# EXTREMWERTE – GANZ VERBOTEN

**Rainer SCHMID-ZARTNER**

**Bundesbildungsanstalt für Kindergartenpädagogik**

**Wien 10, Ettenreichgasse 45 c**

Wien, Juni 2003

# INHALTSVERZEICHNIS

# ABSTRACT

*Die übliche allzu enge Bindung von Extremwertaufgaben an die Differentialrechnung versäumt die Chance, diese Aufgaben zur Entwicklung eines reflexionsorientierten Mathematikunterrichts einzusetzen. Ausgehend von einem Bildungsbegriff, der Reflexion über Mathematik und die eigene mathematische Kompetenz als zentralen Aspekt umfasst, soll hier an konkreten Beispielen aufgezeigt werden, wie Extremwertaufgaben im Unterricht zur Entwicklung von Problemlösekompetenz verwendet und als Ausgangspunkt methodischer Reflexion von Mathematik genützt werden können.*

# 1 EXTREMWERTAUFGABEN UND BILDUNG

Titel wie auch Inhalt des hier vorgestellten Projekts wurden inspiriert durch ein Erlebnis mit einem Nachhilfeschüler aus einer achten Klasse AHS. Dieser sollte eine der üblichen Extremwertaufgaben lösen – konkret ging es darum, einem Kreis das flächeninhaltsgrößte Rechteck einzuschreiben. Nach harter Arbeit und vielen Rechenfehlern waren wir mit Hilfe der üblichen Technik (Hauptbedingung – Nebenbedingung – Zielfunktion – Ableiten usw.) schließlich doch noch zum richtigen Ergebnis gelangt. Nun konnte ich es mir aber doch nicht verkneifen, auf einen ungleich kürzeren, einfacheren und der Fragestellung auch viel angemesseneren Lösungsweg hinzuweisen, der darüber hinaus auch noch den Vorteil hat, nicht mit der „Kanone“ Differentialrechnung auf einen „Spatzen“ zu schießen. Ich erntete ungläubiges Staunen, das schließlich in der halb entrüsteten Feststellung gipfelte, dass man „solche“ Aufgaben doch „so“ nicht lösen dürfe.

Es wird hier davon ausgegangen, dass diese Anekdote nicht den eher seltenen Ausnahmefall betrifft, sondern viel mehr eine gängige Praxis von Mathematikunterricht charakterisiert. Vom Standpunkt mathematischer Grundbildung aus wären der Mathematikunterricht und die diesen gestaltenden LehrerInnen etwa folgendermaßen zu befragen:

- Welches Bild von Mathematik wird in der Unterrichtspraxis eigentlich vermittelt – das einer Wissenschaft, in der das logisch korrekte und gültige Argument die letzte Instanz ist oder eher doch das eines nicht weiter begründeten Methodenkatalogs, der strikt vorgegeben wird und genau einzuhalten ist, und mit dessen Hilfe „Probleme“ bearbeitet werden, die wenig oder überhaupt keinen Bezug zum Schüler oder zur Schülerin haben?

- Warum macht Mathematikunterricht so selten die kreativen, entdeckenden und forschenden Aspekte von Mathematik erlebbar – werden diese vielleicht zu oft oder zu früh einer vordergründigen „Brauchbarkeits- und Anwendungsorientierung“ geopfert?

- Geht Mathematikunterricht vielleicht grundsätzlich verkehrt vor, indem Methoden in den Mittelpunkt gestellt werden und dann dazu (mehr oder weniger interessante, brauchbare, anwendungsorientierte ...) Aufgaben gesucht oder gar nicht so selten „dazukonstruiert“ werden, anstatt von einem Problem auszugehen (das übrigens gar nicht unbedingt immer eine vordergründige Legitimation durch einen „Alltags- oder Lebensbezug“ braucht) und an diesem Problem das breite Spektrum mathematischer Denkweisen und Methoden zu entwickeln?

- Sind immer wieder festgestelltes Desinteresse an Mathematik und die oft beklagte fehlende Motivation von Schülerinnen und Schülern vielleicht auch Ergebnis systematischen Ignorierens anthropologischer Grundbedürfnisse nach Beschäftigung mit spannenden „Denksportaufgaben“ (wie sie auch und gerade die „seriöse“ Mathematik reichlich anbietet), nach geistiger Herausforderung durch „echte“ Probleme also, die kommunikativ und explorativ aufgeschlüsselt und bearbeitet werden und die Chance zu wahren intellektuellen Erfolgserlebnissen bieten?

Die Liste dieser (bewusst provokant formulierten) Fragen könnte noch verlängert werden. Hier soll über einen Versuch berichtet werden, das altehrwürdige Kapitel „Extremwertaufgaben“ aus seiner strikten Bindung an die Differentialrechnung zu lösen und damit gemeinsam mit Schülerinnen und Schülern in einer Form zu erschließen, die Methodenmonokultur durch eine Vielfalt von Zugängen ersetzt, auf echte intellektuelle Herausforderung abzielt und eben nicht nur auf ein Training in kaum verstandenen Rechentechniken.

## 1.1 Reflexion als Ziel von Mathematikunterricht

Dem hier beschriebenen Projekt liegt ein (Grund-)Bildungsbegriff zugrunde, der als ein wichtiges Ziel von Bildungsbemühungen die Fähigkeit und Bereitschaft zur reflektierenden Auseinandersetzung mit den Inhalten und Methoden, Möglichkeiten und Grenzen der jeweiligen Wissenschaft sieht. „Reflexion“ meint hier das Heraustreten aus einem bestimmten Kontext, also die Betrachtung von einem Standpunkt außerhalb eines gegebenen Zusammenhanges mit dem Ziel einer (persönlichen) Bewertung.

In Konkretisierung auf die Mathematik seien drei Reflexionsebenen unterschieden – nämlich die **systematische**, die **soziologische** und die **persönlich-individuelle** Ebene. Mit der Nennung dieser drei Reflexionseben wird hier kein Anspruch auf Vollständigkeit verbunden – es mag noch weitere bedeutende Aspekte geben. Ein gegenüber dem hier vorgeschlagenen Schema vielleicht modifizierter oder vielleicht erweiterter begrifflicher Raster könnte aber hilfreich sein bei Auswahl, Einordnung oder Begründung mathematischer Bildungsaktivitäten.

### 1.1.1 Reflexionsebene 1 – Mathematik als System

Mathematik ist ein (formales) System mit bestimmten „Spielregeln“, Möglichkeiten und Grenzen. Durch die moderne mathematisch-logische Grundlagenforschung wurden Fragen wie zum Beispiel

- Was ist ein mathematischer Beweis?

- Ist die Mathematik widerspruchsfrei?
- Ist die Mathematik vollständig in dem Sinne, dass jede „wahre“ mathematische Aussage auch beweisbar ist?

gestellt und auch teilweise beantwortet. Im Rahmen „metamathematischer“ Untersuchungen wurde die Mathemathik selbst zum Gegenstand mathematischer Analyse, indem versucht wurde, Fragen wie die oben angeführten mit Hilfe „verlässlicher“ sogenannter finiter Methoden zu untersuchen. Die Reflexion als Heraustreten aus einem gegebenen Zusammenhang besteht hier also darin, dass nur ein besonders vertrauenswürdiger Teil der Mathematik zur Analyse und letztlich Beurteilung der Mathematik insgesamt herangezogen wird.

Auch der Mathematikunterricht sollte die Systemebene mathematischer Reflexion nicht völlig ignorieren und etwa Fragen wie

- Wann können wir einen mathematischen Zusammenhang als abgesichert („bewiesen“) ansehen?
- Warum sollen wir uns überhaupt um einen Beweis mathematischer Tatsachen bemühen?
- Was gewinnen wir durch eine Formalisierung einer gegebenen Fragestellung, was geht dabei aber auch verloren?
- Welche Möglichkeiten und Grenzen hat die Mathematik?
- Was ist der wesentliche Unterschied zwischen der Mathematik und anderen Wissenschaften?
- Sind mathematische Ergebnisse „sicherer“ als die anderer Wissenschaften?

Gemeint ist damit eine wissenschafts- bzw. erkenntnistheoretische Einschätzung der Mathematik als Grundlage für eine Beurteilung ihrer Methoden und Ergebnisse.

### 1.1.2 Reflexionsebene 2 – Mathematik und Gesellschaft

Unser Leben in einer von Wissenschaft und technischer Rationalität bestimmten Gesellschaft wäre ohne die Mathematik undenkbar, selbst wenn diese Unverzichtbarkeit der Mathematik auf den ersten Blick nicht sofort erkennbar ist. Mit mathematischen Mitteln und in mathematischer Sprache werden viele abstrakte Sachverhalte analysiert, kommuniziert und organisiert – man denke etwa nur an die Bedeutung der Statistik als Argumentationsmittel im politischen Diskurs (diverse wirtschaftliche Kenngrößen wie z.B. die Inflationsrate oder die Arbeitslosenstatistik, Bedeutung der Bevölkerungsentwicklung für das Pensionssystem, ...) und auch als Hilsmittel bei konkreten (politischen) Entscheidungen. Dieses Beispiel ist nur eines von sehr vielen, an denen die „Mathematisierung“ unseres Alltags sinnfällig wird – ein gebildeter Mensch sollte prinzipiell in der Lage sein, die gesellschaftliche Bedeutung der Mathematik einzuschätzen und mathematisch gewonnene bzw. in mathematischer Sprache formulierte Beiträge zum öffentlichen Diskurs zu bewerten.

Im Unterricht wäre also immer wieder und von verschiedenen Blickwinkeln aus die Frage aufzuwerfen, was die Gesellschaft mit Mathematik macht und was umgekehrt die Mathematik aus der Gesellschaft macht, d.h. welche Rolle die Mathematik bei der Herausbildung gesellschaftlicher Identität spielt.

### 1.1.3 Reflexionsebene 3 – das mathematische Selbstbild

Schließlich sei noch auf eine dritte Dimension von Mathematik hingewiesen, die sich nicht unter eine der beiden anderen subsummieren läßt. Gemeint ist die persönliche Bedeutung, die Mathematik für das Individuum hat und die subjektive Aspekte wie z.B. emotionale Haltungen der Mathematik gegenüber ebenso umfasst wie Fragen der persönlichen mathematischen Kompetenz oder Begabung.

Von großer Bedeutung ist in diesem Zusammenhang der Begriff „Metakognition“, der das Nachdenken über das eigene Denken meint – letztlich mit dem Ziel, die eigene kognitive Kompetenz zu verbessern bzw. zu optimieren. Die Herausbildung metakognitiver Kompetenzen wäre ein wichtiges Ziel (mathematischer) Bildung, da damit die Grundlage gelegt wird für die selbstständige und eigenverantwortliche Steuerung und Gestaltung von Bildungsprozessen.

## 1.2 Zum Reflexionspotential von Extremwertaufgaben

Extremwertaufgaben bieten Gelegenheit zum Reflektieren zumindest auf der Systemebene und auf der individuellen Ebene. Anhand verschiedener Lösungsstrategien können einerseits Möglichkeiten und Grenzen sowie Vorteile und Nachteile verschiedener Zugänge zum Problem aufgezeigt und thematisiert werden, andererseites stellen gerade Extremwertaufgaben ein ideales Feld zur Entwicklung heuristischer Problemlösestrategien (Formalisieren, Verwendung geeigneter graphischer Darstellungen, Hypothesenbildung, Verfizieren bzw. Falsifizieren von Hypothesen, Spezialisierung und Generalisierung, ...) dar. Darüber hinaus können in diesem Zusammenhang wichtige metakognitive Kompetenzen (etwa durch Selbstbeobachtung beim Lösungsversuch und noch mehr durch Kommunikation über das Problem und verschiedene Ideen zu dessen Bearbeitung im Team) entwickelt und trainiert werden.

### 1.2.1 Eine kleine Extremwertdidaktik

Der Bereich der Extremwertaufgaben könnte etwa folgendermaßen erschlossen werden:

- <u>Extremwertaufgaben als intellektuelle Herausforderung</u>: Zunächst geht es darum, Extremwertaufgaben als intellektuelle Herausforderung zu erleben, d.h. als Fragestellungen, die Nachdenken provozieren können und nicht durch ein simples algorithmisches Verfahren oder durch eine vorgefertigte Prozedur so leicht gelöst werden können. Man wird also die SchülerInnen zum Einstieg mit einer Vielfalt von einschlägigen Fragestellungen konfrontieren und sie diese (etwa in Partnerarbeit oder in Kleingruppenarbeit explorieren lassen). Dabei geht es zunächst nicht darum, die Aufgaben (möglichst elegant und schnell) zu lösen, sondern die SchülerInnen sollen eher die Art der Fragestellungen kennenlernen und diese als sinnvolle Probleme erleben.

- Die „Extremwertbrille“: In einem zweiten Schritt könnten die SchülerInnen gebeten werden, eine „Extremwertbrille“ aufzusetzen (und das nicht nur im Unterricht, sondern gerade auch in ihrem Alltag), d.h. selbst einmal alle nur denkbaren Fragestellungen im Sinne einer Minimierung oder Maximierung unter gegebenen Randbedingungen zu entwickeln und zu sammeln. Im Mittelpunkt steht dabei wiederum nicht die Beantwortung dieser Fragen, sondern die Formulierung sinnvoller Probleme, seien sie innermathematischer oder lebenspraktischer Natur.

- Intellektuelle Grenzen erleben (Erfolg und Scheitern): In einer Phase sollen ausgewählte Extremwertfragestellungen lösungsorientiert bearbeitet werden (vorzugsweise in Partner- oder Kleingruppenarbeit). Es geht nun um die Entwicklung, Erprobung und Implementierung verschiedener Lösungsstrategien und darum, intellektuelle Durchbrüche wie auch Sackgassen zu erleben, gute Ideen zu haben oder Irrwege ein Stück weit zu verfolgen.

- Bedürfnis nach Algorithmen bzw. nichtalgorithmischen Prozeduren zur „Reduktion der Problemstufe“: Aus der intensiven Beschäftigung mit Extremwertaufgaben verschiedenster Art ergibt sich schließlich der Wunsch nach (algorithmisierten) Lösungsverfahren, die auf bestimmte Typen von Extremwertaufgaben anzuwenden sind und mit deren Hilfe aus einem „Problem“ schließlich eine „Übungsaufgabe“ wird. Gemeint sind Vefahren, die im Sinne einer Routineprozedur zur Lösung bestimmter Fragestellungen eingesetzt werden können und die es einem ersparen, jedesmal auf gute Ideen oder geniale Eingebungen hoffen zu müssen. Erst an dieser Stelle sollte das auf der Differentialrechnung beruhende Verfahren eingeführt werden.

### 1.2.2 Extremwertaufgaben – drei Methoden

An einem einfachen Beispiel seien nun drei Lösungsmethoden demonstriert, die im Zusammenhang mit Extremwertproblemen bedeutsam sind, nämlich die **graphische**, die **nichtalgorithmisch-prozedurale** und die **geniale** Methode.

| |
|---|
| Gesucht ist das flächeninhaltsgrößte Rechteck mit 10 m Umfang. |

### 1.2.2.1 Graphische Lösung:

Man zeichnet die sogenannte Zielfunktion und liest aus dieser Darstellung das Maximum bzw. das Minimum ab.

Wir betrachten also ein Rechteck mit Seitenlängen x und y und dem Umfang 10m:


Dann gilt

$$2.x + 2.y = 10,$$

d.h.

$$x + y = 5$$

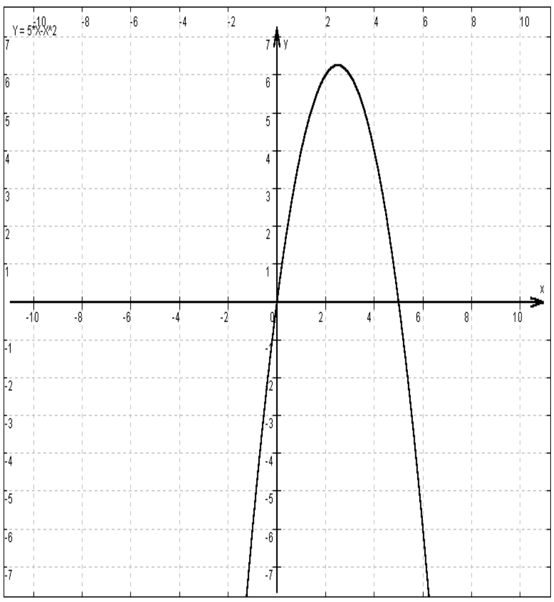
oder

$$y = 5 – x$$

und somit hat dieses Rechteck den Flächeninhalt

$$A(x) = x.y = x.(5 – x) = 5.x – x^2$$

Aus der graphischen Darstellung der „Zielfunktion“ A wird das Maximum abgelesen – dieses liegt bei x = 2,5. Das flächeninhaltsgrößte Rechteck ist also ein Quadrat mit 2,5 m Seitenlänge.



Dieses Verfahren hat den Vorteil, dass es sich leicht auf praktisch alle Extremwertaufgaben anwenden läßt, deren Zielfunktion eine Funktion einer Variablen ist. Sein Nachteil liegt natürlich in der begrenzten Genauigkeit graphischer Darstellungen. Darüber hinaus sollte auf grundsätzlicher Ebene die Berechtigung dieser Methode diskutiert werden. Dürfen wir die endlich vielen Wertepaare einer Wertetabelle durch eine Kurve verbinden und aus dieser Hochpunkte oder Tiefpunkte ablesen? Das bedarf letztlich natürlich einer mathematischen Rechtfertigung. Das Verfahren ist eigentlich eher ein heuristisches Hilfsmittel zur Formulierung einer Vermutung bezüglich einer Lösung der Extremwertaufgabe – einer Vermutung, die noch einer exakten mathematischen Begründung bedarf.

Dieses Lösungsverfahren könnte eine eingehende Beschäftigung mit Standardfunktionstypen, deren Grundeigenschaften und Graphen motivieren.

### 1.2.2.2 Nichtalgorithmisch-prozedurale Lösung:

Gemeint ist damit das auf der Differentialrechnung aufbauende Verfahren (Hauptbedingung – Nebenbedingung – Zielfunktion), das hier wohl nicht im Detail abgehandelt werden muss.

- Hauptbedingung: $A(x,y) = x.y$
- Nebenbedingung: $2.x + 2.y = 10 \Rightarrow y = 5 - x$
- Zielfunktion: $A(x) = 5.x - x^2$
- Bestimmung der Extremwerte:

  $A'(x) = 5 - 2.x = 0 \Rightarrow x = 2{,}5$

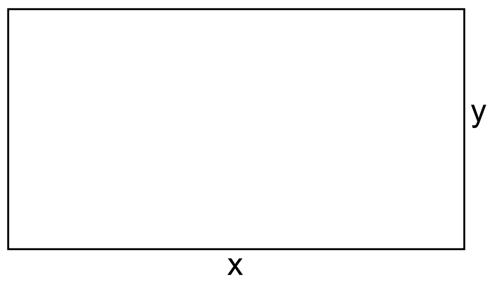
  $A''(x) = -2 < 0 \Rightarrow$ Maximum
- Ergebnis : Das flächeninhaltsgrößte Rechteck mit 10 m Umfang ist das Quadrat mit 2,5 m Seitenlänge.

Diese Methode setzt natürlich Kenntnisse der Differentialrechnung voraus – ihre mathematische Berechtigung steht und fällt mit einer entsprechenden Bedründung des Ableitungsbegriffs. Es handelt sich um eine nichtalgorithmisch-prozedurale Vorgangsweise in dem Sinn, dass zwar der Lösungsweg als allgemeine Prozedur vorgegeben ist, nicht aber im Sinne eines Algorithmus oder Rechenverfahrens, bei dem jeder einzelne Schritt genau festgelegt ist.

### 1.2.2.3 Geniale Lösung:

Eine gute Idee stellt sich oft als die angemessenste Lösungsmethode heraus – in einer Art „Überraschungsangriff“ wird das Problem bewältigt. Hier sollen zwei solche Ideen vorgeführt werden.

(1) Die erste Idee:




Wegen

$$2.x + 2.y = 10$$

haben wir

$$x + y = 5$$

und können nun x und y folgendermaßen darstellen:

$$x = 2{,}5 + t \text{ und } y = 2{,}5 - t;$$

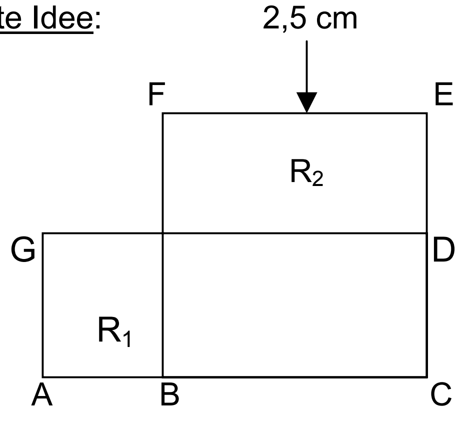
damit ergibt sich für den Flächeninhalt

$$A = x.y = (2{,}5 + t).(2{,}5 - t) = 6{,}25 - t^2,$$

und dieser Flächeninhalt wird maximal für $t = 0$.

Als Lösung der Aufgabe erhält man also ein Quadrat mit 2,5 m Seitenlänge und 6,25 $m^2$ Flächeninhalt.

(2) Die zweite Idee:



ACDG sei irgendein Rechteck mit 10 m Umfang und BCEF sei das Quadrat mit 2,5 cm Seitenlänge (es wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen, dass AC länger als 2,5 cm ist).

Zunächst einmal gilt

$$AB + BC + CD = BC + CD + DE = 5$$

woraus wir

$$AB = DE \text{ und } CD < 2{,}5$$

erhalten;

daraus ergibt sich

$$AB.CD < 2{,}5.DE$$

und somit

$$R_1 < R_2;$$

das Rechteck ist also flächeninhaltskleiner als das Quadrat.

(Diese Lösung ist RADEMACHER / TOEPLITZ (2000) entnommen.)

Die Lösung einer Extremwertaufgabe auf kreativem und elegantem Weg ruft üblicherweise die größte subjektive Befriedigung hervor – es macht einfach Spaß, gute Ideen zu haben und in einem „Aha-Erlebnis“ zur plötzlichen Einsicht zu gelangen. Ein Nachteil dieser „Methode“ ist aber zweifellos, dass man eine „geniale“ Idee eben erst einmal haben muss.

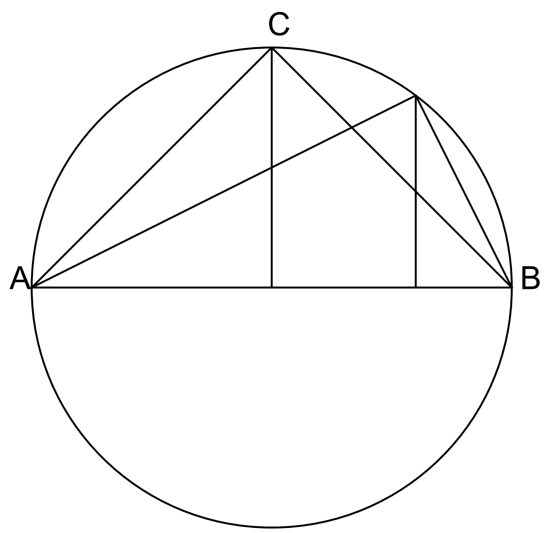
# 2 BEISPIELE FÜR EXTREMWERTAUFGABEN

Im Sinne des in (1.2.1) skizzierten didaktischen Aufbaus wurden von SchülerInnen verschiedener Schulstufen Extremwertaufgaben formuliert, exploriert, in Einzelarbeit und öfter in Kleingruppenarbeit bearbeitet und gelöst. Dabei wurde besonders auf methodische Vielfalt geachtet, d.h. wenn eine Aufgabe auf eine bestimmte Art bewältigt wurde, dann wurde immer gefragt, ob es nicht noch andere sinnvolle Lösungswege gibt (vgl. (1.2.2). Je nach dem mathematischen Kenntnisstand der SchülerInnen standen zumindest die drei oben dargestellten Methoden zur Verfügung (wenn die Differentialrechnung bereits bekannt war) oder es wurde nach der graphischen Darstellung des entsprechenden Funktionsgraphen zunächst eine gut begründete Vermutung formuliert und danach nach einer entsprechenden Begründung gesucht. Besonderer Wert wurde auf eine permanente Diskussion von Vorteilen und Nachteilen sowie Möglichkeiten und Grenzen der verschiedenen Zugänge gelegt.

Es sollen nun noch einige ausgewählte Produkte dieser gemeinsamen Arbeit vorgestellt werden, wobei wir uns hier auf die Formulierung der jeweiligen Aufgabe und auf eine Andeutung einer „guten Idee“ zu ihrer Lösung beschränken.

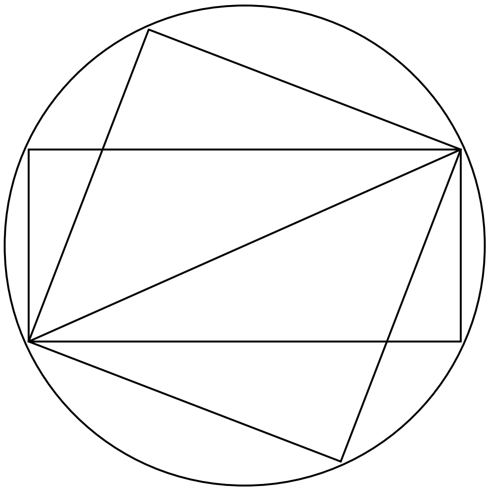
## 2.1 Flächeninhaltsgrößtes Dreieck im Halbkreis

Einem Halbkreis ist das flächeninhaltsgrößte Dreieck so einzuschreiben, dass eine Dreieckseite mit dem Halbkreisdurchmesser zusammenfällt.




<u>Lösung</u>: Bei fixer Grundlinie AB ist das flächeninhaltsgrößte Dreieck dasjenige mit der größten Höhe. Also hat das gleichschenkelig-rechtwinkelige Dreieck ABC den größten Flächeninhalt.

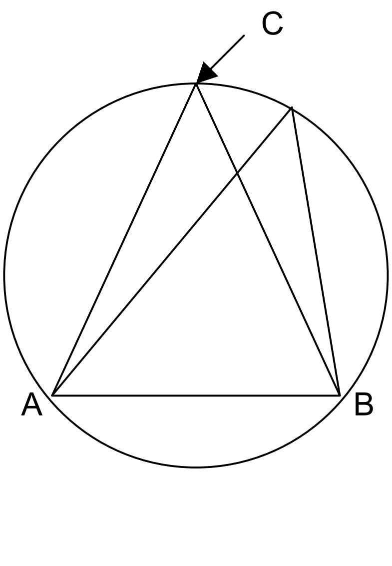
<u>Bemerkung</u>: Das flächeninhaltsgrößte Rechteck im Kreis muss das Quadrat sein. Denn man erhält das flächeninhaltsgrößte Rechteck, indem man irgendein dem Kreis eingeschriebenes Rechteck entlang einer Diagonale in zwei rechtwinkelige Dreiecke zerlegt und dann den Flächeninhalt dieser beiden Dreiecke maximiert. Dabei erhält man zwei gleichschenkelig-rechtwinkelige Dreiecke – insgesamt also ein Quadrat.



## 2.2 Flächeninhaltsgrößtes n-Eck im Kreis

### 2.2.1 Flächeninhaltsgrößtes Dreieck im Kreis

Einem Kreis ist das flächeninhaltsgrößte Dreieck einzuschreiben.

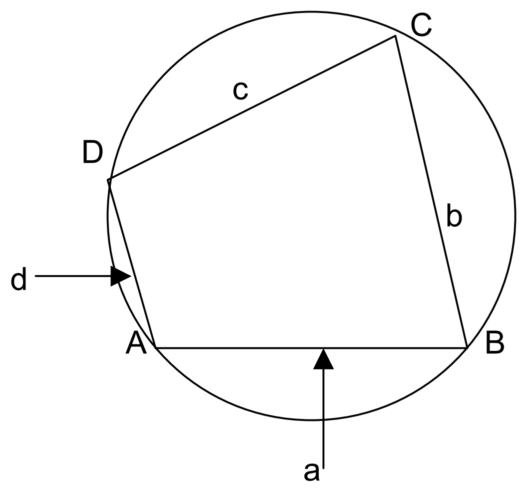


Bei fester Grundlinie AB hat das Dreieck mit der größten Höhe – also das gleichschenkelige Dreieck ABC – auch den größten Flächeninhalt. Das flächeninhaltsgrößte Dreieck muss aber „von jeder Seite aus gesehen“ gleichschenkelig sein – also hat das gleichseitige Dreieck den größten Flächeninhalt.

(Dieses Problem findet sich in SCHOENFELD (1985).)

### 2.2.2 Flächeninhaltsgrößtes Viereck im Kreis

Einem Kreis ist das flächeninhaltsgrößte (konvexe) Viereck einzuschreiben.




Um das flächeninhaltsgrößte Viereck zu erhalten müssen die Dreiecke ACD und ABD jedenfalls gleichschenkelig sein (da sie dann die größte Höhe haben), d.h. es muss

$$a = b \text{ und } c = d$$

gelten;

ebenso müssen die Dreiecke ABD und BCD gleichschenkelig sein, d.h.

$$a = d \text{ und } b = c;$$

somit gilt im flächeninhaltsgrößtenViereck

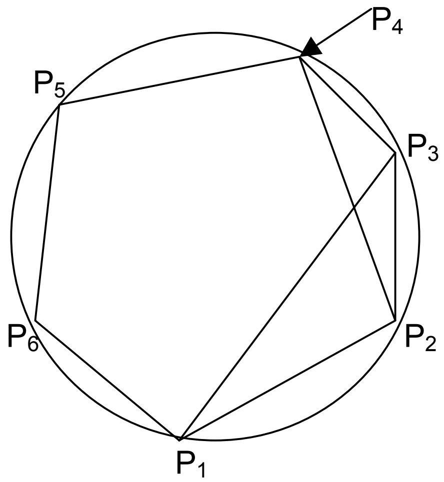
$$a = b = c = d,$$

es handelt sich also um eine Raute;

da diese Raute einen Umkreis hat bleibt als einzige Möglichkeit das Quadrat übrig.

### 2.2.3 Flächeninhaltsgrößtes n-Eck im Kreis

Einem Kreis ist das flächeninhaltsgrößte (konvexe) n-Eck einzuschreiben.




Die Dreiecke $P_1P_2P_3$, $P_2P_3P_4$, $P_3P_4P_5$, ..., $P_{n-2}P_{n-1}P_n$ müssen alle gleichschenkelig sein, damit das n-Eck den größten Flächeninhalt hat; d.h. aber, dass im flächeninhaltsgrößten n-Eck alle Seiten gleichlang sind – es handelt sich somit um das regelmäßige n-Eck.

## 2.3 Volumsgrößter Quader in der Kugel

Einer Kugel ist der volumsgrößte Quader einzuschreiben.

Wir wissen schon, dass das flächeninhaltsgrößte Rechteck im Kreis das Quadrat ist (siehe (2.1)). Bei fixer Höhe ist also der Quader mit quadratischer Grundfläche der volumsgrößte. Nun kann man aber jede Seitenfläche des Quaders als „Grundfläche" ansehen – der volumsgrößte Quader muss also sechs Quadrate als Seitenflächen haben und somit ein Würfel sein.

Bemerkung: Analog läßt sich begründen, dass das volumsgrößte Tetraeder in einer Kugel das regelmäßige Tetraeder ist.

## 2.4 Zerlegung von Zahlen

### 2.4.1 Zerlegung der 1

1 ist so in zwei positive Summanden zu zerlegen, dass $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ minimal ist.

Wegen

$$x+y=1$$

können wir $x$ und $y$ mit einer geeigneten Zahl $t$ wie folgt schreiben:

$$x=0{,}5+t \text{ und } y=0{,}5-t\,;$$

dann ist aber

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{0{,}5+t}+\frac{1}{0{,}5-t}=\frac{1}{0{,}25-t^2}$$

minimal für $t=0$;

die gesuchte Zerlegung erhält man also für $x=y=0{,}5$.

### 2.4.2 Zerlegung einer Zahl mit kleinster Quadratsumme

Die positive Zahl $x$ ist so in zwei positive Summanden zu zerlegen, dass die Summe der Quadrate der Summanden möglichst klein ist.

Wir schreiben

$$x=u+v$$

und stellen $u$ und $v$ in der Form

$$u=\frac{x}{2}+t \text{ und } v=\frac{u}{2}-t$$

dar;

dann ist

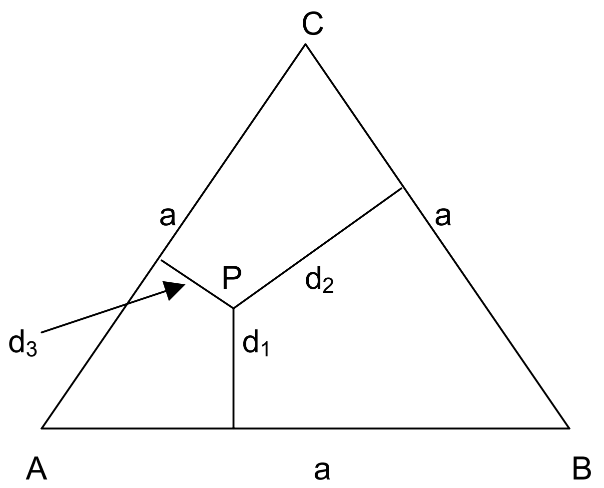
$$u^2+v^2=\frac{x^2}{2}+2\cdot t^2$$

minimal für $t = 0$.

Bemerkung: Das Ergebnis läßt sich leicht induktiv auf den Fall der Zerlegung in n Summanden mit minimaler Quadratsumme verallgemeinern.

### 2.4.3 Eine Eigenschaft des gleichseitigen Dreiecks

In einem gleichseitigen Dreieck ist derjenige Punkt P zu bestimmen, für den die Summe der Normalabstände zu den Seiten maximal (minimal) ist.




Den Flächeninhalt des ganzen Dreiecks ABC mit der Höhe h kann man als Summ der Flächeninhalte der Dreiecke APB, BPC und APC darstellen:

$$\tfrac{1}{2}.a.h = \tfrac{1}{2}.a.d_1 + \tfrac{1}{2}.a.d_2 + \tfrac{1}{2}.a.d_3,$$

woraus man

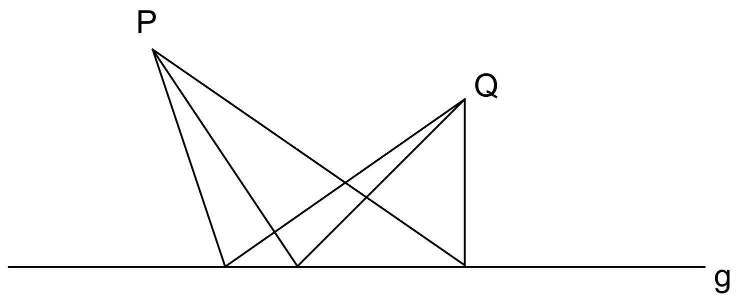
$$h = d_1 + d_2 + d_3$$

erhält.

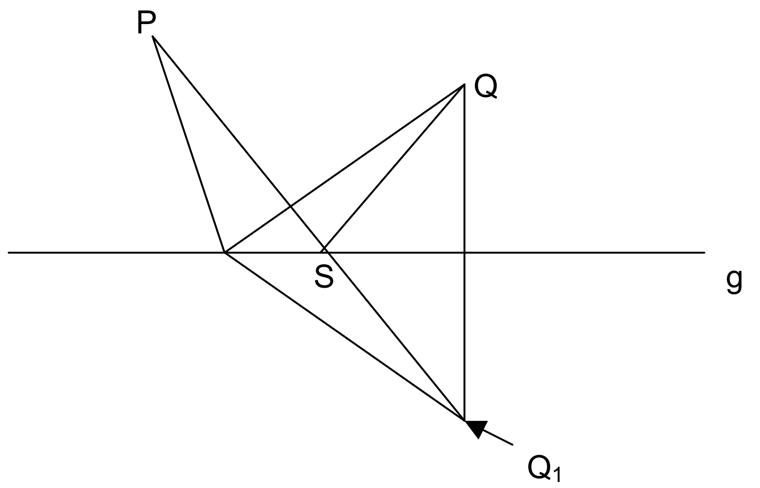
Die Summe der Normalabstände eines Punktes zu den drei Seiten ist also immer gleich der Höhe des Dreiecks.

### 2.4.4 Kurzer Weg

Gegebene Punkte P und Q sind durch einen möglichst kurzen Weg zu verbinden, der die gegebene Gerade g berührt.



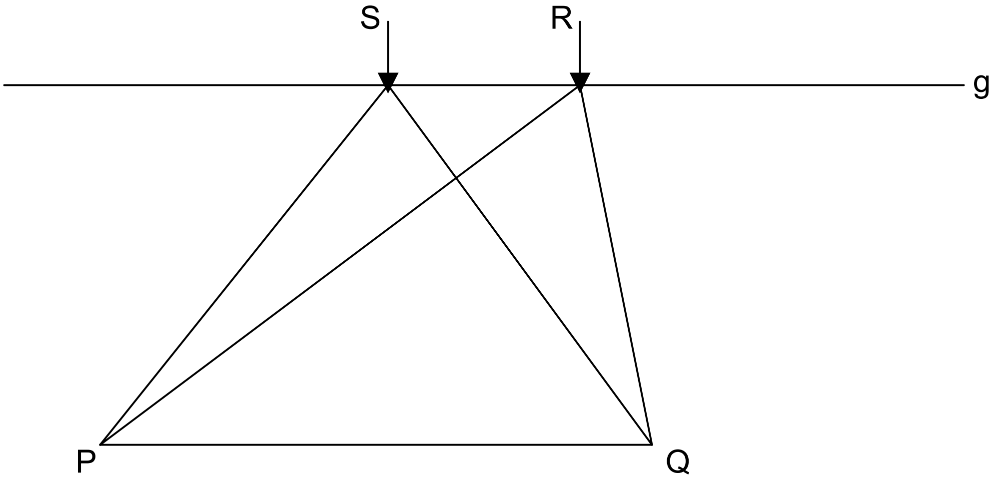

Spiegelung von Q an g ergibt den Punkt $Q_1$:




Jedem Weg von P über g nach Q entspricht nun ein gleich langer „gespiegelter" Weg von P nach $Q_1$. Nun ist aber die gerade Strecke von P nach $Q_1$ (die g in S schneidet) sicher die kürzeste Verbindung von P nach $Q_1$ – der gesuchte kürzeste Weg verläuft also so, dass der Winkel zwischen PS und g gleich ist dem Winkel zwischen QS und g („Einfallswinkel = Ausfallswinkel").

### 2.4.5 Dreieck mit kleinstem Umfang

Unter allen Dreiecken mit gegebenem Flächeninhalt ist dasjenige mit kleinstem Umfang zu bestimmen.




Wie wir schon wissen (2.4.4) hat bei gegebener Basis PQ und gegebener Höhe das gleichschenkelige Dreieck PQS den kleinsten Umfang. Das gesuchte Dreieck muss aber von jeder Seite aus gesehen gleichschenkelig und somit gleichseitig sein.

# 3 RÜCKBLICK UND PERSÖNLICHES RESUMEE

Der skizzierte didaktisch-methodische Blick auf Extremwertaufgaben weicht beträchtlich von der „Standardauffassung“ ab und er tut das bewusst und nicht zufällig. Eine Analyse der weit verbreiteten „Extremwertpraxis“ läßt den Betrachter ratlos werden angesichts der Frage, was ein Training in der Anwendung kaum verstandener Lösungsrezepte auf (aus SchülerInnensicht) weitgehend irrelevante Fragestellungen eigentlich mit „Bildung“ zu tun habe und könnte zur überpointierten Formulierung verleiten, dass alles besser sei als der „übliche“ Zugang.

Ausgangsidee des Projekts war, mit SchülerInnen einmal in die „mathematische Werkstatt“ zu gehen und sie dort möglichst authentisch fragen und suchen, finden und erfinden, kommunizieren und interagieren, verifizieren und verwerfen, zweifeln, verzweifeln und triumphieren zu lassen. Ziel war eben nicht die Abhandlung von Extremwertaufgaben als geschlossenes „Kapitel“ mit der Präsentation entsprechender Lösungsrezepte, sondern die auch vom Ergebnis her weitgehend offene Exploration der mathematischen Grundvorstellung „Extremwert“. Im Mittelpunkt stand dabei das Fragen und nicht das Lösen, das Forschen und nicht das Rechnen, das Entdecken und nicht das Reproduzieren. Für SchülerInnen und begleitenden Lehrer gleichermaßen war es eine eindrucksvolle Erfahrung, wie interessant und anregend die Arbeit mit „klassischen“ Extremwertaufgaben sein kann, wenn man sie als echte mathematische Probleme erleben kann. In diesem Sinn gab es auch reichlich Rückmeldungen von SchülerInnen.

Dieser insgesamt positiven Bilanz stand die im Zusammenhang mit alternativen Zugängen wahrscheinlich unvermeidliche Verunsicherung gegenüber, die sich besonders in der Anfangsphase des Projekts auf SchülerInnenseite gelegentlich in der Frage manifestierte, wann wir denn wieder „richtig“ Mathematik machen würden. Darüber hinaus stellte sich – und zwar nicht nur für die SchülerInnen – die Frage, wie eine entsprechende Schularbeit aussehen könnte. Im weiteren Verlauf des Projekts setzte sich auch auf SchülerInnenseite immer mehr die Einsicht durch, dass wir selten „richtigere“ Mathematik gemacht hatten als gerade jetzt und das Schularbeitsproblem wurde in eher „traditioneller“ Form (Varianten der erarbeiteten Aufgaben waren mit beliebiger Methode zu bearbeiten) „gelöst“. Speziell in der Beurteilungsfrage wären noch Ideen zu entwickeln und zu erproben wie etwa Berichte über eigene Erfahrungen und Lernprozesse oder Präsentationen selbst erfundener Extremwertaufgaben.

Eine formelle Evaluation des Projekts wurde zwar nicht durchgeführt, doch die Erfahrungen ermutigen durchaus zu seiner Fortsetzung und auch dazu, andere mathematische Kapitel in ähnlicher Weise zu erschließen – etwa das der Funktionen. Ein tragfähiger Funktionsbegriff ist nicht nur eine Voraussetzung für die Arbeit mit Extremwertproblemen, das Kapitel bietet auch für sich selbst genommen beträchtliches Reflexionspotential.

# 4 LITERATUR

RADEMACHER H., TOEPLITZ O.: Von Zahlen und Figuren. Proben mathematischen Denkens für Liebhaber der Mathematik. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2000

SCHOENFELD A. H.: Mathematical Problem Solving. Academic Press San Diego 1985