DIE DYNAMIK EINER VERÄNDERUNG IM MATHEMATIKUNTERRICHT

OSTR. Prof. Mag. Walter Blocher

HAK Feldkirch

Rankweil, 2003

INHALTSVERZEICHNIS

ABSTRACT

Die neue Situation am Beginn des Schuljahres 2002/03 – stundenreduzierter Mathematikunterricht in einem meiner beiden III. Jahrgänge wegen Führung als schulautonome Sonderklasse – verlangte von mir die Umsetzung meines Grundkonzepts für den Mathematikunterricht an der HAK unter neuen Bedingungen. Im Laufe des Schuljahres stellte sich heraus, dass die Anzahl der zur Verfügung stehenden Stunden nicht das allein Ausschlaggebende ist. Mindestens ebenso wichtig ist es, unterschiedliche mathematische Lösungsangebote wegen der differierenden Lernvorlieben der Schüler/-innen zu machen und die eigenen Intentionen als Lehrer damit klar und deutlich zum Ausdruck zu bringen.

1 EINLEITUNG

Im Schuljahr 2002/03 fand ich an der HAK Feldkirch eine ganz neue Schulsituation im Unterrichtsfach Mathematik (genau: MAM = Mathematik und Angewandte Mathematik) vor.

Der Jahrgang IIId, den ich unterrichten sollte, wurde als schulautonome, kaufmännische Sonderklasse „Internationale Wirtschaft“ geführt. Das bedeutete, dass im Fach Mathematik die Stundenanzahl von drei auf zwei Wochenstunden reduziert wurde. Zugleich waren vom Landesschulinspektor die Verwendung des PCs im Mathematikunterricht einmal wöchentlich zugesagt und die Werteinheiten für die Gruppenteilung gesichert worden. Die Forderung nach dem PC im Mathematikunterricht besteht seit der Lehrplanreform 1996. Unterlagen für Lehrkräfte und Schüler/-innen waren allerdings noch nicht vorhanden.

Für meinen Mathematikunterricht ergaben sich somit zwei Neuerungen: Es galt, im III. Jahrgang in einer der beiden Klassen stoffmäßig der Stundenkürzung Rechnung zu tragen und zudem überall den Rechner sinnvoll einzusetzen. Neue Konzepte für den Unterricht waren also gefragt. In der Situation schloss ich mich IMST^2 mit der Hoffnung auf Information und Unterstützung an. Ich darf gleich am Anfang erwähnen, dass meine Erwartungen über das Maß erfüllt wurden, und die hervorragende Betreuung durch Frau Dr. Helga Jungwirth in den Seminaren, durch einen persönlichen Schulbesuch und durch schriftliche Kommunikation meinem Mathematikunterricht einen neuen Stil aufgeprägt hat. Für alle Bemühungen sage ich an dieser Stelle „danke“; insbesondere auch für die Mitgestaltung des vorliegenden Textes.

2 HINTERGRUND

Der Lehrplan des Fachs MAM verlangt zu jedem größerem mathematischen Kapitel die Querverbindung zu Beispielen der Wirtschaft. Kosten- und Preistheorie oder Finanzmathematik u.a. sind spezielle Inhalte des HAK-

Unterrichts, auf die auch der Mathematikunterricht Bezug nehmen soll. Ich handhabe den Vernetzungsgedanken so: Ich möchte in meinem Unterricht zuerst die mathematischen Grundlagen möglichst tiefgehend und umfassend erarbeiten, üben und dann an den Beispielen der Wirtschaft anwenden. Das Verständnis der Mathematisierungen versuche ich durch vollständig vorgerechnete Beispiele und durch eigenständige, aber von mir begleitete Problembearbeitungen zu fördern. Dieser Aufbau lässt erkennen, dass die mathematische Systematik in meinem Unterricht eine große Rolle spielt; was nicht heißt, dass ich den Anwendungsaspekt – insbesondere den geforderten schultypenspezifischen – geringschätzen würde.

In dem Jahr stand ich nun vor der Aufgabe, mein Grundkonzept auch mit nur zwei Drittel der Normalstundenzahl umsetzen zu müssen. Inhaltliche Schwerpunktsetzungen waren unumgänglich: Lineare Funktionen, quadratische Funktionen, Exponential- und Logarithmusfunktion, Reihen, Winkelfunktionen und Anwendung im rechtwinkeligen Dreieck erschienen mir als unverzichtbare Kernthemen. Auch in der Parallelklasse IIIa mit dem normalen Stundenrahmen nahm ich mein Minimalkonzept als Grundlage des Unterrichts. Die zusätzliche Zeit wollte ich für didaktisch-methodische Erprobungen nutzen und außerdem für punktuelle Vertiefungen sowie für weitere, eigentlich ohnedies vorgesehene Inhalte. Mit dieser Entscheidung war auch die Möglichkeit einer Art von „Testlauf“ eröffnet: Was sich in der IIIa-Klasse als besonders günstig für das Lernen erwiesen hatte, konnte ich – zeitliche Passung allerdings vorausgesetzt - in der gekürzten IIId noch einmal versuchen und umgekehrt war ich bzgl. Schwierigkeiten schon vorgewarnt. Tatsächlich ließ sich diese Überlegung aber gerade deswegen – die zeitliche Parallelität konnte ich aus verschiedenen Gründen (Stundenverschiebungen und –ausfälle wegen Projekten in anderen Gegenständen etc.) nicht aufrechterhalten – nicht wie gedacht realisieren.

Vorausschicken muss ich auch, dass ich in meinem Unterricht den TR Texas TI83 verwende; alle Schüler/-innen erwerben ihn am Beginn des II. Jahrganges. In einem Jahr Praxis eigenen sie sich gewisse Fertigkeiten wie das Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen sowie die Darstellung und Auswertung von linearen Funktionen an. Eine entsprechende Routine konnte ich also auch in den beiden dritten Klassen im Schuljahr 2002/03 voraussetzen. Erfahrungen mit dem PC im Mathematikunterricht hingegen fehlten den Schüler/-innen am Beginn des Jahres und Materialien bzw. Handreichungen, auf die ich hätte zurückgreifen können, gab es wie gesagt auch keine. Angesichts der Stundenkürzung entschied ich, mich bei den ersten Stoffkapiteln auf die vielseitige Nutzung dieses wissenschaftlichen TRs zu konzentrieren und Möglichkeiten des PCs nur eher am Rande zu erwähnen.

In der folgenden Darstellung beschränke ich mich auf die Behandlung der quadratischen Funktion bzw. Gleichung im Unterricht und deren wirtschaftliche Anwendung.

3 DER UNTERRICHT ZU DEN QUADRATISCHEN FUNKTIONEN

Ausgangspunkt: Quadratische Gleichung $x^2 - 2x - 15 = 0$

In der stundenreduzierten IIId erfolgte das Gleichungslösen nur über die erste und die folgende zweite Lösungsart. Ich habe die beiden gewählt, weil damit allgemeine quadratische Gleichungen gelöst werden können und der TR optimal eingesetzt wird.

Lösungsart 1: Formel

$$AX^2 + BX + C = 0$$

$$X\ (1 \text{ und } 2) = (-B +/- \text{Wurzel}(B^2 - 4AC)) / (2A)$$

Die allgemeine Formel wurde von mir hergeleitet mit dem Ziel, den Schüler/-innen ihre Struktur verständlich und einprägbar zu machen. Die numerische Lösung sollte vom TR übernommen werden.

Durch eine bewusste Wahl von „unschönen“ Zahlen A, B, C wollte ich dann die Schüler/-innen dazu hinführen, die Möglichkeiten eines wissenschaftlichen TR zu nutzen. In diesem Fall sollten sie statt der direkten Zahleneingabe die TR-Speicher A, B, C benutzen und durch Zurückschalten auf die vorangegangene Rechnung die Lösung mit dem neuen Speicherinhalt herstellen.

Lösungsart 2: Taschenrechner – Gleichungsprogramm

Zusammen mit den Schüler/-innen erarbeitete ich im für sie ersten Eigenprogramm für den TR die Lösung der Gleichung $ax^2 + bx + c$ und ihre Fallunterscheidungen: Diskriminante $D > 0$, $D = 0$, $D < 0$. Der mathematische Nutzen dieses Programms sollte der Einblick in die Fallunterscheidungen sein. Diesen zu bieten ist insofern wichtig, als die Wirtschaftsmathematik ja nur die „Nichtnegativitätsbedingung“ und die „Nulllösung“ kennt.

Tatsächlich zeigten mir die eigenständigen Formulierungen der Schüler/-innen beim Wiederholen und Üben (in der IIId allerdings mehr als in der IIIa), dass ein Bewusstsein für die drei Fälle und ihre Auswirkungen entstand. Die Bedienung des Programms war komfortabel und arbeitssparend, weshalb es die Schüler/-innen gerne benutzten.

Abbildung des entsprechenden Displays:

Ax² + Bx + C A=?	2 Lösungen X1(F)= ......

B=? C=?	X2(G)= .....

1 Lösung X1(F)=	KEINE LÖSUNG WEIL D < 0

Anmerkungen zum Programm bzw. zum Programmieren:

Das Besondere an meiner Programmidee ist die Angabe der Anzahl der Lösungen der eingegeben Gleichung und der anschließenden gespeicherten Lösungsangabe.

F und G sind die Speicher zur Weiterverwendung der Lösung; KEINE LÖSUNG erforderte vom Programm das Weglassen der TR-Fehlermeldung „Error“, weil die zugehörige Wurzel negativ ist.

Für Eingabe und Ausdruck durften die Schüler/-innen auf eine Liste mit den entsprechenden Befehlen zurückgreifen.

Lösungsart 3: Quadratische Ergänzung

$x^2 - 2x = 15$

$a^2 - 2ab + b^2$

$x^2 - 2x + 1 = 15 + 1$

$(x - 1)^2 = 16$

x – 1 = + / - Wurzel(16)

$\boxed{\text{1. Lösung = 5}}$ $\boxed{\text{2.Lösung = -3}}$

In der IIIa-Klasse wählte ich diesen Weg als Einstieg ins Lösen quadratischer Gleichungen, weil den Schüler/-innen die quadratische Form $a^2 + 2ab + b^2$ von der Hauptschule her bekannt ist. Da der MAM – Unterricht in der HAK erst im II. Jahrgang beginnt, bemühe ich mich um Anknüpfungen an den Hauptschulstoff – nach dem Motto: Die Schüler/-innen dort abholen, wo sie stehen! Es ist also eine „schüler/-innen/freundliche“ Lösungsart, die ich der stundenreduzierten Klasse aus den genannten Gründen aber trotzdem vorenthielt.

Lösungsart 4: Satz von Vieta

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$x^2 - 5x + 3x - 15 = 0$$

$$x (x - 5) + 3 (x - 5) = 0$$

$$(x - 5) (x + 3) = 0$$

1. Lösung: $x - 5 = 0$ $\quad x = 5$
2. Lösung: $x + 3 = 0$ $\quad x = - 3$

Diese Lösungsart hat die gleiche Voraussetzung wie die Lösungsart 3, nämlich eine normierte, ganzzahlige Gleichung. Die Variante besteht darin, das gemischte Glied so zu zerlegen, dass ein zweifaches Herausheben möglich wird.

Ein mathematischer Nutzen ergibt sich für die Schüler/-innen bei der im IV. Jahrgang vorgesehenen Einführung des Hauptsatzes der Algebra bei der Lösung der Nullstellen von Polynomen und bei der Partialbruchzerlegung bei der Integralrechnung. Es handelt sich um eine zukunftsorientierte Lösung, die aus der längerfristigen mathematischen Perspektive eigentlich nicht fehlen sollte, in der IIId aber doch der Ausrichtung auf die unmittelbare Verwertbarkeit zum Opfer fiel.

Ich ließ die Schüler/-innen probieren und die mathematischen Zusammenhänge selbst erarbeiten, die durch $-15 = (-5) * 3$ und $-5 + 3 = -2$ vorgegeben sind. Um den „Rätselgeist“ zu fördern, gab ich ihnen eine bestimmte Zeit vor; ihre Lösung konnten sie dann der Reihe nach für die Mitschüler/-innen nicht einsichtig mir nur schriftlich übergeben.

Daran schlossen sich dann in der IIIa die Lösungsvarianten „Formel“ und „TR-Gleichungsprogramm“. Manche Schüler/-innen wirkten bei der Behandlung eher lustlos, und ich vernahm vereinzelt auch das bekannte „wozu brauch ma denn des?“.

Lösungsart 5: Berührbedingung

$ax^2 + bx + c$ (Parabel) $=$ $kx + d$ (Gerade) nur 1 Lösung für diese Gleichung

Die Lösung erfolgte in Form der Durchrechnung bis zur quadratischen Gleichung und dann dem TR-Eigenprogramm. Das gestaltete sich schwierig, wenn wegen $B^2 - 4AC = 0$ durch Rundungsfehler die Null nicht ganz genau erreicht wurde.

Ich bemerkte, dass einige Schüler/-innen mit dieser Lösungsvariante große Schwierigkeiten hatten – „nichts mehr verstanden“, wie sie sagten bzw. dem Unterricht gar nicht mehr folgten. Sicherlich ist dieser Lösungsweg mathematisch anspruchsvoller, weil er die geometrische Interpretation der Funktionsgleichungen mit ins Spiel bringt;

dennoch war ich überrascht, da wir ihn sehr ausführlich im Klassengespräch behandelten.

Die schwächeren Schüler/-innen wurden von einigen sehr guten mit einem Lösungsprogramm für die Berührbedingung, das sie zu Hause selbst entwickelt hatten, unterstützt. Das Programm wurde ohne mein Wissen zwischen den TR übermittelt. Die Sache flog auf, als öfter die gleiche falsche Lösung auftrat, weil Schüler/-innen dieses Programm unpassend einsetzten. Der Unterstützungsversuch war zwar gut gemeint, doch ohne die dazu nötigen Erklärungen nützt bereitgestellte Software im Mathematikunterricht eben nichts. Das war eine wichtige Erfahrung für die Schüler/-innen, doch einige meinten auch, dass diese Methode fürs „Durchkommen" ja reiche. Ich versuchte ihnen die Problematik dieser Haltung klarzumachen, indem ich ihnen sagte, dass sie sich auf einen sehr unsicheren Weg begeben und sich zu Tastendrückern degradieren würden.

So recht verstehen konnte ich nicht, was ich da erlebte: Die Klasse hatte mehr Mathematikstunden und dieses Plus erlaubte mir ein gestuftes, vielleicht sogar redundantes und mehr noch auf mathematische Einsicht orientiertes Vorgehen als in der gekürzten IIId. Trotzdem hatte sie verständnis- und in der Folge auch motivationsmäßig mehr Probleme.

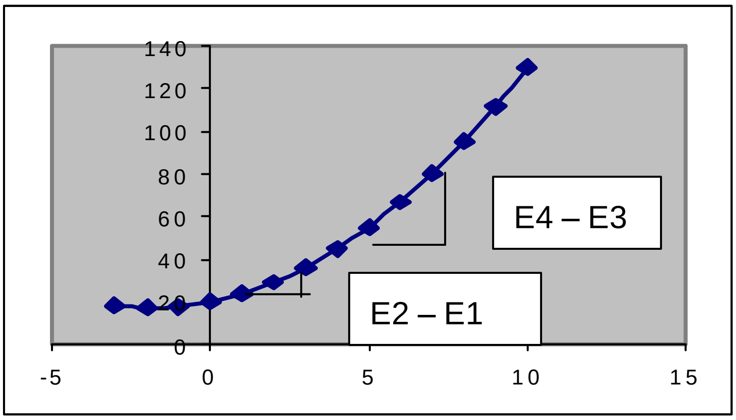
Jedenfalls beschloss ich, das Thema Berührbedingung im Anwendungskapitel, den Kostenfunktionen, noch einmal aufzugreifen.

4 (UN)PLANMÄSSIGE ERKENNTNISSE

Wie es der Zufall wollte, bereitete sich in der Zeit die IIIa-Klasse mit ihrem Deutschlehrer auf einen Redewettbewerb zum Thema „Energie"[1] vor und ließ dabei mehrere „Expert/-inn/en" zu Wort kommen. Der „Mathematiker" fragte mich, wie er publikumswirksam die mathematische Darstellung von Energie machen solle.

Die Formel für die kinetische Energie $mv^2/2$ und Wertetabellen mit hohen Zahlen konnten ihn nicht begeistern. Aber der Graph der Funktion $E(v) = mv^2/2$ auf eine große Tafel gezeichnet und entsprechend bezeichnet gefiel ihm gut (siehe Abb.).

[1] Sie hat für ihre Ensemble-Leistung beim Vlbg. Landesschüler-Redewettbewerb mit ihrem Beitrag „Energie" übrigens einen 1. Preis erreicht.



Meinen Vorstellungen von einem mathematischen Experten entsprach die Wahl des Schülers, das Thema Energie und Energieunterschiede nur mit einem Schaubild anzugehen, nicht. Ich als Mathematiker hätte neben dem Diagramm eine Energieberechnung als mathematische Demonstration erwartet. Doch ein ziemlich langes Gespräch mit dem Schüler machte mir nicht nur klar, dass das eben meine Sicht der Dinge ist, sondern auch, dass alle ihre individuellen Vorlieben haben und somit auch alle Schüler/-innen ihre Lösungsversionen im Unterricht brauchen. Eine Vielfalt ist bei mir zwar bei vielen Kapiteln vorhanden, aber aus Gründen des tieferen Einblicks in die Methematik. Unter lernpsychologischen Gesichtspunkten hatte ich die Behandlung von verschiedenen Lösungsmöglichkeiten bisher noch nicht gesehen!

Außerdem fand zu der Zeit der geplante Schulbesuch meiner Betreuerin, Frau Dr. Helga Jungwirth, statt. Wie vereinbart befragte sie meine dritten Jahrgänge zum Mathematikunterricht (was ihnen besonders entgegenkommt/was okay ist/was sie gerne verändert hätten). In der Ergebnisbesprechung, in der ich vor allem auf Unterschiede in den Einschätzungen zwischen den beiden Klassen eingestellt war, waren vor allem zwei Punkte auffällig.

Noch einmal erfuhr ich, dass sich Schüler/-innen in ihren Präferenzen für Zugänge, Lösungswege etc. sehr stark unterscheiden können: So war etwa der TR und die Verwendung der Eigenprogramme für die einen Hilfe und für die anderen Hürde oder der Rückgriff auf Formeln Erleichterung und eine Quelle von Frust („ich weiss zwar, dass ich da einsetzen muss, aber wieso??“). Ich musste also mehrere Lösungsvarianten anbieten – nach dem Motto: für alle etwas -, wenn ich meinen Schüler/-innen das Lernen erleichtern wollte. Der äußere Rahmen, die Anzahl der Stunden, ist weit weniger entscheidend.

Doch halt: Das hatte ich ja ohnedies getan, insbesondere in der IIIa, in der mein Zeitbudget größer war! Und gerade dort gab es Äußerungen in der Art, dass es zuerst „voll leicht“ sei und „vor der Schularbeit kennt man sich gar nicht mehr aus“. Sollte das vielleicht bedeuten, dass so manche Schüler/-innen nach der ersten oder zweiten Lösungsart „abschalten“, weil sie meinen, sie hätten damit schon genug gelernt? Möglichkeiten zum Abschalten boten sich in der IIIa natürlich mehr! Diese Interpretation bestätigte sich im Gespräch mit den Klassen. Ich stand also vor der Aufgabe, den Schüler/-innen mein Anliegen mit der Behandlung mehrerer Lösungsvarianten, nämlich das Verständnis von Mathematik zu fördern, weswegen sie auch alle Lerninhalt sind, noch besser vermitteln zu müssen.

Im Kontext der vorgegebenen organisatorischen Neuerung (dem Anlass für mein IMST²-Projekt) kam ich also zu einer neuen Sicht der Dinge und somit zu einer eigenständigen Neuerung im Unterricht, die ich anfangs gar nicht beabsichtigte, ja gar nicht beabsichtigen konnte. Ich nahm mir vor, zu Beginn jedes neuen Kapitels auf mein Anliegen hinzuweisen und im Verlauf bzw. am Ende eine Zusammenschau einzubauen, in der die (bisherigen) Lösungsvarianten einander gegenübergestellt werden. Allerdings sollten die Schüler/-innen – das war die Konsequenz aus den Erkenntnissen über die Unterschiede in den Vorlieben – bei manchen Übungs- oder Hausübungsaufgaben die Lösungsart frei wählen können.

5 DER UNTERRICHT ZU DEN KOSTENFUNKTIONEN

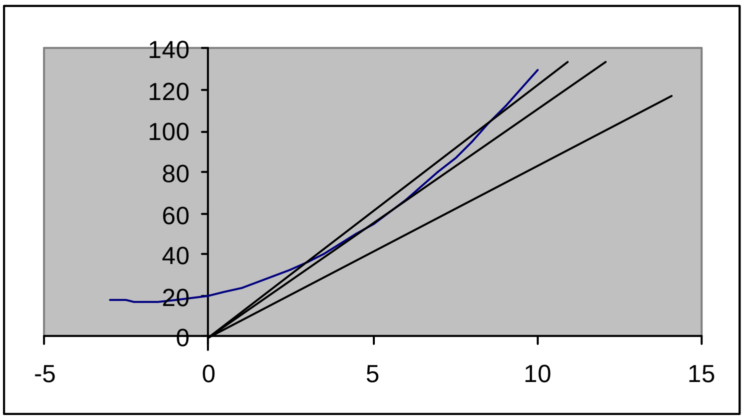
Ausgangspunkt: Kostenfunktion $K = 0{,}2x^2 + 2{,}1x + 150$

Es soll jener Verkaufspreis p gefunden werden, bei dem gerade kein Verlust entsteht.

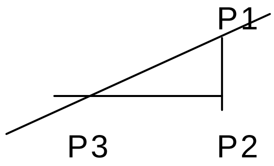
Lösungsart 1: Grafische Lösung mit dem TR-Display

Mit der line-Funktion wurde die Erlösgerade vom Ursprung hochgezogen:

zuerst als Sekante (2 Lösungen), dann als Passante (keine Lösung) und schließlich als Tangente (1 Lösung als Berührungspunkt).



Dann wurde die Tangentenlinie fixiert und über das Steigungsdreieck die Steigung gemessen.



P1 (66,06 / 832,25)

P2 (66,o6 / 541,93)

P3 (43,82 / 541,93)

k = (y1 – y2) / (x2 – x3) = 13, 05 $\boxed{p = k = 13{,}05 GE}$

Diese Lösungsart stellte ich in beiden Klassen wegen ihrer „Einsichtigkeit“ an den Beginn; in der IIIa aber auch wegen der damit gegebenen Vorbereitung auf die Lösung mit der Berührbedingung, die dort vorher ja Probleme bereitet hatte. Es handelte sich also um einen Lösungsweg, bei dem es besonders wichtig war, dass ihn alle verstanden.

Die Schüler/-innen arbeiteten sowohl mit dem TR als auch mit dem PC. Der grafische Teil der Aufgabe war am PC viel besser durchzuführen, weil der große Bildschirm und die Zeichnen-Symbolleiste die Balance zwischen den 3 Geraden sehr erleichterte (siehe Abb.). Die Festlegung auf Zahlen war wieder beim TR wesentlich angenehmer, weil für solche Datenerfassung das CALC-DRAW-Menü vorgesehen ist. Beim PC wurden die Daten durch Augenmaß vom Diagramm aus erfasst.

Ich bemerkte, dass viele Schüler/-innen sich mit großem Eifer am Unterrichtsgespräch beteiligten und selbständig recht gute numerische Resultate erzielten. Das Ergebnis p = 13,05 GE stimmt ganz genau und wurde mir von einer Schülerin stolz präsentiert.

Lösungsart 2: Extremwertaufgabe ohne (!) Differentialrechnung

Von allen Erlösgeraden, welche die Kostenparabel schneiden, hat die gesuchte Gerade die **kleinste Steigung** und ist Tangente an die Parabel.

Tangente: y = kx + d
d = 0 weil die Erlösgerade durch den Ursprung geht.
y = kx

Nebenbedingung: k = y/x = f(x)/x = $(0{,}2x^2 + 2{,}1x + 150)/x$

Zielfunktion: $Z = 0{,}2x + 2{,}1 + 150x^{-1}$

?? Eingabe der Funktion in den TR.

?? Grafische Darstellung mit entsprechendem WINDOW. (Die Erstellung eines passenden WINDOW fordert von den Schüler/-inne/n die Kenntnis der x-Werte aus der Angabe und die y-Werte aus Schätzungen)

?? Suchen des Tiefpunktes der Kurve: (27,44 / 348,38)

k = 12,7 $\boxed{k = p = 12{,}7 GE}$

?? Eine bessere Lösung war nur mit ZOOM möglich

$\boxed{p = 13{,}03 GE}$

Eine vollkommen mühelose Lösung brachte die Verwendung der TR-Funktion **f-Min**. Diese Funktion fordert als Eingabe die Zielfunktion, die Variable und den genauen Rechenbereich, welcher mit der Kapazitätsgrenze x = 200 ME gegeben war. Die Lösung mit **f-Min** lag dann bei x = 27,38. Durch Einsetzen in die Funktion f(x)/x ergab sich p = 13,05.

$\boxed{p = 13{,}05 GE}$

Diese Lösungsart nützt ausschließlich die Möglichkeiten des TI-83, kann aber sicher auch auf ähnliche Rechner umgearbeitet werden. Sie sollte die Schüler/-innen auch anregen, ihren Rechner optimal auszunutzen. Ich besprach diese Variante ebenfalls genau mit den Schüler/-inne/n, deklarierte sie dann aber als Option, die bei analogen Aufgaben gewählt werden konnte oder auch nicht.

In der stundenreduzierten IIId beschränkte ich mich auf diese beiden Lösungswege.

Aufgrund der gezielten Beobachtungen während des Unterrichtens verfestigte sich mein Eindruck, dass die Schüler/-innen in der Phase nun den (erweiterten) Sinn der Behandlung von Lösungsvarianten besser verstanden: zum einen das Aufzeigen der Vielfalt der mathematischen Prozeduren und ihrer Unterschiede und Verbindungen und zum anderen das Bereitstellen von „passenden“ Lernwegen für die unterschiedlichen Schüler/-innentypen. Insbesondere in der IIId verspürte ich die Motivation, sich mit den verschiedenen Möglichkeiten auseinanderzusetzen; dort waren es dann auch fast alle, die beide Lösungsarten verwendeten. Sie sagten mir auch, dass ihnen diese neuartigen Lösungen gefallen würden. Die IIIa nutzte mehr den Wahlgesichtspunkt: Der Extremwertansatz wurde freiwillig nur von rund einem Drittel verfolgt.

Lösungsart 3: Exakte Berechnung mit der Berührbedingung

Parabelgleichung: $y = 0{,}2x^2 + 2{,}1x + 150$

Geradengleichung: $y = kx$ (d = 0)

Gleichsetzen: $0{,}2x^2 + 2{,}1x + 150 - kx = 0$

Ordnen: $0{,}2x^2 + x(2{,}1 – k) + 150 = 0$

$B^2 - 4AC = 0$; $A = 0{,}2$; $B = 2{,}1 – k$; $C = 150$

Quadratische Gleichung: $k^2 - 4{,}2k + (4{,}41 – 120)$

TR – Quadgleich: $k_1 = 13{,}05$ $k_2 = -8{,}85$ (nicht brauchbare Lösung)

$\boxed{p = k = 13{,}05GE}$

Diese Lösung wiederholte den Berührbedingungsansatz vom letzten Kapitel. Ich unterrichtete sie nur in der IIIa. Vermutlich trug die Vorbereitung mit den Lösungsarten 1 und 2 nun zu einem besseren Verständnis bei; zumindest bezogen sich Schüler/-innen verschiedentlich darauf, wenn sie sich beim Üben gegenseitig etwas erklärten. Auf jeden Fall konnte ich bei Mitarbeitsüberprüfungen wesentlich bessere Leistungen feststellen.

Die folgenden Lösungsvarianten 4 und 5 konnte ich mit den Schülern des III. Jahrganges nicht rechnen, weil die Differentialrechnung erst im IV. Jahrgang unterrichtet wird. Ich möchte diese Varianten hier trotzdem vorstellen, um die mathematische Ergiebigkeit der gewählten Aufgabenstellung zu zeigen.

Lösungsart 4: Extremwertaufgabe mit Differentialrechnung

Hauptbedingung: $y/x = k$ Minimum

Nebenbedingung: $P(x / y)$ ist ein Punkt der Kostenkurve

$k = f(x)/x = 0{,}2x + 2{,}1 + 150x^{-1}$

$y' = 0$: $0{,}2 – 150x^{-2} = 0$

TR – Quadgleich: $x_1 = 27{,}386$ $x_2 = -27{,}386$ (unbrauchbare Lösung)

Einsetzen: $k = f(x)/x = 13{,}05$ $\boxed{k = p = 13{,}05GE}$

Lösungsart 5: Mit expliziter Verwendung von Begriffen aus dem BWL-Unterricht

Betriebsoptimum: Beim Betriebsoptimum sind die Produktionskosten pro Stück f(x)/x ein Minimum.

Gewinnschwelle: Bei der Gewinnschwelle ist der Gewinn G = 0, also gerade kein Verlust

Gewinn = Erlös – Kosten = px – K = 0

px = K p = K/x Minimum

$p = 0{,}2x + 2{,}1 + 150x^{-1}$

$p' = 0{,}2 - 150x^{-2} = 0$

TR – Quadgleich: $p_1 = 27{,}386$ $p_2 = -27{,}386$ (unbrauchbare Lösung)

Einsetzen: p = f(x)/x = 13,05 $\boxed{p = 13{,}05GE}$

Die Kapitel Wurzel- und Exponentialfunktion, Anwendung von log und ln, Folgen und Reihen (speziell geometrische Folge) waren Voraussetzung für Wachstums- und Abnahmefunktionen und die Zinseszinsaufgaben. Die Finanzmathematik hat einen hohen Stellenwert in der HAK. Der TR –TI83 bietet ein eigenes Menü „Finanzmathematik“ an. Ebenso nutzten wir in dem Zusammenhang intensiv den PC, der für Zinseszinsaufgaben eine große Palette von Microsoft Excel-Formeln anbietet. Die Fülle von Daten in einem vollständigem Schuldtilgungsplan verarbeitete ich nur im PC.

Die Beschreibung der entsprechenden Unterrichtsstunden würde den Rahmen meiner IMST^2-Studie sprengen, aber die Bemerkungen mögen vielleicht Kolleg/-inn/en anregen, Finanzmathematik mit TR oder PC zu unterrichten. Kurz eingehen möchte ich noch auf den Geometrieunterricht.

6 DER UNTERRICHT IN GEOMETRIE

Als letztes Kapitel im Schuljahr unterrichtete ich Geometrie. In der IIIa-Klasse mit dem normalen Stundenausmaß hatte ich folgende Stoffeinteilung:

?? Rechtwinkliges Dreieck mit den Winkelfunktionen sin, cos und tan, die Umkehrfunktionen vom TR $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$ und dem pythagoräischen Lehrsatz

?? Gleichschenkliges Dreieck als Muster für Symmetrieausnützung

?? Allgemeines Dreieck: Einteilung durch die 3 Höhen in verschiedene, verbundene rechtwinklige Dreiecke. Bewusster Verzicht auf den Sinussatz, um Lösungswege mit mehreren Unbekannten anzuregen. Den Cosinussatz habe ich für die Winkelberechnung bei 3 gegebenen Seiten eingeführt. Der Cosinussatz wurde von den Schülern nur selten verwendet, vermutlich wegen den unbeliebten algebraischen Umformungen.

?? Einige Vermessungsaufgaben aus dem Lehrbuch

In der IIId hatte ich nur noch Zeit für das rechtwinklige Dreieck. Für die einzige (!) Hausübung schrieb ich ein vollständig bezeichnetes rechtwinkliges Dreieck an und stellte folgende Aufgabe:

Gegeben: 2 Größen (frei wählbar)
Gesucht: alle anderen Größen

Diese Aufgabenstellung gibt die Möglichkeit für ca. **14 verschiedene Konkretisierungen.** Je nach Ansatz ist die weitere Berechnung als leicht, mittel oder schwer einzustufen.

Als Motivation versprach ich den Schüler/-inne/n, die schwierigste Aufgabe in meine IMST^2-Studie aufzunehmen. Die Vielfalt der durchgerechneten Aufgaben war bemerkenswert, und ich konnte mich nur schwer für eine Siegerlösung entscheiden. Letztlich siegte die folgende Aufgabe, die von drei Schülerinnen in gemeinsamer Arbeit, aber ohne jegliche weitere Hilfe überlegt und richtig gelöst worden war.

Gegeben: Fläche Q (statt A, wegen Doppelbezeichnung)
Seite BC (=b)

Gesucht: Winkel(ABC = Beta) und alle anderen Größen des rechtwinkligen Dreiecks, wie Höhe h_{AB} ,
Höhenabschnitte p und q

Lösung der Schülerinnen:

1. Gleichung: aus Q; $AB = 2Q/h_{AB}$
2. Gleichung: aus sin(ABC); $h_{AB} = BC * \sin(ABC)$
3. Gleichung: aus tan(BCA); $p = h_{AB} / \tan(BCA)$
4. Gleichung: aus Pythagoras; $q^2 = BC^2 - h_{AB}{}^2$
5. Gleichung: aus Winkelsumme; $(BCA) = 90 - (ABC)$
6. Gleichung: aus Zeichnung; $p + q = AB$

Zusammenfassung:

(BC * sin(ABC)/(tan(90 - (ABC)) + + Wurzel (BC² - (BC* sin(ABC))²) = = (2Q)/(BC* sin(ABC))

Diese Gleichung wurde in TR-SOLVE eingegeben und nach (ABC) aufgelöst.

Mein Kriterium für die Auswahl der Siegeraufgabe war der schwierige Ansatz (Fläche und Seite; also kein Winkel) und die Lösung mit 6 Unbekannten. Es hätten vielleicht weniger sein können, aber beachtlich war die konsequente Reihenfolge der Gleichungen. Die Lösung der sehr komplexen Wurzelgleichung wurde mit dem TR souverän gelöst.

Das Engagement – aller – Schüler/-innen bei dieser Aufgabenstellung und den gekonnten Umgang damit (niemand fragte nach einer eindeutigen Vorgabe) sehe ich auch als Frucht meines Bemühens um unterschiedliche Zugänge zu ein und demselben Problem und somit auch um von den Schüler/-inne/n selbst zu füllende Freiräume. Sie konnten sie auch in dem neuen Kontext produktiv nutzen.