3 UNTERRICHTSVERSUCHE IN MATHEMATIK NACH DEM GRUND-BILDUNGSKONZEPT

Monika Jarmer

Vienna- Bussiness School HAK Floridsdorf

Wien, 2004

INHALTSVERZEICHNIS

ABSTRACT

Basierend auf dem Grundbildungskonzept der S1 – Gruppe von Imst² wurden in einer Handelsakademie drei Unterrichtsversuche mit anschließender Evaluation zu den Themen Lineare Funktionen, Exponentialfunktion und Differenzen- und Differentialquotient durchgeführt.

Ziel war es zu zeigen, dass Schüler/innen zu diesen Themen Grundvorstellungen entwickeln können, die sie auch noch nach der Matura befähigen sollen, die naturwissenschaftlichen Bereiche im Leben und in der Gesellschaft wahrzunehmen und richtig zu beurteilen.

Unterrichtet wurde nach einem Lehrgang von G. Malle.

Die Auswertung ergab, dass die Schüler Grundvorstellungen zu den Lin. Funktionen, zur Exponentialfunktion sowie zum Differenzenquotienten entwickelt haben. Der Test zu den Grundvorstellungen zum Differentialquotienten hingegen ist sehr schlecht ausgefallen.

1 EINLEITUNG UND ALLGEMEINE PROJEKTVORSTELLUNG

Als Mitglied der erweiterten Fachgruppe für Mathematik habe ich in den letzten zwei Jahren an den Diskussionen zum Grundbildungskonzept teilgenommen und mich in diesem Rahmen mit der Schülerfrage „Wozu brauch´ ich das?“ auseinandergesetzt.

Anders formuliert: „Was muss (soll) ein Maturant noch Jahre nach der Matura in Mathematik wissen?“ „Welche Rolle spielt Mathematik in der Allgemeinbildung?“

Diese Fragen stehen ja besonders in den Schulen, aber natürlich auch im täglichen sozialen Miteinander immer wieder im Raum.

Ausgehend von dieser Diskussion wurden von den Teilnehmern und anderen Kollegen in Österreich Unterrichtsversuche durchgeführt, die zeigen sollten, wie weit Grundvorstellungen und Grundfertigkeiten - im Sinne des Grundbildungskonzeptes der S1-Gruppe von Imst² - bei Schülern erzeugt bzw. diesen vermittelt werden können.

Für mich persönlich stellten diese Versuche die Möglichkeit dar, meine eigenen Gedanken und Vorstellungen dazu zu konkretisieren und mich mit neuen Ideen auseinanderzusetzen.

Ich unterrichte an der Vienna – Business – School HAK Floridsdorf in Wien.

1.1 Planung

Die Unterrichtsversuche fanden zu den Themen

Lineare Funktionen (2. Jahrgang) – Dauer: 15 Unterrichtsstunden

Exponentialfunktionen (3. Jahrgang) – 19 Unterrichtsstunden

Differenzen – und Differentialquotient (4. Jahrgang) – 11 Unterrichtsstunden statt.

Grundlage für die Unterrichtsvorbereitung war in allen drei Bereichen je ein Lehrgang, der von G. Malle zur Verfügung gestellt wurde.

Nach jeder Stunde wurde ein tagebuchähnliches Protokoll geführt, das nicht nur eine Sammlung von Daten darstellt, sondern auch Reflexionen zu den Unterrichtseinheiten jeweils danach enthält.

Abschließend wurden evaluierende Tests durchgeführt, die vom S1 – Team ausgewertet wurden.

2 DURCHFÜHRUNG

2.1 Klassen

Ich möchte daran erinnern, dass es in der Handelsakademie in der ersten Klasse keine Mathematik gibt. Stattdessen wird das Fach Wirtschaftliches Rechnen unterrichtet. (Ab 2004/05 lt. neuem Lehrplan wird es dieses Fach nicht mehr geben).

i) Lineare Funktionen – 2. Jhg. Handelsakademie

Voraussetzungen: (Drei Wochenstunden Mathematik)

Der Versuch wurde in den Klassen 2BK und 2DK durchgeführt. In beiden Klassen habe ich das Jahr zuvor den Unterrichtsgegenstand „Wirtschaftliches Rechnen“unterrichtet.

Die Voraussetzungen sind natürlich sehr gemischt: Die Schüler kommen aus der AHS, aus der HS und aus der Allgemeinen Mittelschule. Erfahrungsgemäß bringen die letzteren praktisch keine Kenntnisse in Mathematik mit. Allerdings zeigen sie ansatzweise mehr Verständnis für Aufgaben, die kreative Lösungen verlangen.

Beide Klassen sind Laptopklassen (Derive) mit ungefähr 30 Schülern.

In der 2BK gibt es keine, in der 2DK sieben Repetenten.

ii) Exponentialfuntkionn – 3. Jhg. Handelsakademie

Voraussetzungen: (Drei Wochenstunden Mathematik)

Die 3AK wurde aus zwei zweiten Klasssen (verschiedene Lehrer) zusammengelegt und von mir neu übernommen.

Sie hat 28 Schüler, davon 2 Repetenten und ist ebenfalls eine Laptopklasse.

iii) *Differentialrechnung* – 4. Jhg. Handelsakademie

Voraussetzungen: (Zwei (!) Wochenstunden)

Die 4AK ist eine aus zwei dritten Jahrgängen zusammengelegte Klasse mit 35 Schülern (3 Repetenten), von denen mir ungefähr die Hälfte seit der zweiten Klasse bekannt ist. Die andere Hälfte war für mich gänzlich neu.

Die Schüler verwenden den TI-83, einen graphischen Taschenrechner.

Die 4BK ist eine Laptopklasse mit 19 Schülern, ohne Repetenten. Ich unterrichte diese Klasse seit der ersten.

2.2 Unterrichtsmethode bzw. Prinzipien

2.2.1 Allgemeine Unterrichtsprinzipien zu Mathematik

Grundlage war das Konzept für mathematisch-naturwissenschaftliche Grundbildung, Teil des Schwerpunktprogramms der S1-Gruppe von IMST².

Dieses Konzept enthält Leitlinien zur Auswahl von Inhalten und Methoden (WAS soll der Schüler können und WIE kann der Unterricht gestaltet werden, sodass die mathematisch – naturwissenschaftlichen Kompetenzen der Schüler über die Schulzeit hinaus erhalten bleiben?)

Diese Leitlinien wurden unter Berücksichtigung internationaler Ansätze (z. B.: PISA) und im Dialog mit Lehrern entwickelt.

Sie sind vor allem schülerorientiert, d. h. sie berücksichtigen, dass Schüler/innen in einer sich ständig verändernden Umwelt, geprägt durch Traditions- und Autoritätsverlust, heranwachsen und daher die inhaltliche und methodische Motivation direkt beim Schüler ansetzen muss.

Konkret findet diese Schülerbezogenheit zunächst ihren Ausdruck in der Formulierung der Leitlinien:

Die Leitlinien für die Auswahl der <u>Methoden</u> beinhalten das

- Anknüpfen an das Vorwissen der Schüler,
- Anwendungsbezogenes Lernen,
- Erfahrungsgeleitetes Lernen (Wecken von Neugier, Anleiten zum eigenständigen Erkunden),
- Wissen in verschiedenen Kontexten anwenden lernen (aus verschiedenen Blickwinkeln betrachten),
- im sozialen Umfeld lernen (gemeinsames Lernen),
- mit instruktionaler Unterstützung lernen (neue Medien)

Bei der Auswahl von <u>Inhalten</u> werden folgende Leitlinien angeboten:

Die Inhalte sollen

- das <u>*Weltverständnis fördern*</u> (Orientierung in einer von Technik und Naturwissenschaft geprägten Welt.)
- Mathematik und die Naturwissenschaften als <u>*kulturelles Erbe*</u> und in einem größeren geschichtlichen Zusammenhang sehen.
- helfen, <u>*alltägliche Probleme zu bewältigen*</u> (persönliche Entscheidungen zu treffen),

- zur kritischen Auseinandersetzung mit naturwissenschaftlichen Meinungen befähigen (auch als Entscheidungsgrundlage) – mit anderen Worten: die *Gesellschaftsrelevanz* der Naturwissenschaft erfassen lernen.

- Einsicht in mathematisches und naturwissenschaftliches Denken (Abstrahieren, Modellbilden, ...) vermitteln, hinführen zu einem *Wissenschaftsverständnis*, dass die Naturwissenschaften in Beziehung und Wechselwirkung mit der Gesellschaft sieht.

- der *beruflichen Orientierung und Studierfähigkeit* dienen.

Dieses Konzept ist „dynamisch“ zu verstehen. D. h. es ist dialogfähig in dem Sinne, dass es durch Praxiserfahrung verändert (ausgebaut, adaptiert,...) werden kann.

2.2.2 Umsetzung des Konzepts im Unterichtsversuch

Inhalte: Grundlage für die Auswahl der Inhalte waren, wie bereits erwähnt wurde, Unterrichtslehrgänge, die von G. Malle et al. entwickelt wurden.

Diese Lehrgänge wurden unter Berücksichtigung des Lehrplans für die HAK sowie zeitlicher Rahmenbdingungen an manchen Stellen gekürzt: so hatten anwendungsbezogene Aufgaben vor den weiterführenden, theoretischen Vorrang. (Das Fach heißt auch „Mathematik und angewandte Mathematik“.) Ebenso wurde der wirtschaftliche Kontext eher betont als der vertiefende theoretische Zusammenhang.(s. Anhang)
In den vierten Jahrgängen (Differenzen- und Differenzialquotient) war die Kürzung besonders straff, da in diesem Jahrgang nur zwei Wochenstunden vorgesehen sind.

Methoden: Die Wahl der Methoden war völlig frei.
In den neu übernommenen Klassen versuchte ich das *Vorwissen* der Schüler zu erfassen, in den weitergeführten Klassen war es mir in unterschiedlicher Ausprägung bekannt.
Der alltägliche *Anwendungsbezug* ist durch die Dominanz der Wirtschaftsmathematik für die Schüler ständig präsent. Weitere Alltags- und Anwendungsbezüge wurden themen- und jahrgangsabhängig hergestellt. (*erfahrungsgeleitetes Lernen*)
Der Einsatz moderner Medien (Internet, Derive, graphikfähiger Rechner) und Partnerarbeiten gaben den Schülern die Möglichkeit, in Gruppen zu arbeiten, sich gegenseitig zu helfen (*mit instruktionaler Unterstützung zu lernen*; *Lernen im sozialen Umfeld*) und ergänzten außerdem die Inhaltsvermittlung durch Lehrervortrag und fragend – entwickelndes Unterrichtsgespräch.

2.2.3 Die Unterrichtsversuche im Detail anhand exemplarischer Aufgaben

2.2.3.1 Lineare Funktionen – 2. Jahrgang

Grundvorstellungen (GV):

GV 1: Lineares Wachsen (Abnehmen) bedeutet: Gleiche Zunahme der Argumente bewirkt gleiche Zunahme (Abnahme) der Funktionswerte.

GV 2: Eine lineare Funktion besitzt die Termdarstellung $f(x) = kx + d$ (mit k, d $\in$ R.) Die Konstante k heißt Steigung der linearen Funktion.

GV 3: Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade.

GV 4: Die Konstante d ist der Funktionswert an der Stelle 0. $f(0) = d$.

GV 5: Die Steigung k ist gleich dem Verhältnis der Änderung der Funktionswerte zur Änderung der Argumente. [Verhältnisdeutung der Steigung k]

GV 6: Die Steigung k ist gleich der Änderung der Funktionswerte bei Erhöhung des Arguments um 1 [Einheitsdeutung der Steigung k]

GV 7: Die Steigung k ist gleich dem Faktor, mit dem man die Änderung der Argumente multiplizieren muss, um die Änderung der Funktionswerte zu erhalten. (Der Betrag der Steigung k gibt also an, wievielmal stärker sich die Funktionswerte ändern als die Argumente.) [Faktordeutung der Steigung k]

GV 8: $k > 0 \Rightarrow$ f ist streng monoton wachsend
$k = 0 \Rightarrow$ f ist konstant
$k < 0 \Rightarrow$ f ist streng monoton fallend

Grundfähigkeiten:

- Die Schüler sollen imstande sein, den Graphen einer linearen Funktion zu zeichnen (aus verschiedenartigen Angaben)
- Die Schüler sollen imstande sein,aus dem Graphen einer linearen Funktion k und d herauszulesen.
- Die Schüler sollen Anwendungen linearer Fuktionen nennen können und dabei jeweils die Bedeutung von k und d angeben können.
- Die Schüler sollen die GV 1-8 in Anwendungssituationen einsetzen können.
- Die Schüler sollen Probleme erläutern können, die sich beim Anwenden linearer Funktionen ergeben können,[Reflexion der Modellbildung]

Vorwissen:

Da ich die Schüler im Vorjahr in Wirtschaftlich Rechnen unterrichtete, konnte ich davon ausgehen, dass sie über Proportionen Bescheid wussten. Die Kapitel Relationen und Lösen von linearen Gleichungen hatten wir im laufenden Schuljahr bereits durchgenommen, d. h.Koordinatensystem, Wertetafel und Lösen von Linearen Gleichungen waren den Schülern vertraut.

EINIGE DETAILS:

Zu GV 8 (k<0, k>0, k=0): *Einsatz von Derive*: Die Schüler probierten verschiedene k´s aus. Schließlich rief eine Schülerin: „ Das gibt einen schönen Stern!“ *(Fördern von Aha- Erlebnissen)*

Zu GV 7 (Deutung von k als Faktor): f(x+h) - f(x) = k*h . Ich zeichnete an der Tafel in ein großes Steigungsdreieck all die kleinen Steigungsdreiecke (1,k) ein, sodass man k*h als Differenz der Funktionswerte (senkrechte Kathete des Steigungsdreiecks) schön sehen konnte. Eine Schülerin konnte dann den Beweis führen. Sie hatte ihn mir schon in der Pause nach der letzten Stunde gezeigt um zu erfahren, ob er auch stimmt. (Es war ein Vorzeichen- Fehler, aber sonst war er richtig.) Diese Schülerin kommt übrigens aus der Allgemeinen Mittelschule und hatte große Probleme in Mathematik. – (*Lernen von Abstrahieren und Formalisieren*)

Anwendungen der GV 1-8: *Vergleich von linearen Funktionen* - Gegen Ende des Kapitels war es eine Hü, Handy- Tarife zu sammeln und in der nächsten Stunde mitzubringen. Durch den Vergleich der gängigsten Tarife diskutierten wir, welche am günstigsten wären. Dabei zeigten die Schüler einen hohen Informationsgrad, waren außerordentlich kritisch und wussten über die beschränkte Aussagekraft einer linearen Funktion als Modell für diesen Fall besser Bescheid als ich.

(*Modellbildung, Anwendungssituationen, Alltagsbezug*)

Evaluation: Die Testergebnisse waren in beiden Klassen ungefähr gleich. Der Test wurde gleich nach Ende des Kapitels furchgeführt. Die Schularbeit fand erst zwei Wochen später statt. D.h. die Schüler haben den Stoff in diesem Sinne nicht gelernt .

Das Kapitel Rekursivdarstellung habe ich aus Zeitgründen ausgelassen.

Der Test ergab, dass die GV im Großen und Ganzen nach dem Unterrichtsversuch tatsächlich vorhanden waren.

Schwächen gab es bei GV 5 und GV 7 (Steigung als Verhältnis und Steigung als Faktor) und doch auch bei Deutungen und Begündungen mancher Anwendungsaufgaben.

2.2.3.2 Exponentialfunktion (inkl. Interviews)- 3. Jahrgang

Grundvorstellungen (GV):

GV 1: Exponentielles Wachsen (Abnehmen) bedeutet: Gleiche Zunahme der Argumente bewirkt gleiche relative bzw. prozentuale Zunahme (Abnahme) der Funktionswerte.

GV 2: Eine Exponentialfunktion besitzt die Termdarstellung $f(x) = c*a^x$ (mit $c \in R$, $a \in R^+$, $a \neq 1$). Die Konstante a heißt Basis der Exponentialfunktion.

GV 3: Wissen, wie der Graph einer Exponentialfunktion aussieht für a>0 bzw. a<0.

GV 4: Die Graphen der Funktionen $f(x)= c*a^x$ und

$g(x)=c*(\frac{1}{a})^x$ liegen symmetrisch zur zweiten Achse.

GV 5: Die Konstante c ist der Funktionswert an der Stelle 0. f(0) = c.

GV 6: Die Basis a ist gleich dem Verhältnis der Funktionswerte bei Vermehrung des Arguments um 1.

GV 7: Bei Vermehrung des Arguments um h ändern sich die Funktionswerte stets mit demselben Faktor a^h.

(GV 8: Gleiche Zunahme der Argumente um h bewirkt stets gleiche relative Änderung der Funtkionswerte um a^h-1. – Diese GV schien mir für eine BHS zu abstrakt)

Grundfähigkeiten:

- Die Schüler sollen die imstande sein, den Graphen einer Exponentialfunktion zu zeichnen (aus verschiedenartigen Angaben)
- Die Schüler sollen imstande sein, aus dem Graphen einer Exponentialfunktion c und a herauszulesen.
- Die Schüler sollen Anwendungen von Exponentialfuktionen nennen können und dabei jeweils die Bedeutung von c und a angeben können.
- Die Schüler sollen die GV 1-8 in Anwendungssituationen einsetzen können.
- Die Schüler sollen Probleme erläutern können, die sich beim Anwenden von Exponentialfunktionen ergeben können .[Reflexion der Modellbildung]

Um mich über das **Vorwissen** zu informieren, sammelte ich Schulübungshefte vom Vorjahr ab. Die Schüler hatten wohl gelernt, Gleichungssysteme zu lösen, sie konnten auch Prozentrechnen, hatten dann aber bei den Anwendungsaufgaben trotzdem Probleme bei derartigen Fragestellungen. Die Potenzrechenregeln kannten sie oberflächlich und der Funktionenbegriff war auch für sie (wie für die meisten Schüler) ein großes Problem, vor allem, sobald es um Ausdrücke wie f(8) = 2 und ähnliches ging. Das Lösen von Exponentialgleichungen und Logarithmieren habe ich vor dem Unterrichtsvesuch durchgenommen.

EINIGE DETAILS:

Dieser Unterrichtsversuch hatte das beste Ergebnis bei der Evaluation. Alle Anwendungsaufgaben konnten von den meisten Schülern richtig beantwortet werden.

Allerdings konnte kein einziger Schüler den Graphen einer Exponentialfunktion zeichnen.

Und das hat mich mehr als überrascht. Zumal ich mit der Klasse unzählige Graphen mit Derive gezeichnet habe.

Der Verdacht liegt nahe, dass es genau daran gelegen hat. Die Schüler waren möglicherweise zu sehr von den technischen Besonderheiten abgelenkt. Diese Stunden waren auch immer sehr anstrengend. Ständig funktionierte etwas nicht – die Schüler hatten im Jahr zuvor den Laptop kaum eingesetzt.

So war es zum Beispiel fast nicht möglich, den Schülern beizubringen, wie man jenen Bildausschnitt „zoomt“, der das charakteristische Bild des Graphen zeigt.

Andererseits gab es auch Situationen im Unterricht, die zumindest zeigten, dass einige Schüler Graphen interpretieren können:

Ü1.22): Wismut 210 zerfällt nach dem Zerfallsgesetz $N(t) = N_0*0,87^t$. Die Schüler zeichneten mit Derive den Graphen und beantworteten meine Frage: „Wann wird denn die Menge verschwindend klein?“ mit „Nach ungefähr 40 Jahren“ so richtig, wie es anhand des Graphen möglich ist.

Weiteres Beispiel für den Einsatz von Derive:

Ü): Zum Abschluss einer Stunde ließ ich noch $f(x) = 10x$ und $f(x) = 1,1^x$ zeichnen und fragte, welche schneller wachsen würde. *(Exponentielle Katastrophen*) Spontan kam die Anwort : 10x. Doch sofort war die Korrektur eines anderen Schülers da: „Nein, die andere. Sie kommt aber erst später.“ (*Verständnis für Dimensionen*)

Dieser Schüler zeigt generell schwache Leistungen, fehlte auch bei der Schularbeit, ist aber, wenn´s um Graphen am Laptop geht, immer hoch motiviert und war mir auch schon eine große Hilfe, als das Programm bei einem Schüler hing und ich nicht weiter wusste.

Als HÜ gab ich den Vergleich von $f(x) = x^3$ und $f(x) =1,1^x$.

- Dass kaum richtige Antworten zu den Unterschieden zwischen exponentiellem und linearen Wachstum gegeben wurden, liegt möglicherweise daran, dass ich dieses Thema am Ende des Kapitels unterrichtet habe: niemanden hat´s mehr so richtig gefreut. Ich habe dieses Kapitel als Übergang zur Zinsenrechnung benutzt und die Unterschiede vor allem anhand der Unterschiede zwischen einfacher und theoretischer Verzinsung erläutert.

- Auch beim Zeigen, dass die Halbwertszeit unabh. von der Ausgangsmenge ist, hatten die Schüler große Probleme.

Auch das habe ich im Unterricht zu wenig behandelt.

Am Ende des Versuchs wurden im Rahmen der Evaluation **Schülerinterviews** durchgeführt.

Hier einige Zitate:

I: Glaubst du, dass du die Exponentialfunktionen noch irgendwann für irgendwas brauchen wirst, oder ist das eher Schulstoff, der wenn das Kapitel abgehakt ist, uhm, mal beiseite gelegt werden kann, außer du machst was ganz spezielles später.

S: Das könnte man vielleicht schon brauchen, z.B. wenn man e-mails verschickt, und man will, dass es möglichst an viele Leute verschickt wird, könnte man sich ausrechnen, an wie viele Leute es nach wie vielen Tagen geschickt worden ist. Aber wird auch nicht im Praktischen möglich sein, irgendwie.

I: Aber glaubst du, dass Du es noch irgendwann brauchst?

S: Nein, ich glaube eher nicht. Aber es ist interessant zu wissen.

I: Was hat dich daran interessiert?

S: Na ja, wie man sich das/ dass man sich das überhaupt ausrechnen kann, wann das wo ankommt und wie viel sich das ausbreitet und so.

I: Mhm. Du hast die Beispiele ganz interessant gefunden.

S: Ja,

I: Wie ist es dir beim Unterricht usw. gegangen. Wie ist es dir beim Lernen bei den Exponentialfunktionen gegangen, war das schwer?

S: Ich hab die eigentlich gar nicht so richtig gelernt, ich habe im Unterricht mitgemacht und ich hab es im Unterricht kapiert. Weil es kommt eben auch auf das Verstehen an. z.B. mein Sitznachbar, der hat das auswendig lernen müssen, damit er es versteht. Und ich habe es auch so verstanden.

I: War es für euch dann zu schnell?

S: Nein, es war nicht zu schnell, aber es muss auf mehrere Arten erklärt werden, glaube ich. Weil so wie es die Frau Professor erklärt, versteht es vielleicht ein Teil. Und dieser Teil erklärt es dann den anderen anders, und dann gibt es noch immer einen Teil der das nicht versteht. Und denen wird das noch einmal anders erklärt.

I: Macht ihr das immer so in Mathe?

S: Ja, wie soll man denn sonst lernen?

I: Na ich weiß nicht, dass ihr euch da gegenseitig so helft? Das ist ja doch nicht so Gang und gebe.

S: Ja schon. Bei uns in der Klasse ist das so, dass wir schaun, dass wir uns gegenseitig helfen, oder wenn wir uns nicht auskennen, fragen wir irgendwen, der erklärt es uns.

Ein anderer Schüler:

I: Wozu braucht man Exponentialfunktionen eigentlich? Braucht man sie überhaupt?

S: Na ja. xxxxxxx

S: Na ja, manche sagen, schon wichtig, weil z.Bsp. man kann das Alter vom Ötzi errechnen. Weil da kann man so irgendein Knochen, so einen Knochen wegnehmen, und dann kann man das errechnen.

I: Ah so! Genau Radio-Carbonmethode

S: Okay. Und ja. Also Wachstum oder also genau Werte kann man sich nicht ausrechnen, aber ungefähre Werte, wie z.Bsp. die Einwohnerzahl in zwei Jahren sein wird oder so

I: Warum kann man sich nicht genaue Werte ausrechnen.

S: z.B. Bei der Einwohnerzahl, weil es immer entweder mehr oder weniger Geburten geben wird und man es nie genau sagen kann

I: Glaubst du, brauchst du die Exponentialfunktionen noch nach deiner Schulzeit? Oder

S: Kommt darauf an, was ich nachher mache.

I: Nur wenn du was ganz Spezielles machst, und was wär das dann?

S: Also, wenn ich studieren würde, Mathe zum Beispiel, dann würde ich es sicher brauchen. Und so, kann sein, dass ich es brauche, ich glaub, eher nicht. [Pause] Ist halt, damit wir was zum Lernen haben. [lacht]

Noch ein dritter Schüler:

I: Wenn die Frau Professor im nächsten Jahr dieses Kapitel mit einer anderen Klasse durchnehmen sollte, was wären so drei Dinge, die du ihr raten würdest, das hat dir gut gefallen, das würdest du ihr raten, auch mit anderen Schülern wieder so zu machen, dann drei Dinge, wo du sagst, das war für dich eher verwirrend, das könnte man anders machen, oder das hätte dir geholfen, wenn noch das oder das gemacht worden wäre.

S: Was sie gut gemacht hat, sie hat wirklich gut erklärt, und auch geübt gemacht, was sie lange nicht erklärt hat, was sie vielleicht machen hätte sollen, ist Maßstäbe einstellen, bei dem Programm, das habe ich nicht wirklich durchschaut, wie ich das machen soll, weil es gibt Graphen, da musst du 5000 auf der einen Seite, und 1 und 2 auf der anderen Seite, und das habe ich nicht wirklich gekriegt warum.

I: Mhm. Sonst irgendwas?

S: Ich bin zufrieden mit Mathematik.

Interessant ist, dass die offensichtliche Anwendung in der Finanzmathematik nicht wahrgenommen wurde.

2.2.3.3 Differenzen- und Differentialquotient – 4. Jahrgang

Grundvorstellungen zum Differenzenquotienten:

GV 1: Der Differenzenquotient ist gleich dem Verhältnis der Änderung der Funktionswerte zur Änderung der Argumente [Differenzenquotient als Verhältnis und mittlere Änderungsrate].

GV 2: Der Differenzenquotient ist gleich der mittleren Änderung der Funktionswerte pro Argumenteinheit. [mittlere Änderungsrate].

GV 3: Der Differenzenquotient ist gleich dem Faktor, mit dem die Änderung der Argumente multipliziert werden muss, um die Änderung der Funkti onswerte zu erhalten.

GV 4: Ist der Differenzenquotient von f in [a,b]
- positiv, so steigt f insgesamt, (f muss aber nicht monoton steigend in [a,b] sein),
- gleich Null, so ist f insgesamt weder steigend, noch fallend (f muss aber nicht konstant in [a,b] sein),.
- negativ, so fällt f insgesamt, (f muss aber nicht monoton fallend in [a,b] sein).

GV 5: Der Differenzenquotient einer linearen Funktion ist in jedem Intervall gleich der Steigerung der linearen Funktion

GV 6: Der Differenzenquotient von f in [a,b] ist gleich der Steigung der zugehörigen Sekantenfunktion s. (Die Funktion muss aber nicht in der Nähe der Sekantenfunktion verlaufen)

Grundfähigkeiten zum Differenzenquotienten:

- Die Schüler sollen den Differenzenquotienten einer vorgegebenen Funktion in einem vorgegebenen Intervall angeben können.
- Die Schüler sollen den Differenzenquotienten in möglichst vielen Anwendungssituationen deuten können.
- (Die Schüler sollen die Leibniz´sche Schreibweise für den Differen
- zenquotienten kennen und anwenden können.) – aus Zeitgründen habe ich diese nur erwähnt.
- Die Schüler sollen insbesondere die mittlere Geschwindigkeit als mittlere Änderungsrate einer Zeit – Ort – Funktion interpretieren können.

Grundvorstellungen zum Differentialquotienten:

GV 1: Der Differentialquotient (die Änderungsrate) ist der Grenzwert des Differenzenquotienten (der mittleren Änderungsrate).
GV 2: Der Differentialquotient f´(x) ist näherungsweise gleich dem Differenzenquotienten von f in einem sehr kleinen Intervall um x.

Das bedeutet
- f´(x) ist ungefähr gleich dem Verhältnis der Änderung der
- Funktionswerte zur Änderung der Argumente in der Nähe von x.
- f´(x) ist ungefähr gleich der mittleren Änderung von f pro Argumenteinheit in der Nähe von x.
- f´(x) ist ungefähr gleich dem Faktor, mit dem die Änderung der Argumente multipliziert werden muss, um die Änderung der Funktionswerte zu erhalten, sofern man in der Nähe von x bleibt.
  GV 3: Der Differentialquotient f´(x) ist gleich der Steigung von f an der Stelle x bzw. gleich der Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt (x/f(x)).

Grundfähigkeiten zum Differentialquotienten:

- Die Schüler sollen für einfache Funktionen den Differentialquotienten f´(x) als Grenzwert des Differenzenquotienten ermitteln können.
- Die Schüler sollen den Differentialquotienten in möglichst vielen Anwendungssituationen deuten können.
- Die Schüler sollen insbesondere wissen, dass die Begriffe „Mittlere Geschwindigkeit in einem Zeitintervall“ und „Geschwindigkeit in einem Zeitpunkt“ zwei verschiedene Begriffe sind und sollen erläutern können, wie diese beiden Begriffe miteinander zusammenhängen.
- (Die Schüler sollen die Leibniz´sche Schreibweise für den Differential quotienten kennen und anwenden können.) – aus Zeitgründen habe ich diese nur erwähnt.
- Die Schüler sollen insbesondere die mittlere Geschwindigkeit als mittlere Änderungsrate einer Zeit – Ort – Funktion interpretieren können.
- Die Schüler sollen in der Lage sein, verschiedene Begriffe als Ände rungsraten zu definieren.
- Die Schüler sollen in der Lage sein, Steigungen vorgegebener Funktionsgraphen als Änderungsraten in Anwendungssituationen zu interpretieren.

Vorwissen:
Die 4BK kannte ich seit der ersten Klasse (Wirtschaftliches Rechnen), die 4AK kam neu hinzu. Beiden Klassen war die Steigung der linearen Funktion bekannt, wie ich bei Bedarf erkennen konnte, natürlich auch die Begriffe des Quotienten und der Differenz. Der Funktionenbegriff war spätestens nach dem Kapitel „Grenzwert von Funktionen“ wieder aufgefrischt und somit war auch der Grenzwertbegriff bekannt, als ich mit dem Unterrichtsversuch begann.

EINIGE DETAILS:

Hier musste ich den Lehrgang drastisch kürzen, da, wie bereits erwähnt, die Zeit mit zwei Wochenstunden äußerst knapp ist.
Auf Anwendungen in naturwissenschaftlichen Bereichen sowie auf historische Zusammenhänge (Leibniz´sche Schreibweise) wurde wohl hingewiesen aber sie wurden nicht genauer behandelt.

Die Stoffeinteilung sah etwa so aus:

1. Stunde: Differenzenquotient als Änderungsrate
2. Stunde: Definition, Vorzeichen
3. Stunde: Differenzenquotient einer linearen Funktion
   Differenzenquotient als Steigung der Sekantenfunktion
4. Stunde: Test zu einem anderen Kapitel
5. Stunde: Deutungen des Differenzenquotienten
6. Stunde: Differentialquotient (Arbeitsblatt)
7. Stunde: Deutungen des Differentialquotienten
   Differentialquotient als Steigung
8. Stunde: Demonstration der mathe-online Animation
9. Stunde: Aufstellen von Tangentengleichungen
10. Stunde: Üben, andere Schreibweisen (Leibniz)

11. Stunde: Üben
12. Stunde: Schularbeit

Dazwischen gab es einen Tag der offenen Tür, einen Lehrausgang, schulautonem Tage usw.
Der Unterrichtsversuch dauerte also vom 21. Oktober bis 16. Dezember, was eine ziemlich lange Zeit ist.

Einige Unterrichtssequenzen:
4BK

2.Stunde GV 2, GV 4
Nach einer kurzen Wiederholung des Differenzenquotienten als Änsderungsrate schrieb ich die Definition des Differenzenquotienten an die Tafel und festigte dann diese durch die Übungen 1.04, 1.05 und 1.06. (1,2,3) Die Übung 1.08 (4) wurde in Gruppen erarbeitet und anschließend mit der Klasse diskutiert. Die Frage nach dem negativen Vorzeichen wurde sofort mit einem Rückgang der Scheidungen interpretiert.

3.Stunde GV 5

Mündliche Wiederholung gemeinsam mit der Klasse zum Vorzeichen des Differenzenquotienten. Ü 1.12. (5)

Dann gab es ein Plus für den Schüler, der zeigen konnte, dass der Differenzenquotient der linearen Funktion k ist. Es dauerte länger, als in der anderen Klasse, aber schließlich wagte es doch eine Schülerin, die dann das Plus auch bekam.

8.Stunde GV 1, GV 3

Demonstration des Differentialquotienten als Grenzwert des Differenzenquotienten sowie Sekante – Tangente als Animationen im Internet unter mathe-online.

4AK

5.Stunde GV 1

Wir wiederholten die Deutungen des Differenzenquotienten. Auch, dass das Ergebnis von dem jeweiligen Intervall abh. ist, das ich untersuche, außer bei der linearen Funktion.

Als Beispiel erwähnte ich eine Autofahrt von Wien nach Eisenstadt. Durchschnittsgeschwindigkeit? 80 km/h vielleicht. Aber bis zur Stadtgrenze? 50 km/h. Und von der Stadtgrenze Wiens bis Eisenstadt: 110 km/h. Und wenn jetzt das Intervall immer kleiner wird? Was zeigt der Tacho an? ...

Dann teilte ich das Blatt mit der Einführung des Differentialquotienten aus.

Da ich vor diesem Kapitel Grenzwerte von Funktionen im Rahmen der Stetigkeit mit der Formel

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

behandelt habe, habe ich auch den Differentialquotienten so eingeführt, da das Anwenden dieser Formel den Schülern vertraut ist.

Wie auf dem Blatt im Anhang ersichtlich, wird aber als Überleitung vom Differenzenquotienten auch die Formel

$$\lim_{z\to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

angeführt. Somit sind den Schülern bereits zwei Schreibweisen bekannt.

6.Stunde GV 3

Begriff der Tangente: Was ist eine Tangente ... an den Kreis ... an den Graph.... ein Punkt mit diesem gemeinsam.... ein Schnittpunkt? Nein, sondern...?

Sekante, Intervall kleiner werden lassen, mittlere Steigung, Steigung im Punkt. Na ja – ganz verstanden wurde es glaube ich, nicht.

Aber dann fiel mir ein: „ Einige von euch haben doch schon den Führerschein. Das ist eine Kurve, davor steht eine Geschwindigkeitsbeschränkungstafel, aber leider fahrt ihr zu schnell rein und was passiert? Der Wagen wird tangential hinausgetragen – ihr habt es nicht mehr geschafft, die Veränderung der Kurve mit dem Steuer nachzuvollziehen.“

Dabei zeichnete ich die Kurve + Tangente an die Tafel. Dann war die Stunde aus und ich um die Hoffnung reicher, die Schüler erreicht zu haben.

Evaluation:

Hier gab es bei der Auswertung Unterschiede zwischen den Klassen. Die Laptopklasse (4BK) schnitt schlechter ab als die Klasse, die mit dem grafikfähigen Taschenrechner arbeitet (4AK). Das Ergebnis steht in keinerlei Widerspruch zu meiner Erwartung. Denn obwohl die Laptopklasse nur 19 Schüler hat, die andere hingegen 35, stellt sich die größere Klasse immer wieder als leistungsstärker dar.

Der Test zum Differenzenquotienten ist in der 4AK sehr gut ausgefallen, in der 4BK mittelmäßig.

Der Test zum Differentialquotienten hingegen ist sehr schlecht ausgefallen.

2.2.4 Gründe, bestimmte Aufgaben nicht zu wählen

Vorwiegend habe ich weiterführende Aufgaben und Aufgaben mit physikalischen und chemischen Bezug ausgelassen.
In allen drei Jahrgängen waren die Gründe für das Streichen dieser Aufgaben dieselben:

<u>Zeitgründe</u>

- in den zweiten Klassen war es die Heterogenität der Schülerleistungen
- die dritte Klasse war für mich neu, wurde aus zwei Klassen zusammengelegt und wies auch eine große Bandbreite an Begabungen auf.
- Und in der vierten Klasse mangelt es ohnehin ständig an Zeit, da man nur zwei Wochenstunden zur Verfügung hat.

<u>Lehrplan</u>

- Obwohl auch die weiterführenden Aufgaben ihres allgemeinbildenden Wertes wegen ihre Existenzberechtigung in der HAK hätten, so ist es doch unrealistisch, Aufgaben, die die naturwissenschaftlichen Bezüge vertiefend darstellen, in einer Schule mit wirtschaftlichen Ausbildungschwerpunkt und reduzierter Präsenz von Chemie, Physik und Biologie zu unterrichten.

2.2.5 Methodische Gesichtspunkte nach denen speziell im Projekt unterrichtet wurde

Der Schüler soll lt. **Lehrplan** 1994 „Vorgänge in Natur, Technik und Wirtschaft mit Hilfe von geeigneten mathematischen Modellen beschreiben können.“ → D. h. die Kompetenz in alltäglichen Bereichen, Verständnis für Vorgänge in der Natur und Wirtschaft fördern – dies wird vor allem durch Anwendungsaufgaben gefördert.

Er soll „abstrahieren, formalisieren, begründen können; analytisches Denken entwickeln und Kritikfähigkeit erwerben“. → D.h. Wissen in verschiedenen Kontexten anwenden lernen.

Er soll“imstande sein, in seiner Rolle als Arbeitnehmer bzw. Unternehmer sowie als Konsument verantwortungsbewusst zu entscheiden und zu handeln.“ → Dies kann durch Lernen im sozialen Umfeld gefördert werden, aber auch durch den Einsatz neuer Medien (Lenen mit instruktionaler Unterstützung; Erfahrungsgeleitetes Lernen).

3 RESUMÉE UND AUSBLICK

Rückblick:

Die Durchführung aller drei Unterrichtsversuche hat für mich bedeutet, dass ich mich konstruktiv an der Diskussion „Wozu Mathematik?“ und ähnlicher Fragen beteiligt habe. Es war eine Belebung der Motivation, zu der nicht zuletzt auch die Seminare mit dem dort möglichen Erfahrungsaustausch beigetragen haben.

Die Durchführung selbst hob sich nicht allzu sehr von meinem „normalen“ Unterricht ab. Der Unterschied lag eher in der Betonung gewisser inhaltlicher Elemente und auf dem stärkeren Aspekt der Begründung und sprachlichen Formulierung.

So manche Unterrichtssequenz habe ich aber auch sehr mühsam erlebt. (Die Faktordeutung der Steigung k und des Differenzenquotienten z. B.)

Im zweiten Jahrgang und im dritten Jahrgang war ein wesentlicher Unterschied zu den anderen Jahren, dass ich ungleich mehr Zeit für die Kapitel Lineare Funktionen und Exponentialfunktionen gebraucht habe als sonst.

Im vierten Jahrgang übte dieser Umstand dann schon Druck aus. Verstärkt durch Stundenausfall (mehrmals hatte ich nur eine Wochenstunde), wurde ich dann doch nervös, wenn ich an die Matura dachte.

Gut gefallen haben die Aufgaben, die den Alltagsbezug zum Differenzenquotienten herstellten (z.B. Scheidungsrate).

Aufgaben in der dritten wie „Wann lebte Hammurabi“ u. ä. machten den Schülern Spaß. Da hätten sie gern mehr davon gerechnet.

Beobachtungen und Rückmeldungen:

Rückmeldungen gibt es nur von den Interviews aus der dritten Klasse, da ich die Schüler nicht befragt habe.

Da mich die interviewten Schüler erst seit diesem Schuljahr haben, meinten sie mit Recht, dass sie nicht sagen könnten, ob ich anders als sonst unterrichtet hätte.

Einer meinte, ich solle das nächste Mal die Halbwertszeit besser bzw. öfter erklären und eine Schülerin beklagte, dass ich die Maßstabeinstellungen bei Derive nicht ausreichend genau erklärt hatte.

In einer der vierten Klassen wollte ein Schüler nach ein paar Wochen Differenzen- und Differentialquotient wissen, ob wir eigentlich auch noch die Kurvendiskussion machen würden!

Die meines Erachtens aber wichtigste Beobachtung machte ich in den Wochen nach den Unterrichtsversuchen: Ich holte doch tatsächlich die ganze „verlorene“ Zeit wieder ein. Irgendwie ging in de Folgezeit der Stoff „leichter von der Hand“. Dieser Umstand fiel mir weniger im zweiten Jahrgang als vielmehr in der dritten und in den vierten Klassen auf.

Die Zinsenrechnung ging so rasch wie nie und es gab keine von den sonst üblichen Widerständen bei der Kurvendiskussion.

Über die Ursachen kann nur spekuliert werden: Waren sie froh, nicht mehr soviel denken und begründen zu müssen, weil jetzt endlich wieder drauflos gerechnet werden konnte? Oder hatten sie doch Grundvorstellungen entwickelt, die ihnen geholfen haben, besser zu verstehen?

Ausblick:

Ich möchte dieses Konzept auf jeden Fall beibehalten und bin froh, dass ich mir mit den drei Themen eine solide Basis geschaffen habe.

Natürlich würde ich mit meinen Erfahrungen einiges anders machen:

<u>Bei den Linearen Funktionen</u>:

-)Vielleicht findet sich im nächsten Jahr doch die Möglichkeit, die Rekursivdarstellung durchzunehmen.

-) Die Faktordeutung der Steigung k würde ich etwas vernachlässigen.

-) Ich würde mehr Wert auf die exakte sprachliche Formulierung legen

<u>Bei den Exponentialfunktionen</u>:

-) Auf alle Fälle müssten die Schüler das nächste Mal Graphen händisch zeichnen, bevor es ans Derive geht.

-) Die Halbewertszeit würde ich (öfter?) allgemein behandeln (Zeige, dass Hwz. unabh. von N_0 usw.)

<u>Bei den Differenzen- und Differentialquotienten</u>:

-) Mit den Deutungen des Differentialquotienten werde ich es nicht mehr so genau nehmen (Nachdem die des Differenzenquotienten ausführlicih behandelt wurden).

Ansonsten bin ich, was den Differentialquotienten betrifft, noch unsicher und unschlüssig. Das Ergebnis des Tests war schlecht. Vielleicht war mein Zugang zu empirisch? (siehe zitierte Unterrichtssequenzen). Oder lag es an der Testsituation? Ich habe den Test (zu meinem Erschrecken waren es ja zwei Tests – das bedeutete wieder zwei Unterrichtsstunden!) in einer Supplierstunde gemacht und hatte keine Lust mehr. Es hatte ohnehin schon viel zu lange gedauert. Vielleicht lag es an der massiven Kürzung des Lehrgangs.

Vielleicht ist der Lehrgang für die HAK nicht geeignet?

Darüber gilt es noch nachzudenken.

Für die Zukunft erwarte ich mir, dass es leichter wird.

Einerseits werde ich mehr Erfahrung haben.

Und andererseits wird es für Klassen, die schon in der zweiten nach diesem Konzept unterrichtet wurden, auch verständlicher sein. Die Deutungen des Differenzenquotienten sind für Schüler, die schon die Deutungen von k gelernt haben und die in diesem Zusammenhang auch schon mit dem Differenzenquotienten kurz Bekanntschaft gemacht haben, von vornherein vertrauter.