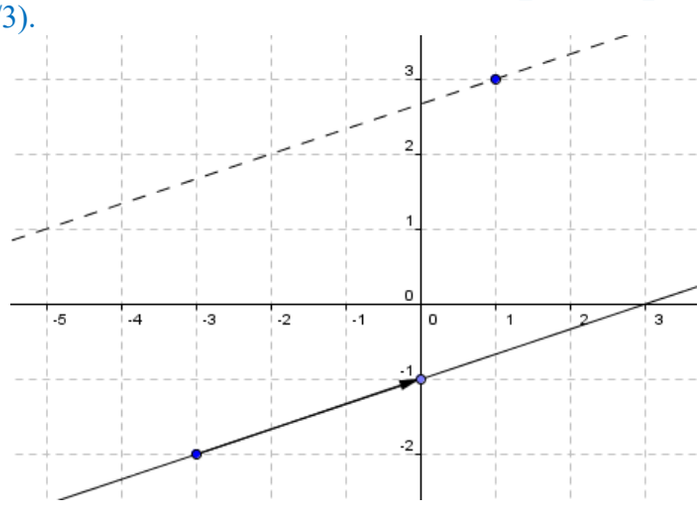
parallel

→ gleicher Richtungsvektor

→ einfach in der Geradengleichung den vorhandenen Punkt durch P ersetzen

→ parallele Gerade:

$$\vec{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{Punkt\ P\ einsetzen} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Beispiel 2 (Gerade in Normalvektorform): Gesucht ist die zur Geraden g: 4x + 3y = 7 parallele Gerade durch den Punkt P = (-2/3).

parallel → linke Seite bleibt gleich (gleicher Normalvektor)
→ Koordinaten von P links einsetzen → neue rechte Seite
→ parallele Gerade: 4x + 3y = 4·-2 + 3·3
4x + 3y = 1

Koordinaten von P

Aufgabe 46: Gib die Gleichung der zu g parallelen Geraden durch den Punkt P an!

a) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$; P=(9/-7)

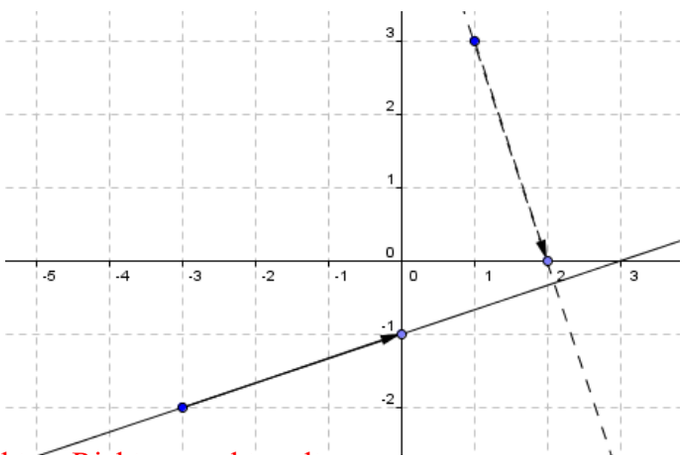
b) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 13 \\ -7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$; P=(2/5)

c) g: 7x – 3y = 8; P=(1/-1)

d) g: 11x + 4y = 23; P=(2/-7)

Normale Geraden

Beispiel 1
(Gerade in Parameterform):
Gesucht ist die zur Geraden g:
$\vec{X} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ parallele Gerade durch den Punkt P=(1/3).



normal → Richtungsvektor neu senkrecht zu Richtungsvektor alt
→ Kippregel: Richtungsvektor$_{alt}$ = $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ → Richtungsvektor$_{neu}$ = $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ [oder $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$]
→ außerdem in der Geradengleichung den vorhandenen Punkt durch P ersetzen
→ normale Gerade: $\vec{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{Punkt\ P\ einsetzen} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Beispiel 2 (Gerade in Normalvektorform): Gesucht ist die zur Geraden g: 4x + 3y = 7 normale Gerade durch den Punkt P = (-2/3).

normal → Normalvektor$_{neu}$ = Normalvektor$_{alt}$ gekippt
→ Normalvektor$_{alt}$ = $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ → Normalvektor$_{neu}$ = $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ [oder $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$]
→ allgemeine Formel (siehe weiter oben!): $\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{n} \cdot P$
→ normale Gerade: $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$
-3x + 4y = -3 · -2 + 4·3
-3x + 4y = 18

Aufgabe 47: Gib die Gleichung der zu g normalen Geraden durch den Punkt P an.

a) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$; P=(9/-7)

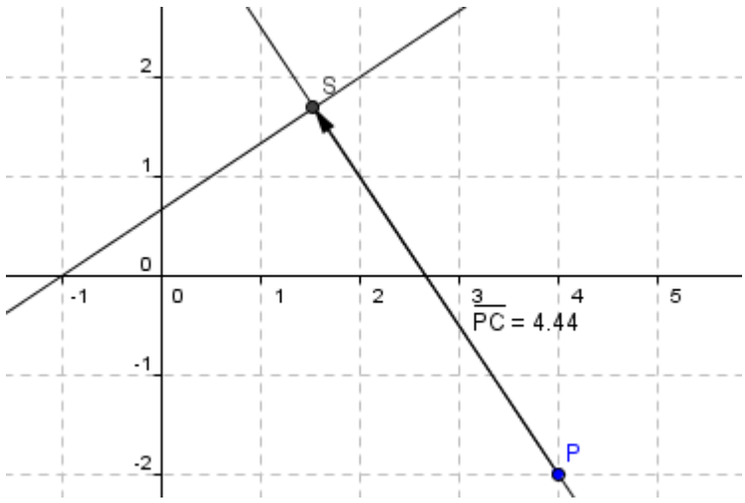
b) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 13 \\ -7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$; P=(2/5)

c) g: 7x – 3y = 8; P=(1/-1)

d) g: 11x + 4y = 23; P=(2/-7)

Normalprojektion und Abstand eines Punkts von einer Geraden

Beispiel: Ermittle den Abstand des Punkts P=(4/-2) von der Geraden $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$!



Schritt 1: Normale Gerade zu g durch den Punkt P

Richtungsvektor von g: $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow$ Richtungsvektor der normalen Geraden: $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

normale Gerade durch den Punkt P: $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Schritt 2: Schnittpunkt der beiden Geraden g und h → Normalprojektion von P auf g

5 – 3t = 4 + 2s / ·3
4– 2t = -2 – 3s / ·2

15 – 9t = 12 + 6s
8 – 4t = -4 – 6s

23– 13t = 8 /-23
– 13t = -15 /: -13
t = 1.15

t = 1.15 → Schnittpunkt:

$\vec{S} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + 1.15 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.55 \\ 1.70 \end{pmatrix}$

Schritt 3: Abstand von P und g = Abstand $\overline{PS}$ = Betrag von $\overrightarrow{PS}$

$\overrightarrow{PS} = S - P = \begin{pmatrix} -2.45 \\ 3.70 \end{pmatrix} \rightarrow \overline{PS} = \left|\begin{pmatrix} -2.45 \\ 3.70 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2.45^2 + 3.70^2} = 4.44$

Aufgabe 48: Ermittle die Normalprojektion von P auf g sowie den Abstand des Punkts P von der Geraden g!

a) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$; P=(1/-7)

b) g: 7x + 3y = 1; P=(-4/29)

Hesse'sche Normalform

gegeben: Gerade in Normalvektorform → g: 3x – 5y = 12

wissen daher (siehe oben): Normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$, Betrag $|\vec{n}| = \sqrt{3^2 + 5^2} = 5.83$

umformen: 3x – 5y = 12 / -12 **(auf der rechten Seite muss 0 stehen)**

3x – 5y – 12 = 0 / :5.83 **(durch den Betrag vom Normalvektor dividieren)**

$\frac{3x-5y-12}{5.83} = 0$

Hesse'sche Normalform: $\boldsymbol{d = \frac{3x-5y-12}{5.83}}$

Verwendung: *Punkt P einsetzen → Ergebnis d ist der Abstand von P zur Geraden g*
falls d=0 → Punkt P liegt auf g [Vorzeichen von d kann man weglassen]

Beispiel: P = (4/-3) $\rightarrow d = \frac{3\cdot 4-5\cdot(-3)-12}{5.83} = 4.63$

→ Abstand von P zur Geraden g beträgt 4.63.

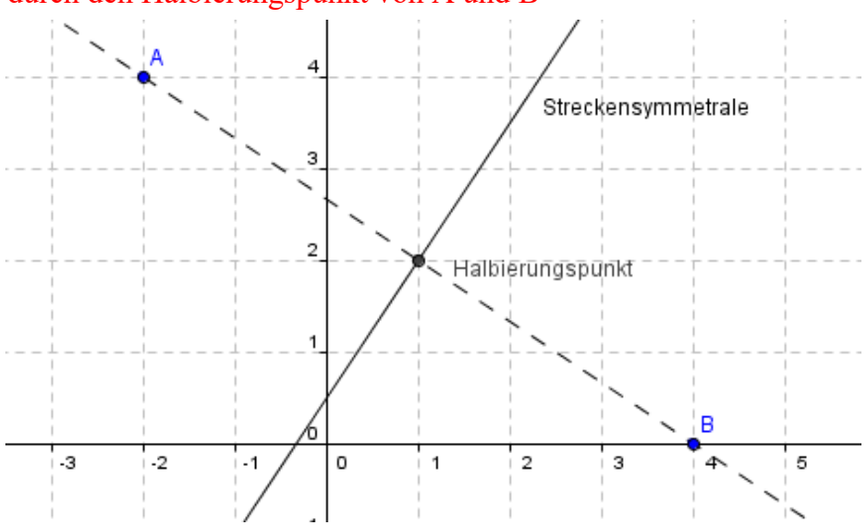
Aufgabe 49: Überprüfe mittels der Hesse'schen Normalform ob der Punkt P auf g liegt bzw. ermittle gegebenenfalls den Abstand von P zu g!

a) g: 7x + 2y = 5; P=(-3/6) b) g: 8x – 3y = 7; P=(2/3)

Streckensymmetrale

Normale (senkrechte) Geraden durch den Halbierungspunkt von A und B

Beispiel: A = (-2/4); B=(4/0)



Halbierungspunkt:

$H_{AB} = \frac{1}{2}(A + B) = (1/2)$

Richtungsvektor:

$\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$

→ Normalvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Streckensymmetrale:

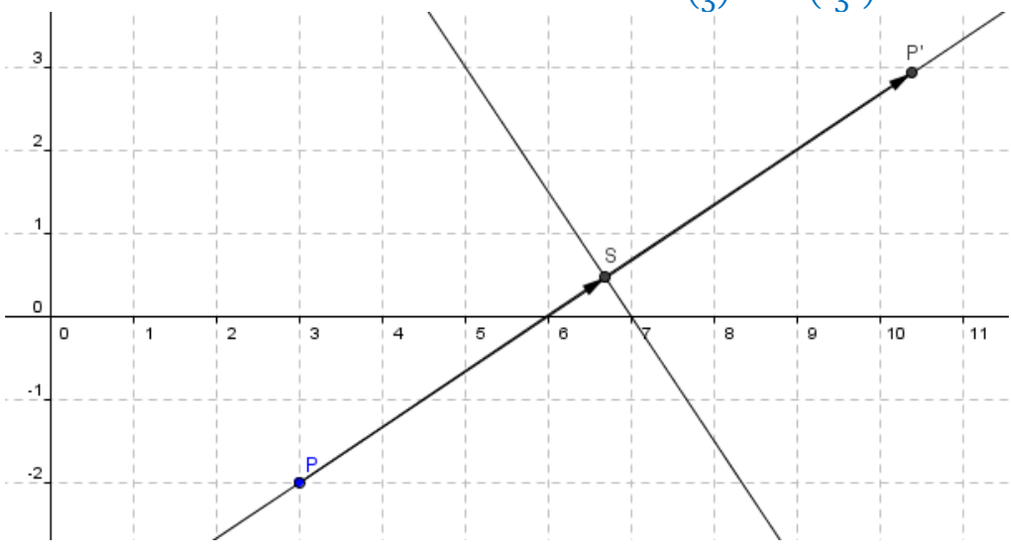
$s_{AB}: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Aufgabe 50: Berechne die Streckensymmetrale der Punkte A und B.

a) A=(-1/6); B=(5/2) b) A=(8/4); B=(2/-4)

Spiegeln von Punkten an einer Geraden

Beispiel: Spiegle den Punkt P=(3/-2) an der Geraden $g: \vec{X} = \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$.



Schritt 1: Normale Gerade zu g durch den Punkt P

Richtungsvektor von g: $\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} \rightarrow$ Richtungsvektor der normalen Geraden: $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

normale Gerade durch den Punkt P: $h: \vec{X} = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

Schritt 2: Schnittpunkt der beiden Geraden g und h

$5 - 2t = 3 + 3s \quad / \cdot 3$
$3 + 3t = -2 + 2s \quad / \cdot 2$

$15 - 6t = 9 + 9s$
$\underline{6 + 6t = -4 + 4s}$
$21 = 5 + 15s \quad /-5$
$16 = 15s \quad /:15$
$1.07 = s$

s = 1.07 $\rightarrow$ Schnittpunkt:

$$\vec{S} = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} + 1.07 \cdot \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6.21\\0.14\end{pmatrix}$$

Schritt 3: gespiegelter Punkt P´=S + $\overrightarrow{PS}$

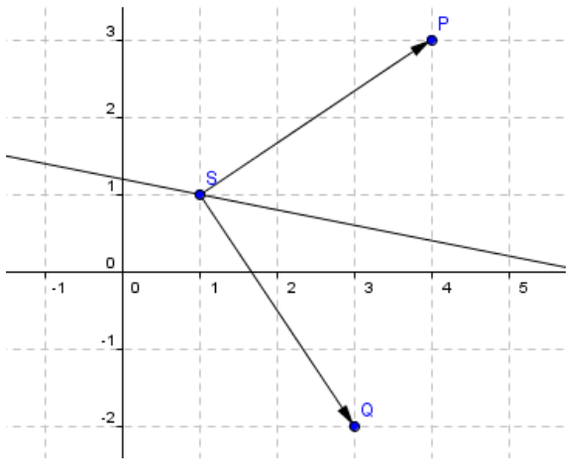
$$\overrightarrow{PS} = S - P = \begin{pmatrix}3.21\\2.14\end{pmatrix} \rightarrow P' = \begin{pmatrix}6.21\\0.14\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3.21\\2.14\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9.42\\2.28\end{pmatrix}$$

Aufgabe 51: Spiegle den Punkt P an der Geraden g.

a) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix}-7\\-3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$; P=(7/-11)

b) g: 3x – 2y = 4; P=(8/-3)

Zusatzaufgabe: Winkelsymmetrale



Winkel <PSQ gegeben durch 3 Punkte
(siehe Zeichnung)

Richtungsvektor der Winkelsymmetralen:
$\vec{v} = \overrightarrow{SP_0} + \overrightarrow{SQ_0}$

Beispiel: P = (4/3); S=(1/1); Q=(3/-2)

$\overrightarrow{SP} = P - S = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ Einheitsvektor: $\overrightarrow{SP_0} = \frac{1}{|\overrightarrow{SP}|}\overrightarrow{SP} = \frac{1}{\sqrt{3^2+2^2}}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.83 \\ 0.55 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{SQ} = Q - S = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \rightarrow$ Einheitsvektor: $\overrightarrow{SQ_0} = \frac{1}{|\overrightarrow{QP}|}\overrightarrow{QP} = \frac{1}{\sqrt{2^2+3^2}}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.55 \\ -0.83 \end{pmatrix}$

Richtungsvektor der Winkelsymmetralen: $\vec{v} = \overrightarrow{SP_0} + \overrightarrow{SQ_0} = \begin{pmatrix} 1.38 \\ -0.28 \end{pmatrix}$

Winkelsymmetrale: w: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1.38 \\ -0.28 \end{pmatrix}$

Aufgabe 52: Ermittle die Winkelsymmetrale des von P, S und Q gebildeten Winkels $\measuredangle PSQ$.
a) P = (5/7); S=(1/3); Q=(2/-1) b) P=(-4/-6); S=(1/-3); Q=(3/2)

VEKTOREN IN ANWENDUNGEN

Aufgabe 53: Ein Unternehmen verkauft ein Produkt in 3 Ausführungen A, B und C. Die Preise sind im Vektor $p = \begin{pmatrix} 1{,}90 \\ 2{,}60 \\ 3{,}90 \end{pmatrix}$ zusammengefasst. Die Absatzmengen der vergangenen Woche sind im Vektor $a = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$ zusammengefasst.

a) Welcher Umsatz wurde in dieser Woche (insgesamt) erzielt? → *Skalarprodukt a·p*

b) Für eine Aktion werden die Preise um 20% gesenkt. Wie lautet der neue Preisvektor?

Hinweis: um 20% senken bedeutet (alle Preise) mit 0,8 multiplizieren

Aufgabe 54: Ein Bauer baut Kartoffeln (5ha), Mais (4ha), Gerste (10ha) und Weizen (8ha) an. Für jeden ha Anbaufläche benötigt er Dünger: bei Kartoffeln 50g, bei Mais 100g, bei Gerste 70g und bei Weizen 80g.

a) Stelle zwei Vektoren auf, die den Sachverhalt veranschaulichen.

b) Berechne die Gesamtmenge an Dünger, die der Bauer einkaufen muss.

Aufgabe 55:

Der Lageplan eines großen Hafens wurde in Form eines Koordinatensystems erfasst. Ein Frachtschiff verlässt Pier 1 im Punkt P1=(5/1) um 10:00 Uhr. Das Schiff legt in einer Minute den Weg (Vektor) $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ zurück.

Ein zweites Schiff befindet sich um 10:00 Uhr im Punkt Q=(11/8) und steuert direkt auf Pier 2 im Punkt P2 = (-4/3) zu. Schiff 2 erreicht Pier 2 um 10:05 Uhr.

a) Veranschaulichen Sie diese Situation an Hand einer Skizze!

b) Geben Sie die Geraden jener Geraden an, entlang derer sich die beiden Schiffe bewegen!

c) Bestimmen Sie jenen Punkt, an dem sich die Fahrtwege der beiden Schiffe kreuzen!

d) Begründen Sie, ob für die beiden Schiffe Kollisionsgefahr besteht!

e) Ist dieses Modell eine geeignete Abbildung der realen Situation? Führen Sie Argumente für Ihre Entscheidung an!

Kompetenzcheck: Vektoren im R², Geradengleichung

Teil A (Grundkompetenzen)

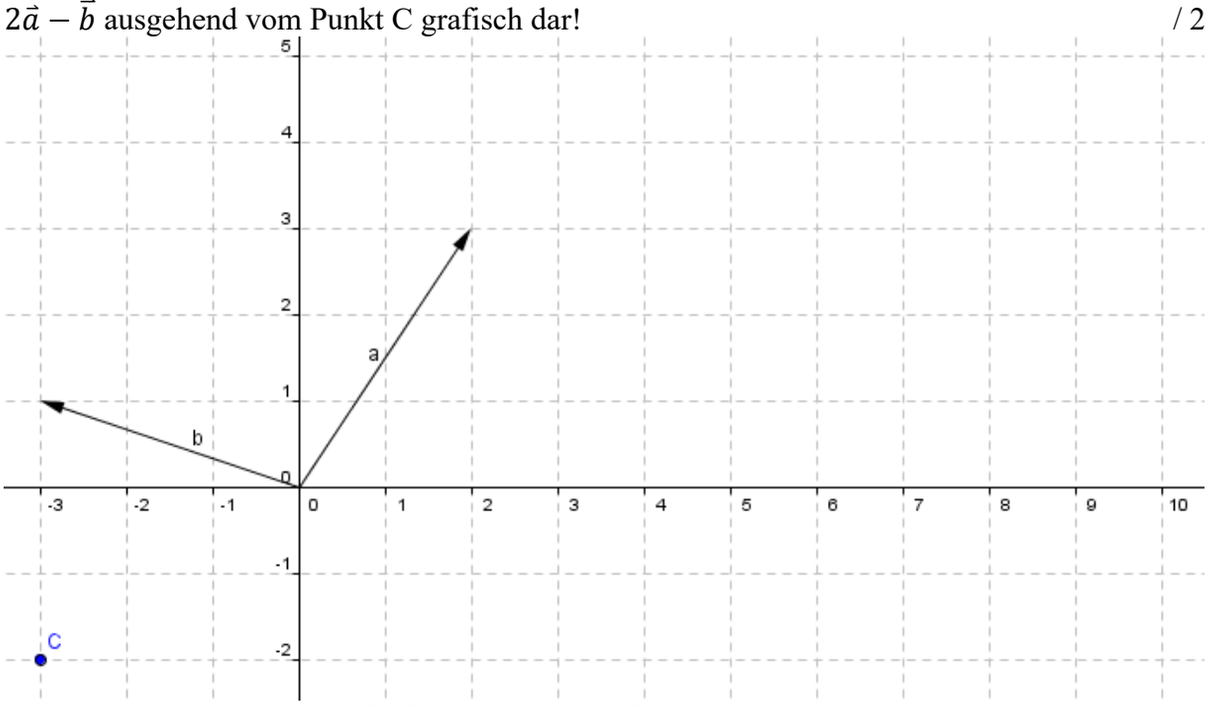
1) Bestimme den Richtungsvektor $\overrightarrow{PQ}$ zwischen den Punkten P=(-5|2) und Q=(1|-1)! / 2

2) Welche <u>beiden</u> (!) Vektoren sind zum Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \end{pmatrix}$ parallel? Kreuze an!

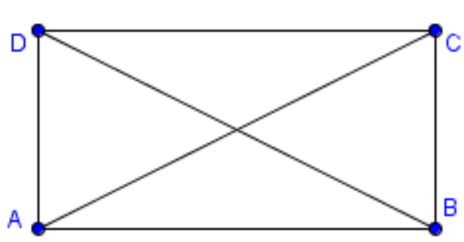
○ $\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ ○ $\begin{pmatrix} 16 \\ -24 \end{pmatrix}$ ○ $\begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}$ ○ $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ○ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ / 2

3) Bestimme die fehlende Koordinate so, dass die beiden Vektoren $a = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} x \\ 6 \end{pmatrix}$ normal zueinander stehen! / 2

4) Gegeben sind die beiden Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (siehe Grafik). Stelle den Vektor $2\vec{a} - \vec{b}$ ausgehend vom Punkt C grafisch dar! / 2



5) Gegeben ist ein Rechteck ABCD (siehe Grafik). Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an!



○ $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ ○ $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ ○ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = C$

○ $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BD}$ ○ $D = A + \overrightarrow{BC}$ / 2

6) Die Punkt T teilt die Strecke zwischen den Punkten A=(-3|2) und B=(7|7) im Verhältnis 4:1. Berechne die Koordinaten von T! / 2

7) Gegeben ist die Gleichung einer Geraden g: 6x – 3y = 5. Bestimme die Gleichung einer zu g normalen Geraden h durch den Punkt P=(3|1)! / 2

8) Von einer Geraden g kennt man die zugehörige lineare Funktionsgleichung $y = -\frac{3}{5}x + 2$. Gib eine Parameterdarstellung der Geraden g an! / 2

Teil B (Vernetzung von Grundkompetenzen)

9) Von einem Parallelogramm ABCD sind drei Eckpunkte bekannt:
A=(-3|1); B=(5|3); C=(3|7). (Einheiten in cm)
   a) Berechne die Koordinaten des fehlenden Eckpunkts D! / 2
   b) Wie groß ist der Umfang des Parallelogramms? / 1
   c) Berechne den Winkel, der von den Seiten $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ eingeschlossen wird! / 1

10) Gegeben ist die Gerade g: $X = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (Einheiten in cm).
   a) Gib einen Normalvektor dieser Geraden an! / 1
   b) Wie groß ist der Abstand des Punkts P=(-3|5) von dieser Geraden? / 2
   c) Der Punkt P wird an der Geraden g gespiegelt. Wie lauten die Koordinaten des gespiegelten Punkts P´? / 1

gesamt: / 24

Note:

Bewertungsschema:
0-11,5: Nicht genügend; 12-14,5: Genügend; 15-18,5: Befriedigend; 19-21,5: Gut; 22-24: Sehr gut

GERADENGLEICHUNGEN UND LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

Lösen von linearen Gleichungssystemen: Additionsverfahren (Eliminationsverfahren)

Beispiel: $5x - 4y = 16 \quad | \cdot 3$
$2x + 3y = 11 \quad | \cdot 4$

diagonal multiplizieren:
obere Zeile mal untere Zahl;
untere Zeile mal obere Zahl
(ob man die Zahlen vor x oder vor y nimmt, ist egal)

$$\begin{aligned} 15x - 12y &= 48 \\ 8x + 12y &= 44 \\ \hline 23x \quad &= 92 \quad |:23 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

in Zeile 1 einsetzen: $5 \cdot 4 - 4y = 16 \quad |-20$
$-4y = -4 \quad | :(-4)$
$y = 1$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems ist der Schnittpunkt der beiden Geraden:
$S = (4 \mid 1)$

Aufgabe 1: Löse das lineare Gleichungssystem mit Hilfe des Additionsverfahrens!

a) $6x - 2y = 8$
$3x + 5y = 34$

b) $7x + 8y = 3$
$3x - 3y = 27$

Lösen von linearen Gleichungssystemen: Gleichsetzungsverfahren

immer dann zu empfehlen, wenn beide Geraden durch ihre Funktionsgleichung gegeben sind

Beispiel: $y = 7x - 3 \qquad y = 5x + 13$

$7x - 3 = 5x + 13 \quad | -5x \quad | +3$
$2x = 16 \quad | :2$
$x = 8$

in eine der gegebenen Gleichungen einsetzen: $y = 7 \cdot 8 - 3$
$y = 53$

Aufgabe 2: Löse das lineare Gleichungssystem mit Hilfe des Gleichsetzungsverfahrens!

a) $y = 4x - 7$
$y = 8x - 15$

b) $y = 5x - 38$
$y = -3x + 18$

„Erfinden" von linearen Gleichungssystemen

links „irgendetwas" hinschreiben (Zahl·x + Zahl·y);
die gewünschten Lösungen statt x und y einsetzen → diese Zahl rechts hinschreiben

Beispiel: Finde ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösung x = 4, y = -3 ist!

$6x + 3y = 15$ (weil $6 \cdot 4 + 3 \cdot (-3) = 15$)
$7x - 2y = 34$ (weil $7 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) = 34$)

die „einfachste" Lösung wäre: x = 4; y = -3
(auch das sind zwei lineare Gleichungen ☺)

Die gelb markierten Zahlen können beliebig gewählt werden!

Aufgabe 3: Stelle den Punkt S = (6 | -1) als Lösung eines linearen Gleichungssystems dar!

Aufgabe 4: Gegeben ist die Geradengleichung g: $7x - 3y = 1$. Gib die Gleichung einer zweiten Geraden h so an, dass sich g und h im Punkt S = (1 | 2) schneiden!

Spezielle Lösungsfälle von linearen Gleichungssystemen

alle Zahlen der zweiten Zeile sind Vielfache der ersten Zeile → idente Gerade
(das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen)

Beispiel: Ermittle die Werte für die Parameter b und c so, dass das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat!

$$5x - 3y = 6$$

$\downarrow \cdot(-4)$ Achtung auf Vorzeichen!!!

$$-20x + by = c$$

aus den Zahlen vor x erkennt man, dass man mit (-4) multiplizieren muss
→ $b = -3 \cdot (-4) = 12$; $c = 6 \cdot (-4) = -24$

Aufgabe 5: Bestimme die fehlenden Koeffizienten so, dass das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat!

a) $2x - 3y = 5$
$6x + by = c$

b) $-7x + 3y = 1$
$ax - 15y = c$

links sind die Zahlen der zweiten Zeile Vielfache der ersten Zeile; rechts nicht
→ parallele Gerade (das Gleichungssystem hat keine Lösungen)

Beispiel: Ermittle die Werte für die Parameter b und c so, dass das Gleichungssystem keine Lösungen hat!

$$5x - 4y = 8$$

$\downarrow \cdot 3$

$$15x + by = c$$

aus den Zahlen vor x erkennt man, dass man links mit 3 multiplizieren muss
→ $b = -4 \cdot 3 = -12$; für c darf man jede Zahl verwenden, nur nicht 24 → zB $c = 113$

Aufgabe 6: Gib mögliche Werte für die fehlenden Koeffizienten an, sodass das lineare Gleichungssystem keine Lösungen hat!

a) $5x - 2y = 13$
$10x + by = c$

b) $-3x - 4y = 7$
$ax - 8y = c$

Aufgabe 7: Wie viele Lösungen hat das lineare Gleichungssystem?

a) $4x + 3y = 5$
$8x + 6y = 6$

b) $12x - 3y = 18$
$4x - 1y = 6$

c) $3x - 2y = 10$
$12x + 8y = 20$

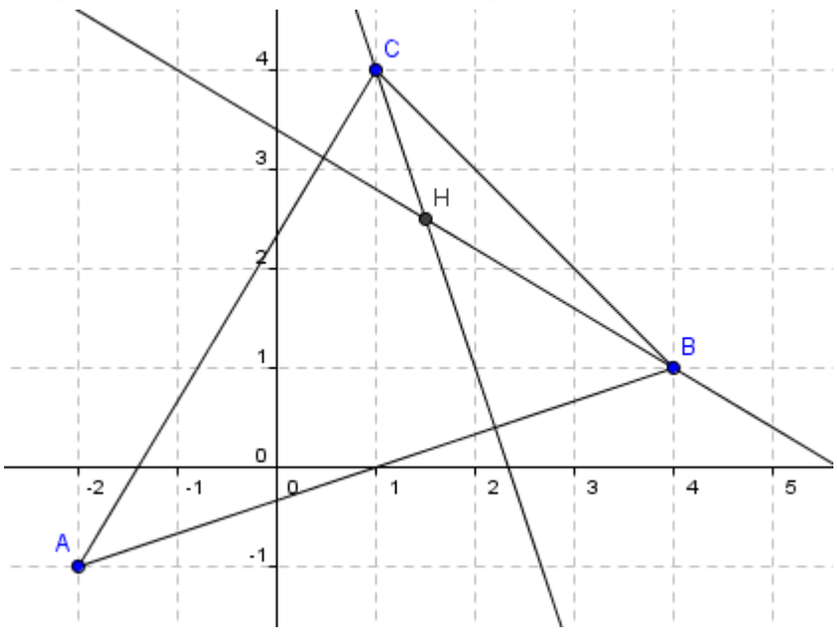
„Vielfaches“ bedeutet mit einer Zahl multiplizieren oder durch eine Zahl dividieren!

Erweiterungsbereich Vektorrechnung im R2
Spezielle Punkte im Dreieck berechnen

Höhenschnittpunkt (Schnittpunkt der Höhenlinien)

Höhenlinie: Gerade im rechten Winkel auf eine Seite durch den gegenüberliegenden Eckpunkt

Aufgabe 1: Ermittle den Höhenschnittpunkt des Dreiecks A=(-2/-1), B=(4/1), C=(1/4).



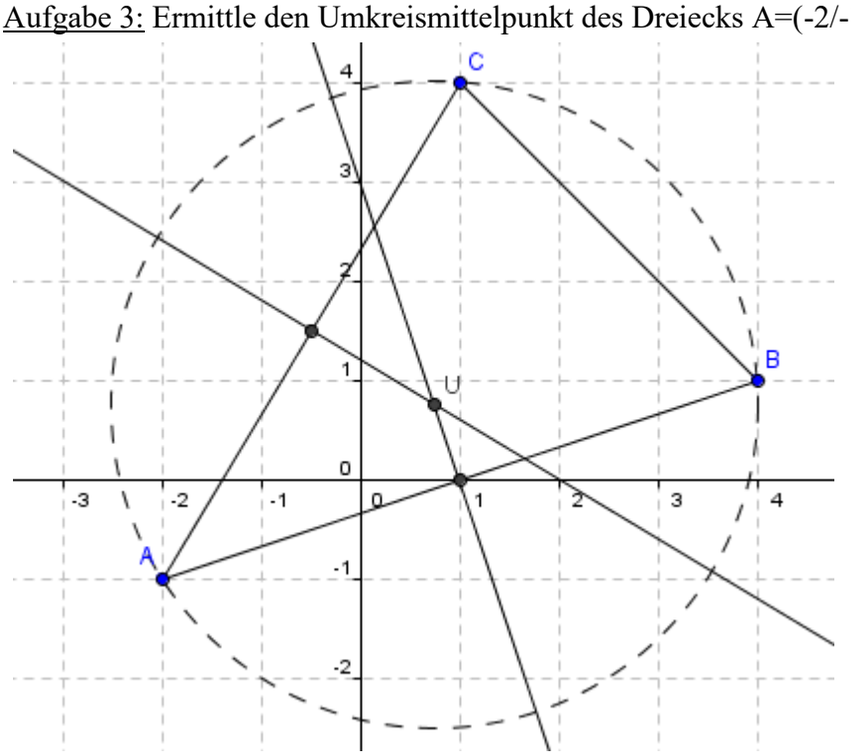
Anleitung:

- *Berechne den Vektor $\overrightarrow{AB}$*
- *Ermittle die Gleichung der Geraden durch C senkrecht auf $\overrightarrow{AB}$*
- *Berechne den Vektor $\overrightarrow{AC}$*
- *Ermittle die Gleichung der Geraden durch B senkrecht auf $\overrightarrow{AC}$*
- *Schneide die beiden Geraden → Höhenschnittpunkt H*

Aufgabe 2: Berechne den Höhenschnittpunkt des Dreiecks A=(-3/-2), B=(1/-1), C=(-1/3).

Umkreismittelpunkt (Schnittpunkt der Streckensymmetralen)

Aufgabe 3: Ermittle den Umkreismittelpunkt des Dreiecks A=(-2/-1), B=(4/1), C=(1/4).



Anleitung:

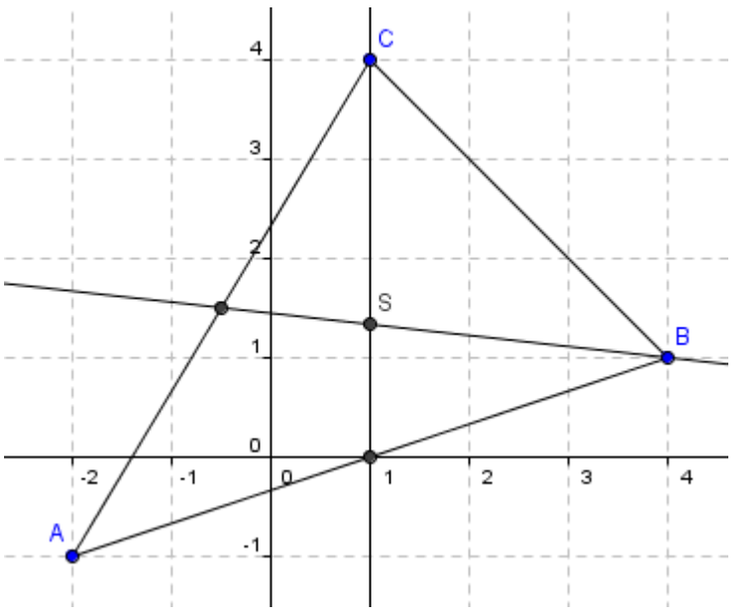
- *Berechne den Halbierungspunkt H_{AB} und den Vektor $\overrightarrow{AB}$*
- *Ermittle die Gleichung der Geraden senkrecht zu $\overrightarrow{AB}$ durch den Halbierungspunkt H_{AB}*
- *Berechne den Halbierungspunkt H_{AC} und den Vektor $\overrightarrow{AC}$*
- *Ermittle die Gleichung der Geraden senkrecht zu $\overrightarrow{AC}$ durch den Halbierungspunkt H_{AC}*
- *Schneide die beiden Geraden → Umkreismittelpunkt U*

Aufgabe 4: Ermittle den Umkreismittelpunkt des Dreiecks A=(6/2), B=(1/1), C=(3/-4).

Schwerpunkt (Schnittpunkt der Schwerelinien)

Schwerelinie = Geraden durch den Halbierungspunkt einer Seite und den gegenüberliegenden Eckpunkt

Aufgabe 5: Ermittle den Schwerpunkt des Dreiecks A=(-2/-1), B=(4/1), C=(1/4).

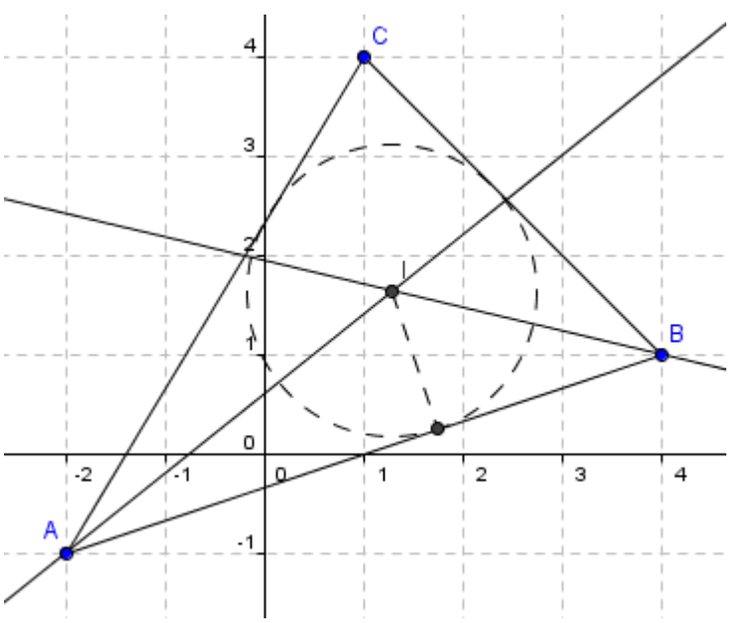


Anleitung:
Berechne S=(A+B+C)/3
(komplizierter wird's nicht ;-)

Aufgabe 6: Ermittle den Schwerpunkt des Dreiecks A=(4/1), B=(8/2), C=(5/7).

Inkreismittelpunkt (Schnittpunkt der Winkelsymmetralen)

Aufgabe 7: Berechne den Inkreismittelpunkt des Dreiecks A=(-2/-1), B=(4/1), C=(1/4).



Anleitung:

- *Berechne die Gleichung der Winkelsymmetrale der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$.*
- *Berechne die Gleichung der Winkelsymmetrale der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$.*
- *Schnittpunkt dieser Geraden → Inkreismittelpunkt I*

Aufgabe 8: Berechne den Inkreismittelpunkt des Dreiecks A=(-3/-2), B=(4/0), C=(-1/3).

Euler'sche Gerade

In einem Dreieck liegen der Umkreismittelpunkt, der Höhenschnittpunkt und der Schwerpunkt stets auf einer Geraden.

Aufgabe 9: Zeige diesen Satz für das Dreieck A=(-3/-3), B=(4/-1), C=(1/5).
a) Berechne zunächst U, H und S für dieses Dreieck.
b) Stelle die Gleichung einer Geraden durch U und H auf.
c) Zeige, dass der Punkt S ebenfalls auf dieser Geraden liegt.
d) Zeige diesen Satz auch durch Konstruktion der Punkte U, H und S (Konstruktion händisch oder mit Computergrafik).

Flächeninhalt eines Dreiecks

*Im Rahmen der Vektorrechnung ermittelt man den Flächeninhalt eines Dreiecks am schnellsten mit der **Heron'schen Flächenformel**:*

$$\boldsymbol{A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

Dabei sind a, b und c die Seitenlängen des Dreiecks;
s ist der halbe Umfang des Dreiecks: $s = \frac{a+b+c}{2}$

Aufgabe 10: Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks A=(-3/-3), B=(4/-1), C=(1/5).
Wer mag, kann Zwischenergebnisse von Aufgabe 9 weiterverwenden ☺

Aufgaben zum Knobeln

Aufgabe 11:
Die Eckpunkte A und B eines Quadrats liegen auf der Geraden g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Der Eckpunkt C hat die Koordinaten C=(-1/8).
a) Ermittle die Koordinaten der Eckpunkte A, B und D.
b) Wie groß ist der Flächeninhalt dieses Quadrats?

Aufgabe 12:
Der Umkreismittelpunkt eines Dreiecks liegt im Punkt U = (4/2).
Die Eckpunkte B und C liegen auf der Geraden g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Der Eckpunkt A hat die Koordinaten A=(0/-1).
a) Konstruiere (!) die Koordinaten der Eckpunkte B und C!
Berechnen setzt Kenntnisse über die Kreisgleichung voraus (nicht Inhalt dieses Skriptums).
b) Wie groß ist der Umfang des Dreiecks?

Lösungen zum Lernprogramm

1a) Q=(4/-2) b) Q=(2/2)

2a) Q=(1|4) b) Q=(-11|18)

3a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ c) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

4a) (4/-6) b) (7/5)

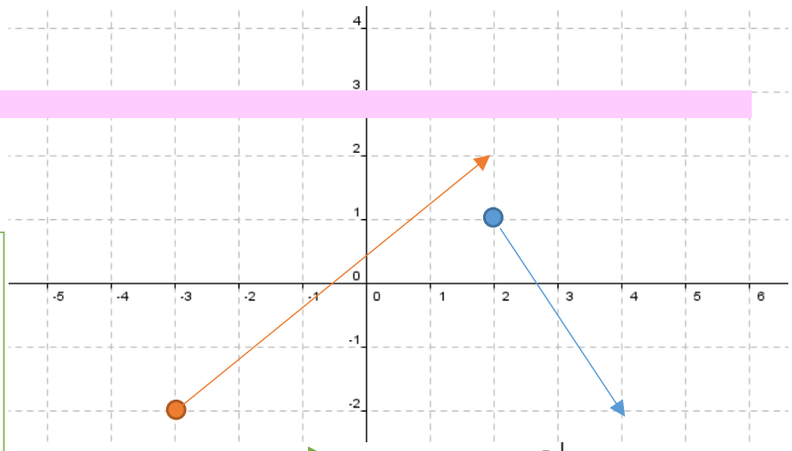
5) *Hinweis: einfach "irgendwo" einen Startpunkt fixieren und von dort 3 nach rechts und 1 nach oben zählen (für a) bzw. 4 nach rechts und 1 nach unten (für b)*

6a) C=(4/5) b) B=(3/-6)

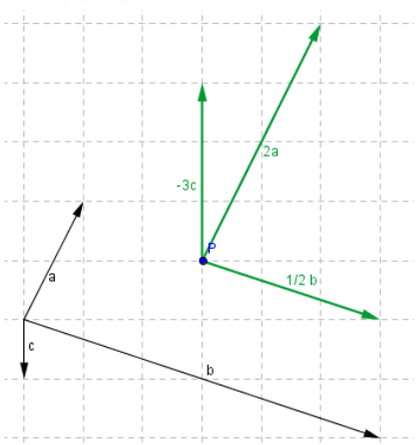
7) richtig sind die Zeilen 1 und 4

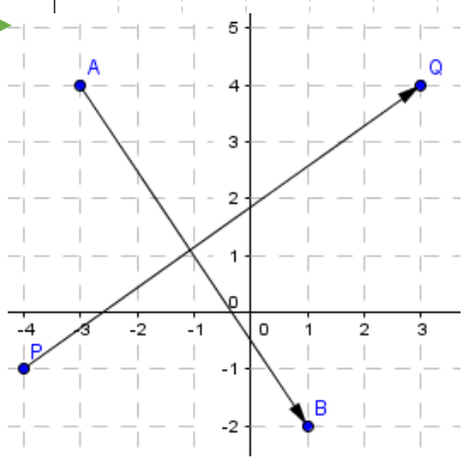
8) richtigen sind die Formeln 2 und 3

9a) (-4/-2) b) (-8/7)



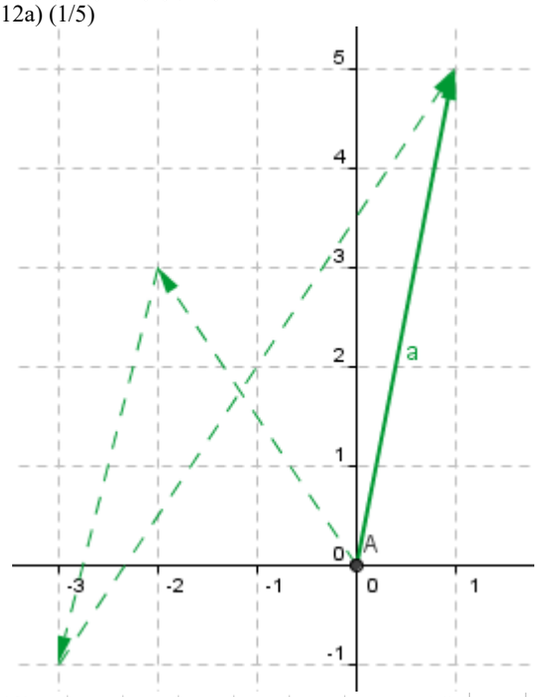
10)



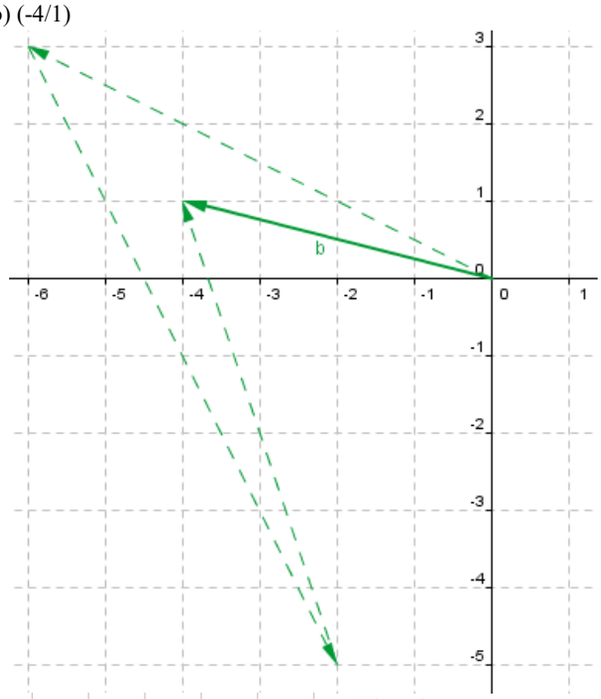


11a) (-5/4) b) (5,5/3)

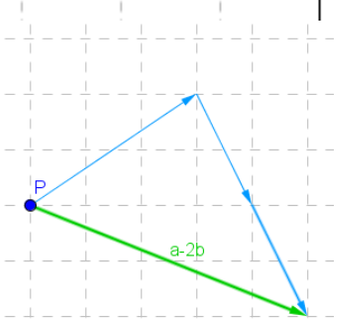
12a) (1/5)



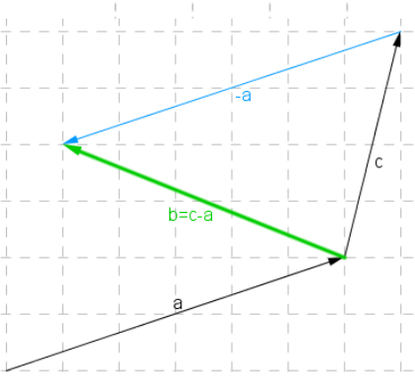
b) (-4/1)



13)

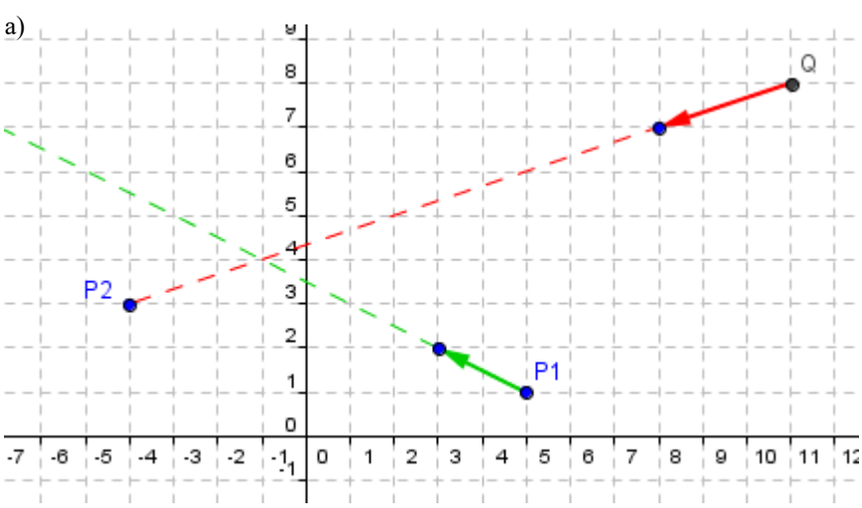


14)



Hinweis:
a+b = c umformen auf b = c-a ☺

15 a) *ja* b) *ja* c) *nein*
16 a) y=15 b) x=14 c) x=4
17) richtig sind die Vektoren Nr. 1 und 5
18 a) (-1/5) oder (1/-5) b) (-4/1) oder (4/-1)
19 a) C=(8/11); D=(4/10) b) A=(10/4); B=(4/2)
20 a) -5; *nicht orthogonal* b) 1; *nicht orthogonal* c) 0; *orthogonal*
21 a) y=10 b) x= -18 c) x=14
22 a) C=(6/6); D=(4/4) b) A=(-10,5/-9); D=(-12,5/-6)
24 a) 6,32 b) 5,10 c) 3
25 a) 7,28 b) 8,06
26 a) T=(-3/2) b) T=(0/-1)
27 a) B=(13,7/15) b) A=(-8,6/7,8)
28 a) 82,23° b) 175,6°
29 a) (6,43/0,06) b) (-0,67/-1,99)
30 a) (0,89/-0,45) b) (0,39/0,92)
31) richtig sind die Aussagen 4 und 5
32) Tabelle 1 : 2. Zeile, Tabelle 2 : 1. Zeile
33 a) Q=(3/-3) b) Q=(6/-2)
34 a) $X = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$
35 a) nein b) ja
36 a) y = 10 b) x = -13 c) P=(9,5|0)
37 a) S=(3/-3) b) S=(-14/16)
38 a) parallel b) ident
39 a) $\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$
40) Tabelle 1: zweite Zeile; Tabelle 2: dritte Zeile
41 a) y = -4x + 22 b) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$
42) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ *Die Koordinaten des Normalvektors sind die Zahlen vor x und y* ☺
43 a) Gleichung der x-Achse: y = 0; Gleichung der y-Achse: x = 0
b) weil sich senkrechte Gerade (zum Beispiel x = 7) nicht auf y = … umformen lassen, weil da gar kein y vorkommt
44 a) $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ *mehrere verschiedene Lösungen möglich!*
45 a) $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$
46 a) $X = \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ c) 7x – 3y = 10 d) 11x + 4y = -6
47 a) $X = \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$ c) 3x + 7y = -4 d) -4x + 11y = -85
48 a) (4/5); Abstand = 12,4 b) (-11/26); Abstand = 7,62
49 a) Abstand = 1,92 b) Abstands = 0 $\rightarrow$ $P \in g$
50 a) $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ *beachte: Richtungsvektoren kann man vereinfachen!*
51 a) P´=(-5/13) b) P´=(-4/5)
52 a) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0{,}95 \\ -0{,}26 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -0{,}49 \\ 0{,}41 \end{pmatrix}$
53 a) 74,30 b) $p_{neu} = 0{,}8 \cdot p$
54 a) Anbauflächenvektor: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$; Düngebedarfsvektor: $\vec{b} = \begin{pmatrix} 50 \\ 100 \\ 70 \\ 80 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1990g = 1{,}99kg$
55 a)



b) $X = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
$X = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$
c) (-1 | 4)
d) eher nicht, da Schiff 1 den Kreuzungspunkt um 10:03 Uhr erreicht, Schiff 2 hingegen erst um 10:04 Uhr; somit bleibt eine Minute „Sicherheitsabstand“
e) mögliche Antwort: ein Schiff hat – zumal beim langsamen Tempo im Hafenbereich – eine eher gleichmäßige Bewegung und kann am Wasser (fast) geradlinig gesteuert werden; das Modell ist also geeignet

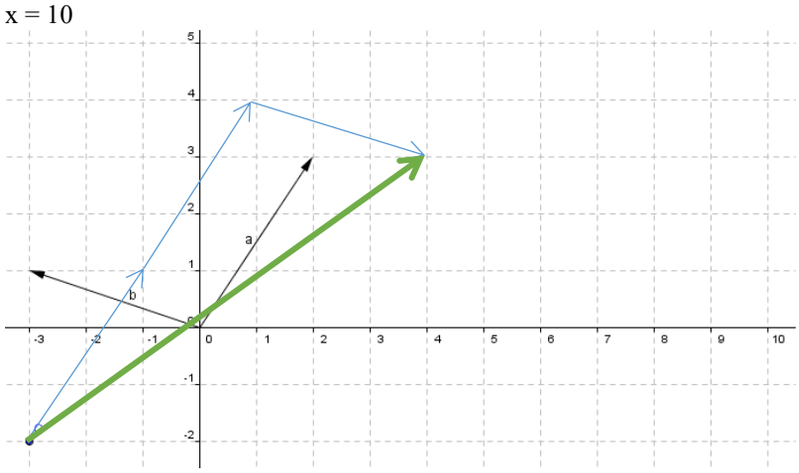
Lösungen zum Kompetenzcheck (Seite 27)

1) $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

2) Vektoren Nr. 1 und 2

3) x = 10

4)



5) 1. Zeile: Aussage Nr. 2; 2. Zeile: Aussage Nr. 2

6) T = (5 | 6)

7) 3x + 6y = 15 *oder* -3x – 6y = -15

8) *mögliche Antwort:* $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

9 a) D = (-5 | 5) b) ~25,44cm c) ~102,5°

10 a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ *oder* $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) ~2,85cm c) P´ = (-8,4 | 3,2)

Lösungen zum Abschnitt lineare Gleichungssysteme (Seiten 29-30)

1 a) x = 3; y = 5 b) x = 5; y = -4

2 a) x = 2; y = 1 b) x = 7; y = -3

3) unendlich viele Lösungen möglich ☺

4) unendlich viele Lösungen möglich ☺

5 a) b = -9; c = 15 b) a = 35; c = -5

6 a) b = -4; c = irgendwas außer 26 b) a = -6; c = irgendwas außer 14

7 a) keine b) unendlich viele c) eine

Lösungen zu den Erweiterungsbereichen (ab Seite 31)

1) H = (1,5 | 2,5)

2) H = (-1/9 | -5/9)

3) U = (0,75 | 0,75)

4) U = (3,94 | -0,70)

5) S = (1 | 1,33)

6) S = (5,67 | 3,33)

7) I = (1,29 | 1,64)

8) I = (-0,17 | 0,55)

9) a) H = (2,5 | -0,25); U = (-0,25 | 0,63); S = (0,67 | 0,33) b) 0,88x + 2,75y = 1,5 c) 0,88·0,67+2,75·0,33≈1,5✓

10) A = 24

11 a) A = (-1 | 0); B = (3 | 4); D = (-5 | 4) b) A = 32

12 a) B = (8 | -1); C = (1 | 6) b) u = 24,97

Lösungen zu empfohlenen Aufgaben aus dem Lehrbuch

884a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}; |\overrightarrow{AB}| = 2{,}24$ b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}; |\overrightarrow{AB}| = 2{,}83$

846a) *Hinweis: „irgendwo“ anfangen und 7 Kästchen nach rechts, 2 nach oben zählen* b) siehe a

853a) 11,45m/s = 41,20km/h b) 5m/s = 18km/h

856a, b) *das hängt von den eigenen Lebensumständen ab* ☺

881) richtig sind die beiden Aussagen in der zweiten Zeile

887a) B = (4|-2), C = (5|2), D = (-1|5), M = (1,5|1,5)

905a) $v_0 = \begin{pmatrix} 0{,}919 \\ 0{,}394 \end{pmatrix}$

906) *von oben nach unten:* D, E, A, C

907a) B = (2,47|0,76)

917a) 27 b) 4 c) 61 *Hinweis:* $\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$

918a) -112 b) 36 c) -160 d) geht nicht, da Zahl ($\vec{a} \cdot \vec{c}$) + Vektor ($\vec{d}$) nicht berechenbar ist

924a) 60,26°

943a) $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$

945a) -22,5 b) 13,44

948) richtig sind die Aussagen Nr. 1 und 5

978a) $\begin{pmatrix} -8 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; -8x + 1y = 1 b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$; 2x + 11y = 16

979a) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}; P = (0|-3); \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ b) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}; P = (11{,}5|0); \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$

981) Tabelle 1: erste Zeile; Tabelle 2: dritte Zeile

983) Gleichungen Nummer 2, 3 und 5 *Hinweis:* $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

998a) $X = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}; P = (5|-10)$ b) $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}; P = (7|9)$

1006a) $y = -\frac{8}{3}x - 2; \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$

b) -2x + y = -5; $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) 3x + 4y = -1; $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}; X = \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}25 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

d) 2x + 3y = 5; $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}; \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

1008a) richtig sind die Aussagen 1, 3 und 5 b) richtig sind die Aussagen 2, 3 und 4

c) richtig sind die Aussagen 1, 2, 3 und 4

1023a) $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix}$

1024 a) $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix}$

1025) richtig sind die Aussagen 1, 2 und 5

1026) *von oben nach unten:* A; B, D, C

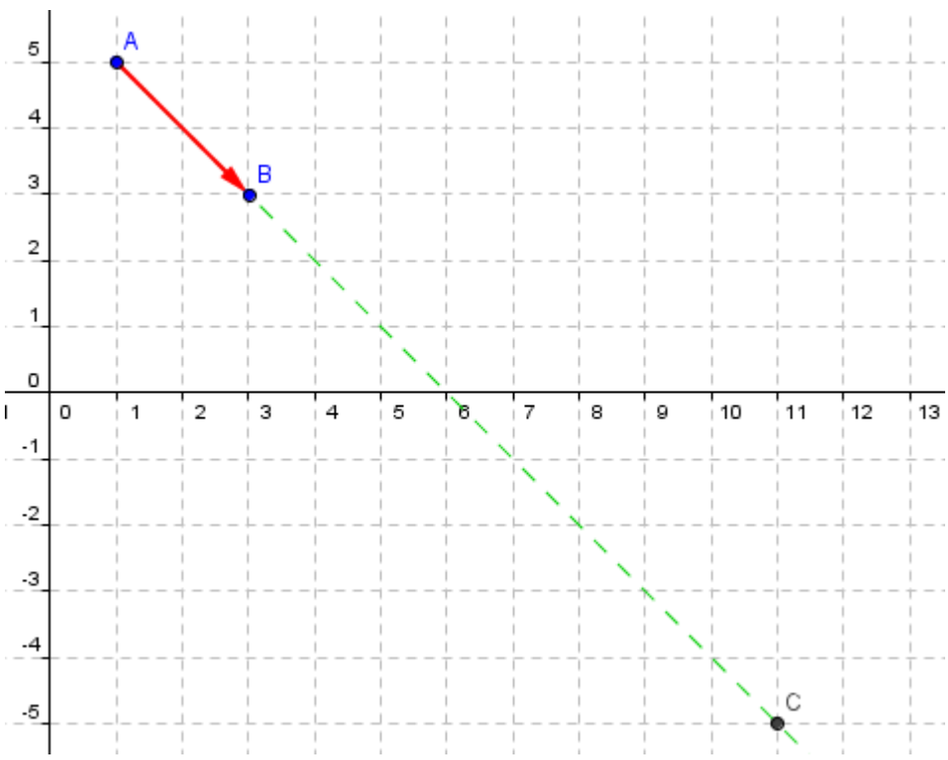
1030) g: 3x – y = 9

1031) x + 3y = 23

1032a) S = (-1|5); 101,89° b) S = (4|4); 63,43°

Version 2016/17
erstellt von Peter Gruber

Lösung zur Aufgabe von Tessa:



a) Formel: $X = Startpunkt + t \cdot Richtungsvektor$
Startpunkt ist Punkt A = (1|5);
Richtungsvektor ist $\overrightarrow{AB} = B - A = \binom{3}{3} - \binom{1}{5} = \binom{2}{-2}$
Parameterform der Geraden: $g: X = \binom{1}{5} + t \cdot \binom{2}{-2}$

b) C = (11 | -5) *Berechnung:* $\binom{1}{5} + 5 \cdot \binom{2}{-2} = \binom{1}{5} + \binom{10}{-10}$

c) Geschwindigkeit entspricht dem Betrag des Richtungsvektors:
$\left|\binom{2}{-2}\right| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2{,}83\ cm/s$