MATHEMATISCHE GRUNDBILDUNG

Karl Bernauer
Wilfried Kuran

BG/BRG Schärding

Schärding, 2002

INHALTSVERZEICHNIS

ABSTRACT

Was bedeutet Grundbildung für den Mathematikunterricht? Diese Frage steht im Mittelpunkt des Prozesses der in dieser Arbeit beschrieben wird. Neben allgemeinen Gedanken zu Aspekten des Mathematikunterrichts werden konkrete Überlegungen betreffend den Stoff der 5. Klasse AHS angestellt und Möglichkeiten der Umsetzung diskutiert.

1 WIE ALLES BEGANN

Eine Beteiligung an IMST² wurde an unserer Schule bereits im Schuljahr 2000/01 diskutiert, es entstand allerdings nur ein loser Kontakt. Nachdem die Frage der Teilnahme auf Anregung unseres Direktors in der Gruppe der Mathematiker erneut diskutiert worden war, entschied sich ein dreiköpfiges Team bestehend aus Mag. Karl Bernauer, Mag. Wilfried Kuran und Mag. Karl Probst noch ohne konkretes Projektthema zum ersten Workshop im November nach Zeillern zu fahren. Dort lernten wir die Intentionen von IMST²-S1-Grundbildung genauer kennen. Aus den Diskussionen entwickelte sich folgende Projektidee:

> *Wir wollen Inhalte der Schulmathematik ausfindig machen, die für eine mathematische Grundbildung als unverzichtbar angesehen werden können. Die Auswahl dieser Inhalte ist zu begründen, und es gilt Überlegungen anzustellen, wie diese Inhalte dauerhaft gesichert werden können.*

In das Projekt einbezogen ist eine 5. Klasse Realgymnasium, die bis zur Matura speziell unter diesem Gesichtspunkt unterrichtet werden soll. Da alle beteiligten Lehrer auch eine 2. Klasse unterrichten, entstand die Idee, bereits in der Unterstufe mit diesen Überlegungen anzusetzen. Teil des Projektes ist es, Aufgaben zu erstellen, mit denen diese Grundfähigkeiten in Form eines Tests zu Beginn des nächsten Schuljahres abgefragt werden können. Aus der Thematik ergibt sich, dass diese Dokumentation keine Beschreibung punktueller Aktivitäten ist. Vielmehr soll versucht werden, einen (erst am Anfang stehenden) <u>Prozess</u> zu beschreiben. Kollege Probst ist im Dezember kranheitsbedingt aus dem Projektteam ausgeschieden.

2 GRUNDSÄTZLICHES

2.1 Vorbemerkungen

- Es zeigte sich bald, dass die <u>Diskussionen</u> über die Thematik der Grundbildung einen wesentlichen Teil des Projektes bilden. Diskussionen innerhalb der Projektgruppe, die vor allem bei den Workshops sehr intensiv geführt wurden, Gespräche mit Kolleginnen und Kollegen an der Schule und vor allem mit den Schüler/innen der Projektklassen.

- Unsere Überlegungen zielen ab auf einen AHS-Maturanten, der in seiner späteren Laufbahn nichts oder nur mehr sehr wenig mit Mathematik zu tun hat. Es erscheint uns typisch zu sein, dass diese Diskussion überwiegend im AHS-Bereich geführt wird, in dem derzeit sehr intensiv nach neuen Zielsetzungen und Orientierungen gesucht wird. Der BHS-Bereich (vor allem die HTL) steht in dieser Hinsicht derzeit unter einem wesentlich geringeren in dieser Hinsicht derzeit unter einem wesentlich geringeren Rechtfertigungsdruck.

- Schüler/innen klagen über hohen Leistungsdruck. Eine Maturantin sagte vor kurzem: „Wozu müssen wir das eigentlich alles lernen, man vergisst es ja sowieso gleich wieder." Die Universitäten klagen über mangelnde Vorkenntnisse von Studienanfängern und zahlreiche Untersuchungen (u.a. von Prof. Malle) belegen, dass von dem in der Schule erworbenen (mathematischen) Wissen so gut wie nichts übrig bleibt. Auf der Suche nach den „unverzichtbaren Inhalten" der Mathematik kommt man unweigerlich zu der Frage: „Gibt es diese Inhalte überhaupt?" Im Folgenden soll versucht werden einige Gründe anzuführen, diese Frage mit ja zu beantworten.

2.2 Aspekte des Mathematikunterrichts

2.2.1 Der Bildungsaspekt

Margaret Wertheim[1] schreibt in ihrem Buch „Die Hosen des Pythagoras": „*In den letzten vier Jahrhunderten haben Physiker intensiv nach mathematischen Beziehungen in unserer Welt gesucht. Durch ihre einzigartigen Bemühungen hat die westliche Kultur ein noch nie dagewesenes Wissen und eine daraus resultierende Macht über die Dinge erlangt.*"

Unsere Alltagswelt ist in hohem Maß von Naturwissenschaft und Technik geprägt und ein Verständnis für diese Zusammenhänge muss von einem gebildeten Menschen verlangt werden. Anders formuliert: Jedem, der dieses Verständnis nicht aufbringt, fehlt ein wesentlicher Teil unseres heutigen, westlich geprägten Weltbildes. Der Erfolg der Naturwissenschaften ist untrennbar verknüpft mit der <u>Mathematik als Hilfswissenschaft</u>. Es ist aus mehreren Gründen in der Schule nicht immer leicht, diese enge Verbindung klar aufzuzeigen. Unabhängig davon stellt sich die Frage, in welchem Umfang ein Laie <u>mathematische</u> Kenntnisse aufweisen muss, um die Ergebnisse naturwissenschaftlicher Theorien nachvollziehen und verstehen zu können. Stephen Hawking[2] schreibt in der Einleitung zu „Eine kurze Geschichte der Zeit": *Man hat mir gesagt, dass jede Gleichung im Buch die Verkaufszahlen halbiert. Ich beschloss also, auf mathematische Formeln ganz zu verzichten."* Auf die Verkaufszahlen mag sich diese Haltung positiv auswirken. Ob dadurch aber die Verständlichkeit des Buches tatsächlich gesteigert wird, darf bezweifelt werden, denn die Inhalte sind teilweise so komplex, dass sie von Laien mit oder ohne Formeln kaum nachvollzogen werden können. Auf das Verhältnis Fachsprache versus Alltagssprache wird im nächsten Punkt genauer eingegangen.

Neben der Sicht der Mathematik als Hilfswissenschaft sollte man versuchen, den <u>Wert der Mathematik an sich</u> darzustellen. Das ist sicherlich in der Schulpraxis sehr schwer zu erreichen, und es kommt in der täglichen Unterrichtspraxis auch vielfach zu kurz, weil ein Großteil der Zeit zum Erlernen mathematischer <u>Fertigkeiten</u> aufge-

[1] Margaret Wertheim, Die Hosen des Pythagoras, Seite 7
[2] Stephen W. Hawking, Eine kurze Geschichte der Zeit, Seite 7

wendet wird (werden muss?). Dennoch kann die Freude an mathematischer Beschäftigung einen Lebensinhalt darstellen, und diesen Aspekt sollte man nicht aus den Augen verlieren. Im Konkreten können mathematische Spielereien, Denksportaufgaben, selbstentdeckendes Lernen, aber auch historische Zusammenhänge den Schüler/innen diese Sichtweise näher bringen. Dazu nochmals ein Zitat von M. Wertheim: *„Mit zehn Jahren hatte ich in einer Mathestunde ein Erlebnis, das ich nur als mystische Erfahrung beschreiben kann. Wir behandelten den Kreis, und unser Lehrer, Mr. Marshall, dem ich noch heute dankbar bin, gab uns Gelegenheit, das Geheimnis dieser einzigartigen Form selbst zu ergründen: die Zahl Pi. Fast alles, was es über Kreise zu sagen gibt, kann man mit Hilfe von Pi beschreiben, und in meiner kindlichen Naivität hatte ich das Gefühl, gerade ein großes Geheimnis des Universums entschlüsselt zu haben.“*[3]

2.2.2 Der Nützlichkeitsaspekt

Der Nützlichkeitsaspekt der Mathematik spielt oberflächlich betrachtet in der Schule eine wesentlich größere Rolle als der Bildungsaspekt. Schüler/innen erleben zu Beginn der Oberstufe einen starken Unterschied zwischen der Mathematik, wie sie sie von der Unterstufe her kennen und der Mathematik, mit der sie ab der 5. Klasse konfrontiert werden. Wir haben vor Weihnachten die Schüler/innen ersucht, Gedanken zu folgenden Fragen schriftlich niederzulegen:

- Warum soll man Mathematik lernen?
- Was lernt man in Mathematik?
- Was kann man davon „im Leben“ brauchen?
- Was erwarte ich mir vom Mathematik-Unterricht?
- Wie weit wird dies im Unterricht umgesetzt?

Die Schüler/innen hatten für ihre Antworten etwa 15 Minuten Zeit, die Zettel konnten anonym abgegeben werden. Die hier erbrachten Arbeiten erfolgten freiwillig. Eine kleine Auswahl soll die Bandbreite der Antworten zeigen:

Mathematik sollte man deswegen lernen, weil viel Grundwissen (Formeln z.B.) für andere Wissensgebiete (Physik, Technik...) vermittelt wird. Wahrscheinlich ist es das Schicksal der Mathematik als Schulfach, für größtenteils trocken und „langweilig“ angesehen zu werden. Für mich ist es wichtig in Mathematik das Grundwissen vermittelt zu bekommen, um zu verstehen, was hinter physikalischen Phänomenen und Vorgängen eigentlich mathematisch steckt (z.B. Vektoren). (Wobei mir die physikalische Betrachtung oft leichter fällt.) Leider ist es in Mathematik nicht so, wie in Fremdsprachen wie Englisch, die man sofort anwenden kann, klar erkennbar, welchen konkreten Nutzen man fürs tägliche Leben daraus beziehen kann. Bei manchen Kapiteln fragt man sich schon: ‚Ist das jetzt Spielerei oder hat das einen praktischen Sinn?’ Ich bin sehr an Physik interessiert und glaube schon, dass mir Mathematik später dieses oder jenes nutzen wird.

Warum soll man Mathematik lernen?

> *Ich glaube, in diesem Fach wird das „logische Denken“ geschult. Aber in der Unterstufe ist Mathe viel lustiger!*

Was lernt man in Mathematik?

---

[3] siehe [1)]

Keine Ahnung. Das meiste Zeug braucht man sowieso nicht mehr, außer man arbeitet vielleicht in einer Raumstation oder als Wissenschaftler.

Was kann man davon „im Leben“ brauchen?

- *Ich glaube, dass die quadratische Proportionalität in der Wissenschaft entscheidend ist, um die Ausbreitung eines Virus/einer Seuche vorhersehen zu können, für 90% der Bevölkerung jedoch unbrauchbar ist.*

Was erwarte ich mir vom Mathematik-Unterricht?

Schwere Frage. So genau kann man das meiner Meinung nach nicht definieren. Je höher die Mitarbeit der Schüler, desto mehr kann erreicht werden. Der Unterricht muss ja auch nach den Schülern gerichtet werden, oder?

Mathematik wird im Alltag oft verwendet. Ich denke, der Mathematikunterricht fördert in gewisser Weise das „logische Denken“. Man hat im Mathematikunterricht kein Ziel, das man vor Augen hat, da man nie auslernt in Mathematik. Gewisse Dinge, wie komplizierte Gleichungen oder Funktionen kann man bis zur Matura und vergisst sie danach wieder, weil sie in nur wenigen Berufszweigen verwendet werden. Es ist zwar wichtig, Grundkenntnisse zu haben, aber mehr braucht man im Leben nicht. Ich erwarte mir vom Mathematikunterricht praxisbezogene Beispiele, gute Erklärungen, Beweise zu Formeln/Gesetzen und einen Lernlevel, der allen Schülern gerecht wird. Meiner Meinung nach behandeln wir im Unterricht zu viel Theorie. Was nützt mir eine Formel, wenn ich nicht weiß, wozu ich sie im Leben brauchen kann? Für was stelle ich Gleichungen auf, wenn mir nicht klar ist, wozu ich sie verwende?

Dazu einige Anmerkungen:

- In allen Antworten wird die Nützlichkeit im Alltag sehr stark in den Vordergrund gestellt. Muss in der Unterstufe nicht lange erklärt werden, wozu die Grundrechnungsarten, Bruchrechnen, Prozentrechnung... benötigt werden, so besteht in der Oberstufe in diesem Punkt Handlungsbedarf. Es ist wichtig, mit den Schüler/innen über Mathematik zu reden. Dabei kann man durchaus Verständnis wecken, auch wenn es sehr schwer ist, Anwendungsbeispiele zu finden, die aus der Erfahrungswelt der Schüler/innen kommen.

- Außer dem „logischen Denken“ wird eigentlich keine der allgemeinen Qualifikationen (Darstellen und Interpretieren, Argumentieren und Begründen, Problemlösen, Anwenden, kritisches Denken, exaktes Arbeiten...), die im Mathematikunterricht angestrebt werden, genannt, auch wenn sich auf Nachfragen herausstellt, dass manches davon mit „logischem Denken“ gemeint war. Auch hier ist das Gespräch mit den Schüler/innen wesentlich und es wird interessant sein, ob und wie sich diese Sichtweise bis zur Matura verändert.

Wie bereits früher angemerkt wurde, soll im Rahmen dieses Projekts vor allem der Nutzen der Mathematik für jenen Maturanten herausgearbeitet werden, der in seiner weiteren Laufbahn nichts mehr mit Mathematik im engeren Sinn zu tun hat. Hier scheint ein wesentlicher Punkt die von R. Fischer angesprochene Kommunikationsfähigkeit zwischen Laien und Experten zu sein. Neben der Notwendigkeit, fachliche Zusammenhänge in der Alltagssprache klar verständlich darzulegen, können die Mathematik (und die Naturwissenschaften im Allgemeinen) einen Beitrag leisten, Fachbegriffe in die Alltagssprache zu bringen bzw. im Alltag verwendete Fachausdrücke (z. B. Energie, Funktion...) mit einem konkreten Inhalt zu versehen. Hier soll auch für einen moderaten Einsatz der Fachsprache im Unterricht – etwa nach dem Motto *„So wenig wie nötig, soviel wie möglich“* – plädiert werden. Die Schüler/innen sollen im Unterricht die Verwendung von Fachausdrücken nicht als Selbstzweck erleben. Sie sollen aber erkennen, dass die Benutzung einer Fachsprache ein rationelles, für die Naturwissenschaften typisches Werkzeug ist, das auch in vielen anderen Bereichen (Medizin, Psychologie...) übernommen wurde.

2.2.3 Der Selektionsaspekt

Der Gesichtspunkt der Selektion spielt in diesem Projekt kaum eine Rolle, soll aber trotzdem als Tatsache nicht unerwähnt bleiben. Schule verteilt Chancen, und die Mathematik trägt als Schularbeitenfach ihren Teil dazu bei, zumindest so lange gesellschaftlicher Konsens besteht, dass jeder Maturant ein bestimmtes Maß an Mathematik bewältigen können muss. Dieser Selektionsaspekt wird vor allem in den HTLs sichtbar, wo hohe Anforderungen im Mathematikunterricht als Qualitätskriterium der Schule verkauft werden.

3 KONKRETE INHALTE

3.1 Vorbemerkung

Betrachtet man die Inhalte der Lehrpläne unter den obigen Gesichtspunkten, so bleibt einerseits erstaunlich wenig übrig, was als „sichernswertes Gut“ gilt, andererseits scheint es sehr schwierig, dieses Wenige tatsächlich dauerhaft zu sichern. Sehr gute Arbeiten auf diesem Gebiet wurden bereits von G. Malle geleistet, dessen Überlegungen viele Bereiche der 5. Klasse betreffen. Entsprechende Beiträge sind in der Literaturliste angeführt. Kompetenzen wie Darstellen und Interpretieren, Argumentieren und Begründen, Problemlösen, Anwenden, kritisches Denken, exaktes Arbeiten,... lassen sich mit den meisten Inhalten des Oberstufenstoffes mehr oder minder gut trainieren. Unter diesem Gesichtspunkt ist fast jedes Stoffgebiet beliebig austauschbar. Für den Maturanten, der Mathematik oder eine damit verwandte Fachrichtung studieren will, kann man im Gymnasium gar nicht zu viel machen. Es sei noch einmal betont, dass die folgenden Überlegungen auf diejenigen abzielen, die in ihrem Berufsleben nichts mit Mathematik an sich zu tun haben.

Es erscheint uns wichtig, eine Unterscheidung zwischen <u>Fähigkeiten</u> und mathematischen <u>Fertigkeiten</u> zu treffen, wie wir es nennen möchten. Betrachten wir dazu folgendes Beispiel:

> *Die Seiten eines Rechtecks betragen 6 cm und 4 cm. Werden beide Seiten um den gleichen Betrag verlängert, erhält man ein Rechteck, dessen Flächeninhalt doppelt so groß ist wie der Flächeninhalt des ursprünglichen Rechtecks. Um wie viel müssen beide Seiten verlängert werden?* (Aus Bürger, Fischer, Malle, Mathematik 1)

Die Fähigkeit besteht darin, den Text zu analysieren und in eine Gleichung zu übersetzen, die Fertigkeit besteht darin, die zugehörige (quadratische) Gleichung zu lösen. Die Fähigkeit muss erhalten bleiben, die Fertigkeit geht meist sehr schnell mit dem Vergessen der Lösungsformel für eine quadratische Gleichung verloren. Auch wenn die Grenze nicht immer so leicht zu ziehen ist, wie in diesem Beispiel, so richtet sich die (berechtigte) Kritik am Mathematikunterricht sehr häufig dahin, dass zu viel Wert auf das Erlernen von Fertigkeiten verwendet wird, die man schnell wieder vergisst, wenn sie nicht mehr benötigt werden. Die Einführung von Computeralgebrasystemen (CAS) im Unterricht muss zu einer breiten Diskussion führen, welche Fertigkeiten in Zukunft im Mathematikunterricht noch erlernt werden müssen. Es erscheint selbstverständlich, dass man die Grundrechnungsarten beherrschen muss, obwohl es Taschenrechner gibt. Aber welche Integrationsmethoden muss man können, wenn das Integrieren vom CAS ausgeführt werden kann? Oder reicht es, den Begriff des Integrals und verschiedene Anwendungsmöglichkeiten zu kennen? Diese Entwicklung steht erst am Anfang. Sie wird aber nach unserer Meinung dazu führen, dass das Erlernen von Fertigkeiten an Bedeutung verliert und sich der Schwerpunkt zum Erwerb von Fähigkeiten verlagert.

3.2 Überlegungen zum Stoff der 5. Klasse

Nimmt man die Inhalte des Lehrplans der 5. Klasse her, so findet man im Wesentlichen drei Bereiche, in denen „sichernswertes Gut“ enthalten ist:

- Zahlen und Formeln (Hier geht es überwiegend um die Festigung von Kenntnissen aus der Unterstufe)
- Funktionen unter verschiedenen Gesichtspunkten
- Vektorrechnung und analytische Geometrie

3.2.1 Zahlen und Formeln

Schülerinnen und Schüler einer 2. Klasse bekamen die Aufgabe gestellt, Beispiele zu finden, von denen sie der Meinung sind, dass man sie in der 5. Klasse noch lösen können muss. Einige davon sind bei den folgenden Punkten angeführt. Interessanterweise sind diese Aufgaben meist schwerer als die von uns angeführten Kontrollfragen. Wir werden eine Auswahl dieser Beispiele am Ende des Schuljahres den Schüler/innen der 5. Klasse vorlegen.

- Zahlen lassen sich in verschiedener Form - Bruchzahlen, Dezimalzahlen – darstellen

  Kontrollfrage: (1) Schreibe $\frac{2}{5}$ in Dezimalform (2) Schreibe 0,20 als Bruch

  Kontrollfrage (Schüler): Wandle in Brüche um: (1) $0,\dot{1}7\dot{3}$ (2) $1,2\dot{3}\dot{9}$

- Kennen der Potenzschreibweise, insbesondere der bei Taschenrechnern üblicherweise verwendeten Gleitkommadarstellung

  Kontrollfrage: Schreibe $2,3.10^5$ als Dezimalzahl an

- Ordnen von Zahlen ihrer Größe nach

  Kontrollfrage: Ordne folgende Zahlen nach ihrer Größe. Beginne mit der kleinsten Zahl: 100; 10^{-1}; 0,01; 10^{3}; 10

  Kontrollfrage (Schüler der 2. KLasse): 0,4 ; $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{8}$; 0,35 ; $0{,}\dot{3}\dot{1}$

- Abschätzen von Rechenergebnissen

  Kontrollfrage: Beantworte ohne Hilfsmittel: $\frac{19{,}304 \cdot 22{,}31}{9{,}027}$ ist (1) ungefähr 10, (2) ungefähr 50, (3) größer als 100, (4) kann ohne schriftliche Rechnung bzw. TR nicht bestimmt werden

- Beherrschen der Prozentrechnung

  Kontrollfrage: Der Preis einer Ware beträgt inklusive 20% MWSt. 18 €. Berechne den Nettopreis.

- Beherrschen einfacher Formelumformungen

  Kontrollfrage: Löse die Formel $F = \frac{m.v^2}{r}$ (1) nach m, (2) nach v, (3) nach r auf.

3.2.2 Funktionen

Ein zentraler Begriff der Schulmathematik ist der Funktionsbegriff. Er findet auch im Alltag in vielfältiger Form Verwendung. Die Bandbreite geht dabei allerdings von mathematisch verwaschenen Formulierungen („Wie funktioniert denn das?“) bis hin zu korrektem Gebrauch (z.B. Treibstoffverbrauch von Fahrzeugen in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit). In der Oberstufe soll eine exakte Terminologie (Graph, Stelle bzw. Argument, Definitionsmenge, Funktionswert) eingeführt und konsequent verwendet werden. Damit sollen korrekte Vorstellungen zum mathematischen Funktionsbegriff entwickelt werden. In der 5. Klasse werden sehr ausführlich lineare Funktionen behandelt. Die Kenntnis ihrer Eigenschaften soll gesichert werden, ebenso ihre Abgrenzung zu nichtlinearen Funktionen. Als Beispiele aus der Praxis bieten sich Kostenfunktionen ebenso an wie Zeit-Ort-Funktionen.

Von Funktionen sollten zwei Vorstellungen vorhanden sein:

- Funktionen beschreiben, wie sich die Veränderung einer Größe auf eine andere Größe auswirkt (***Kovariationsvorstellung***). Diese Abhängigkeit kommt sehr häufig in Formeln zum Ausdruck. Besondere Formen von Abhängigkeiten sind die

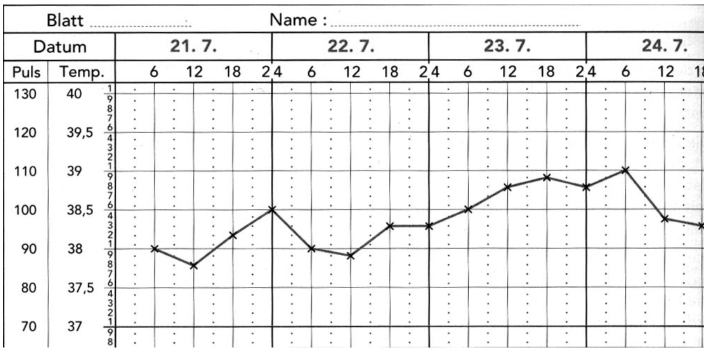
  <u>direkte Proportionalität:</u> Wird eine Größe um das a-fache verändert, so ändert sich der Wert der anderen Größe um denselben Faktor.
  Kontrollfrage: Der Preis einer Ware ist zur gekauften Menge direkt proportional. Wie ändert sich der Preis, wenn man (1) die Menge halbiert, (2) die Menge verdreifacht?

  und die

  <u>indirekte Proportionalität:</u> Wird eine Größe um das a-fache verändert, so ändert sich der Wert der anderen Größe um den a-ten Teil.
  Kontrollfrage: Für eine feste Wegstrecke sind Zeit und Geschwindigkeit zueinander indirekt proportional. Wie ändert sich die benötigte Zeit, wenn man (1) die Geschwindigkeit verdoppelt, (2) die Geschwindigkeit auf zwei Drittel ihres ursprünglichen Wertes verringert?

- Funktionen beschreiben, wie einer Größe eine andere Größe zugeordnet wird (***Zuordnungsvorstellung***). Diese Zuordnung kommt gut in der graphischen Darstellung zum Ausdruck.

  Kontrollfrage: Die Abbildung zeigt eine Fieberkurve aus einem Krankenblatt.

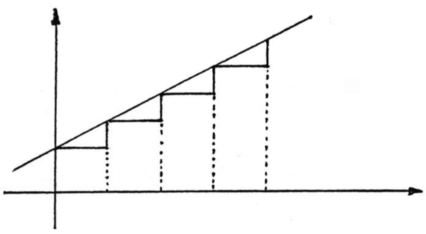


  Wie hoch war die Körpertemperatur am (1) 21.7., 12 Uhr, (2) 22.7., 6 Uhr, (3) 23.7., 18 Uhr.
  Wann war die Temperatur am höchstens (am niedrigsten)?
  Was drückt die Verbindung der Messwerte aus? Wie sind die Messwerte verbunden? Ist es sinnvoll, Zwischenwerte abzulesen?

Beiden Vorstellungen gemeinsam ist, dass es sich bei Funktionen immer um <u>eindeutige</u> Abhängigkeiten bzw. Zuordnungen handelt.

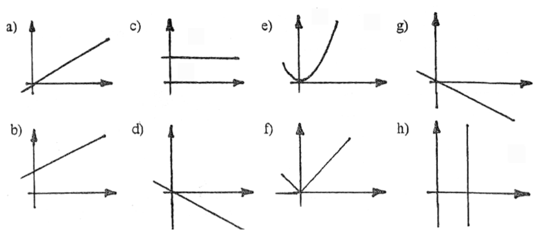
Kenntnisse über lineare Funktionen:

- Lineare Funktionen beschreiben ein gleichmäßiges Wachsen (Abnehmen): Gleiche Zunahme der Argumente bewirkt gleiche Zunahme (Abnahme) der Funktionswerte.



- Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade.

  Kontrollfrage: Welche der folgenden Graphen stellen eine lineare Funktion dar?



- Eine lineare Funktion besitzt die Termdarstellung f(x) = k.x +d.

  Kontrollfrage: Kreuze an, welche der folgenden Funktionen linear sind.

$f(x) = 2.x^2 + 1$	$f(x) = 2.x + 1$	$f(x) = 2.x$
$f(x) = 2.(x + 1)$	$f(x) = -x + 1$	$f(x) = (x + 1)^2$

- Die Konstante k heißt Steigung der linearen Funktion. Ist $k > 0$, so ist f steigend, ist $k = 0$, so ist f konstant, ist $k < 0$, so ist f fallend.

Kontrollfrage: Skizziere den Graph einer linearen Funktion mit der Steigung k, wobei (1) k>0, (2) k<0, (3) k = 0 ist.

- Deutung von k:
  (1) Die Steigung k ist gleich dem Verhältnis der Änderung der Funktionswerte zur Änderung der Argumente: $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$
  (2) Die Steigung k ist gleich der Änderung der Funktionswerte bei Erhöhung der Argumente um 1.

Kontrollfragen:
(1) Gegeben sei die lineare Funktion f(x) = 7x – 3. Ein Argument wird um den Betrag a erhöht. In welchem Verhältnis steht die Zunahme der Funktionswerte zur Zunahme der Argumente?
(2) Gegeben sei die lineare Funktion f(x) = -7x – 3. Um wie viel nehmen die Funktionswerte ab, wenn man das Argument um 1 erhöht?

- Die Konstante d ist der Funktionswert an der Stelle null. Ist d = 0, so geht die Gerade durch den Ursprung. Argument und Funktionswert einer linearen Funktion sind dann zueinander direkt proportional.

Kontrollfrage: Für welche der folgenden linearen Funktionen gilt f(0) = 5? Wo liegt eine direkte Proportionalität vor?

(1) f(x) = 5x + 5	(2) f(x) = 5x – 1	(3) f(x) = 5
(4) f(x) = -5x + 5	(5) f(x) = x + 5	(6) f(x) = 5x

3.2.3 Vektorrechnung und analytische Geometrie

Vektorrechnung und analytische Geometrie sind nicht in allen Schultypen im Lehrplan vorgesehen. Welche Argumente sprechen für die Einführung von Vektoren?

- Gerichtete Größen (Vektoren) im Gegensatz zu reinen Zahlenwerten (Skalaren) sind in der Physik von großer Bedeutung (Geschwindigkeit, Kraft, Impuls...).

- Vektoren (und in ihrer Verallgemeinerung Matrizen) werden in der Wirtschaftsmathematik verwendet.

- Vektoren bieten die Möglichkeit, geometrische Konstruktionen rechnerisch schrittweise nachzuvollziehen und schulen damit auch die Raumvorstellung.

- Durch die Verwendung von Vektorformeln lassen sich aufwendige Rechenanweisungen in einfacher Form darstellen. So kann man z.B. die Erhöhung der Preise einer großen Zahl von Waren um 10% durch die Formel $P_{neu} = 1{,}1.P_{alt}$ darstellen. Dabei können P_{neu} und P_{alt} Vektoren mit hunderten Koordinaten sein.

- Die Einführung neuer Symbole für komplexe Objekte stellt ein wichtiges Hilfsmittel der modernen Mathematik dar. Vektoren bieten die Möglichkeit, diese grundlegende Vorgangsweise in der Schule exemplarisch zu demonstrieren.

- Vektoren bieten auch gute Möglichkeiten, einfache Beweise z.B. für geometrische Zusammenhänge auszuführen.

Zwei grundlegende Vorstellungen über Vektoren sollen vorhanden sein:

- Vektoren haben einen *algebraischen Aspekt*: Ein n-dimensionaler Vektor ist eine Zusammenfassung von n reellen Zahlen. Die Bestandteile des Vektors werden Koordinaten genannt. Man kann mit Vektoren koordinatenweise rechnen: Addition, Subtraktion, Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl, Skalarprodukt von Vektoren sind mögliche Rechenoperationen. Zum Unterschied zu den Zahlen gibt es jedoch keine Division von Vektoren.

- Vektoren haben einen *geometrischen Aspekt*: Ein zwei- bzw. dreidimensionaler Vektor kann als Punkt bzw. als Pfeil in der Ebene (R^2) bzw. im Raum (R^3) gedeutet werden. Jedem Vektor entsprechen unendlich viele Pfeile, die alle gleich lang, parallel und gleich orientiert sind. Umgekehrt entspricht jedem Pfeil genau ein Vektor. Die geometrische Deutung der algebraischen Rechenoperationen soll bekannt sein. Weiters lassen sich mit Hilfe von Vektoren Punktmengen im R^2 bzw. R^3 darstellen (Parameterdarstellung von Geraden und Ebenen).

Es ist vermutlich schon viel erreicht, wenn es gelingt, diese beiden Aspekte in sehr allgemeiner Form über die Matura hinaus zu sichern, da Vektoren in der Alltagswelt kaum als solche vorkommen. Diese Frage bedarf einer weiteren ausführlichen Diskussion.

Ein wesentlicher Aspekt der Vektorrechnung kann/muss – wie in anderen Teilgebieten der Schulmathematik auch – auf einer Metaebene angesiedelt gesehen werden. Auch wenn operationale <u>Fertigkeiten</u> im Umgang mit Vektoren sehr weitgehend und relativ rasch bei vielen Schüler/innen wieder verloren gehen oder zumindest auf eine – eventuell reaktivierbare – tiefer liegende Ebene des Unterbewusstseins absinken, so rechtfertigt doch die auf diesem Weg erworbene bzw. ausgebaute <u>Fähigkeit</u> der Raumvorstellung den Aufwand. Unter diesem Gesichtspunkt kann die Auseinandersetzung um den mathematischen Grundwissenskatalog auch rückgekoppelt dazu beitragen, im prozesshaften Geschehen des Mathematikunterrichts sowohl bei Lernenden wie auch bei Lehrenden den Blick für das – von höherer Warte aus gesehen – Wesentliche zu schärfen.

Für Schüler/innen der 5. Klasse lassen sich aus diesen Aspekten konkrete Grundfähigkeiten ableiten, die die Voraussetzungen für die Fortsetzung der Vektorrechnung in der 6. und 7. Klasse bilden:

Die Schüler/innen sollen

- verschiedene Anwendungssituationen von Vektoren beschreiben können.

- die Rechenoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl und das Skalarprodukt von Vektoren beherrschen und die wichtigsten Rechengesetze für diese Operationen kennen.

- die Rechenoperationen und Rechengesetze geometrisch deuten können.

- den Unterschied zwischen Vektor und Betrag eines Vektors kennen und Distanzberechnungen ausführen können.

- mit Hilfe der Vektorrechnung einfache geometrische Aufgaben lösen können (z.B. Punkte aufsuchen, Streckenmittelpunkt, Teilungspunkte).
- die Gleichung einer Geraden in Parameterform aufstellen können und mit Hilfe der Parameterform einfache geometrische Aufgaben lösen.
- einen Normalvektor im R^2 bilden können und insbesondere die Eigenschaft des Skalarproduktes kennen, dass das Skalarprodukt genau dann null ist, wenn die Vektoren einen rechten Winkel bilden.

Bezüglich geeigneter Kontrollaufgaben sei hier nochmals auf die Arbeiten von G. Malle verwiesen.

4 RÜCKBLICK UND AUSBLICK

Wir haben im nun schon bald zu Ende gehenden Schuljahr versucht, diese Überlegungen umzusetzen.

- Durch Gespräche mit den Schüler/innen über Sinn und Bedeutung der Inhalte. Wie bereits weiter oben ausgeführt wurde, ist es dabei durchaus möglich, Verständnis für Zusammenhänge zu wecken.
- Durch Schwerpunktsetzung mit Bezug auf das Grundwissen.
- Durch häufige Wiederholung dieser Gesichtspunkte.
- Durch schriftliche Zusammenfassung der Inhalte, die den Schüler/innen wichtig erscheinen, am Ende jedes Stoffkapitels.
  Dabei ist festzustellen, dass es für Schüler/innen verständlicherweise häufig schwer ist, Wichtiges von weniger wichtigen Inhalten zu trennen. Dazu exemplarisch einige solcher von Schüler/innen geschriebene Zusammenfassungen zum Kapitel „Lineare Funktionen“:

  Eine lineare Funktion wird durch eine Gerade im Koordinatensystem dargestellt. Für jede lineare Funktion gilt: $y = kx + d$ (k = Anstieg). Kennt man k und d, kann die Gerade gezeichnet werden, vorausgesetzt man hat zwei Koordinatenpaare (x_A/y_A), (x_B/y_B).

  Lineare Funktionen können leicht durch Terme dargestellt werden, wobei die Funktion immer eine Gerade ist. Eine Funktion f mit $f(x) = kx + d$ ($k, d \in R$) ist eine lineare Funktion. Die Variable k bestimmt die Steigung (wenn $k = 0 \rightarrow$ Funktion parallel zur x-Achse). Jede lineare Funktion muss durch die y-Achse gehen, sonst ist x nicht eindeutig bestimmt. Für die Zeichnung einer linearen Funktion braucht man nur zwei Punkte. Man kann diese Punkte mit Hilfe von k und d bestimmen.

  Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade. Die Funktion $f: x \rightarrow kx + d$ heißt lineare Funktion. Man nennt k Anstieg oder Steigung der Funktion. Für jede lineare Funktion gilt: Vergrößert man den x-Wert um 1 so ändert sich der Funktionswert um k. Aber nicht jede Gerade ist eine lineare Funktion. Beispiel: Eine Gerade parallel zur y-Achse.

Die von den Schüler/innen erstellten Zusammenfassungen wurden im Unterricht nachbesprochen.

- Durch Einbau von geeigneten Kontrollfragen bei Schularbeiten.

Wie weit es gelungen ist, dieses Grundwissen besser als im herkömmlichen Ausmaß zu sichern, wird erst die Zukunft zeigen. Wir haben vor, bis zum Herbst geeignete Testaufgaben zusammenzustellen und diese den Schüler/innen zu Beginn des nächsten Schuljahres vorzulegen.

Zwei Ziele für die Zukunft:

- Weiterführung der Diskussion über das Grundwissen.
- Weiterführung der Überlegungen zu den Stoffinhalten in den kommenden Jahren bis zur Matura.

5 LITERATUR

BÜRGER, H., MALLE, G.: Ein Lehrgang über lineare Funktionen

HAWKING, S. W.: Eine kurze Geschichte der Zeit. Rowohlt 1988

MALLE, G.: Grundvorstellungen zu Funktionen

MALLE, G.: Materialien zur Lehrerfortbildung, Überlegungen zum Kernstoff der Oberstufe, Funktionen

MALLE, G.: Materialien zur Lehrerfortbildung, Überlegungen zum Kernstoff der Oberstufe, Vektorrechnung und analytische Geometrie

WERTHEIM, M.: Die Hosen des Pythagoras. Piper: München 2000