FÄCHERÜBERGREIFENDE ERARBEITUNG DES FUNKTIONSBEGRIFFS IN DER 4. KLASSE

Irmgard KÖBERL-KÖGLER
Herbert KÖGLER

HIB Graz,
Kadetteng. 19 -23

Graz, im Schuljahr 2001/02

HIB Graz, Kadetteng. 19 -23

Mag. Irmgard Köberl-Kögler / Mag. Herbert Kögler

Fächerübergreifende Erarbeitung des Funktionsbegriffs in der 4. Klasse

Die Idee zu diesem Projekt entstand, weil wir das dritte Jahr gemeinsam diese Klasse unterrichten (M, Ph). Die Klasse besucht unseren Sprachzweig (1.Kl.: E, 2.Kl.: F, 3.Kl.: L, 5.Kl.: Ru, Sp oder It), ist aber vor allem auch mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächern gegenüber sehr aufgeschlossen. Die alljährliche Teilnahme am Känguru-Test wurde von den SchülerInnen immer gefordert.
Die Herausforderung war, die SchülerInnen dieser Klasse mit dem Funktionsbegriff bereits in der 4. Klasse intensiver als sonst üblich zu konfrontieren und sie vor allem mit den Grundvorstellungen der linearen Funktionen vertraut zu machen.
Zunächst sollte der Begriff "Funktion" als Zuordnung zwischen zwei Größen verstanden werden. Dabei wollten wir auch die kommunikative Komponente durch Diskussionen über Anwendungsbeipiele fördern. Im weiteren Verlauf wurde vor allem der lineare Zusammenhang zwischen zwei Größen herausgearbeitet. Wir versuchten die SchülerInnen mit Grundvorstellungen der linearen Funktionen vertraut zu machen. Sie sollten nicht nur allgemeines Wachsen und Abnehmen unterscheiden können, sondern die besondere Form des linearen Wachsens und Abnehmens verstehen. Wir hofften, diesen Zusammenhang durch praktisches Arbeiten in Physik festigen zu können.
Mit Hilfe von Versuchen wurden im **Physikunterricht** Werte zusammenhängender Größen experimentell ermittelt, in Tabellen eingetragen und in Diagrammen graphisch dargestellt. Dabei sollte die besondere Bedeutung der linearen Funktionen herausgearbeitet und die Grundvorstellung, dass die graphische Darstellung einer linearen Funktion eine Gerade ist, untermauert werden.
Im **Mathematikunterricht** wurde die "Übersetzung" von Texten, graphischen Darstellungen und Tabellen in die Termdarstellung $\mathbf{f(x) = k \cdot x + d}$ eingeführt und das Übertragen zwischen den verschiedenen Darstellungsformen geübt. Dabei wurde versucht, Grundvorstellungen der Steigung k zu vermitteln, die Steigung k im Steigungsdreieck zu verdeutlichen und verschiedene Größen von k graphisch zu interpretieren. Auch die Bedeutung der Konstanten d als Funktionswert an der Stelle 0 wurde besonders betont.
Die SchülerInnen sollten am Ende die Fähigkeit haben, aus entsprechenden Angaben die Steigung k zu berechnen, aus verschiedensten Angaben den Graphen einer linearen Funktion zu zeichnen und aus dem Graphen einer linearen Funktion k und d herauszulesen. Außerdem sollten sie ihre erworbenen Grundvorstellungen in Anwendungssituationen einsetzen und dabei die Bedeutung von k und d angeben können.

Unsere Erwartungen und Ziele waren, dass die SchülerInnen auf dieses Basiswissen zunächst in der 5. Klasse, aber längerfristig auch in der gesamten Oberstufe aufbauen können. Die SchülerInnen sollen in den Themenbereichen "Funktionen", "Formeln", "Proportionen", die bis zur Matura einen wesentlichen Bereich des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts ausmachen, besser gefördert werden. Sie sollen sich öfter im Argumentieren, Interpretieren und Darstellen üben, um Grundfähigkeiten zu entwickeln, die sie auch noch nach der Matura in die Lage versetzen sollten, diese erworbenen Fertigkeiten anzuwenden. Dabei lag der Schwerpunkt des Projekts sicherlich im Mathematikunterricht, der Unterricht in Physik sollte dabei als Unterstützung dienen.

Beteiligt am Projekt waren außer den oben Genannten noch einige KollegInnen in beratender Funktion.
Zumindest bisher hat sich gezeigt, dass Begabungen und Interessen aus sprachlicher und naturwissenschaftlicher Sicht nicht sehr voneinander abweichen. Daher möchten wir die SchülerInnen dieser 4C nicht nur in sprachlicher, sondern auch in mathematisch-naturwissenschaftlicher Hinsicht bestmöglich fördern.
Der Bezug zur Grundbildung ist bei diesem Thema immer gegeben, weil das Beschreiben und Darstellen von Abhängigkeiten sowie das Interpretieren von Formeln und graphischen Darstellungen ohnehin Teil allgemeiner Grundbildung sind.

Im Rahmen von schriftlichen Überprüfungen vor Beginn des eigentlichen Projekts wurde bereits die Bewältigungsfähigkeit folgender Beispiele getestet:

1.) $x = \frac{a^2 \cdot b}{c}$

*) Untersuche diese Formel auf eventuelle Proportionalitäten zwischen x und b sowie x und c. Begründe deine Aussagen!

*) Wie ändert sich x, wenn man a verdreifacht? Wie ändert sich x, wenn man c verdoppelt?

*) Welche Beziehung besteht zwischen $x(\frac{a}{2}, 2b, 4c)$ und $x(a,b,c)$?

Auswertung:
Erreichte Punkte: 66 von 80 Punkten, das sind **82,5%** .

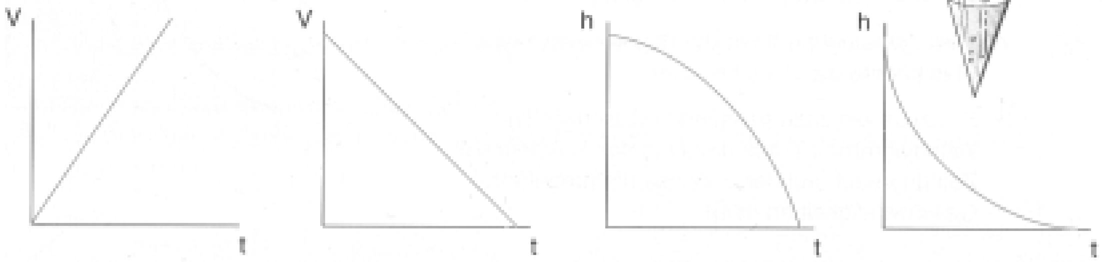
Schüler	9	8	3	0	0	20
Punkte	36	24	6	0	0	66

2.) Zwei Radfahrer fahren vom Ort Pedalstadt nach Veloland. Der erste braucht für einen Kilometer 3min, der zweite 2min. Der erste Radfahrer macht sich $\frac{3}{4}$ h vor dem zweiten auf den Weg und kommt $\frac{1}{2}$ h vor ihm im Ziel an. Berechne die Entfernung der beiden Orte!

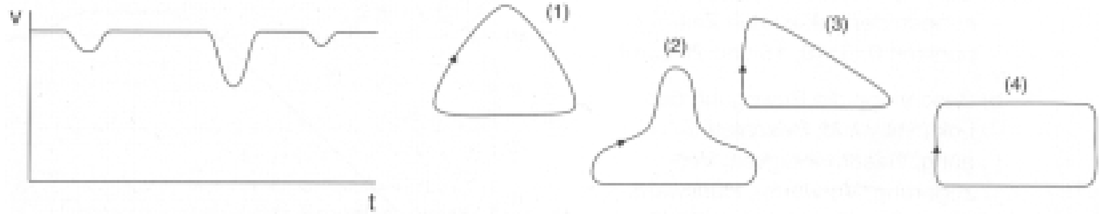
Auswer-tung: -
Erreichte Punkte: 46 von 76 Punkten, das sind **60,52%** .

Schüler	8	1	4	3	3	19
Punkte	32	3	8	3	0	46

Aus einem kegelförmigen Trichter wird gleichmäßig Wasser ausgepumpt, d. h. pro Sekunde dieselbe Menge. Es wird das im Trichter vorhandene Wasservolumen V bzw. die Höhe h des Wasserspiegels in Abhängigkeit von der Zeit t gemessen. Welche der 4 Schaubilder beschreiben diesen Vorgang?

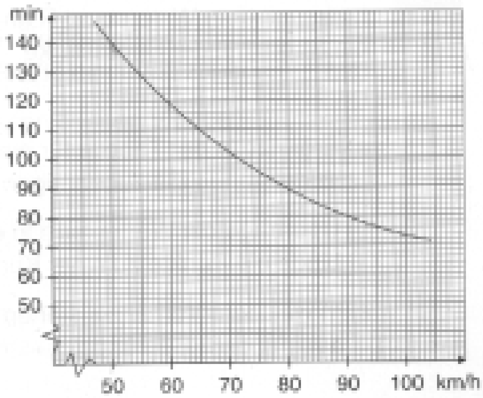


Ein Rennauto fährt einen der vier angegebenen Rundkurse.
a) Wähle jenen Rundkurs aus, der dem angegebenen Geschwindigkeitsdiagramm entspricht!
b) Wie könnten die entsprechenden Diagramme für die drei anderen Rundkurse aussehen?



An Hand des Abschnitts über graphische Darstellungen wurde versucht, verschiedene Zusammenhänge aus Graphen und Diagrammen zu erkennen und zu interpretieren. Z. B.:
Im weiteren Verlauf sollten Zusammenhänge auch durch Terme und Formeln angegeben werden

Wie viele Minuten kann man einsparen, wenn man die Geschwindigkeit um 10 km/h erhöht?
Zur Beantwortung dieser Frage sollst du das gegebene Schaubild heranziehen: Es gibt den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Fahrzeit auf einer Strecke von 120 km an!
a) Wovon hängt die Antwort auf die Frage in erster Linie ab?
Erkläre anhand von drei selbst gewählten Beispielen!
b) Stelle eine Formel auf, mit der du die Fahrzeit t (in h) aus der Geschwindigkeit v (in km/h) berechnen kannst!



können, wobei meist graphische Darstellungen als Mittel zur Veranschaulichung herangezogen wurden, z. B.:

Parallel zum Unterricht in Mathematik haben wir auch im **Physikunterricht** die Abschnitte über Geschwindigkeit und Beschleunigung vorgezogen.
Dabei war aber der Zugang zu Tabellen, graphischen Darstellungen und Formeln ein anderer. Die Schüler konnten nicht auf vorgegebene Messergebnisse zurückgreifen, sie mussten in Schülerversuchen selbst bei vorgegebenen Bewegungen Messergebnisse ermitteln und anschließend in vorbereiteten Zeit-Weg-Diagrammen eintragen.

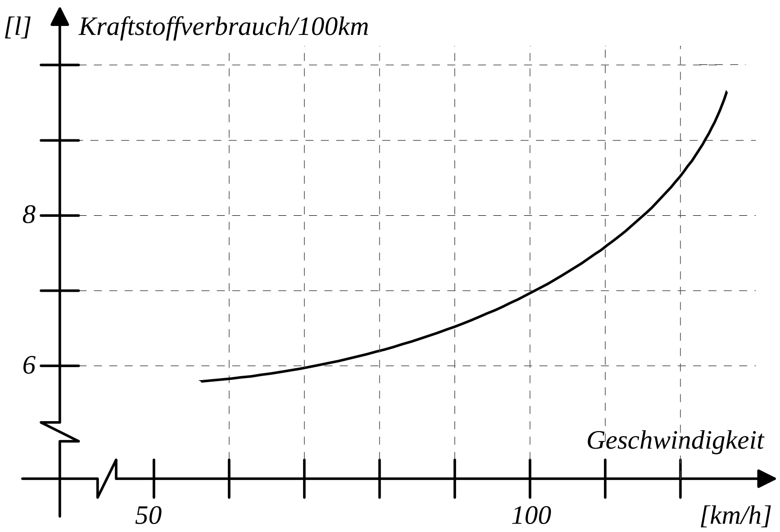
Die Schüler arbeiteten in 5 Gruppen. Sie verwendeten dabei Materialien aus den Schülerversuchskästen und zwar u. a. eine Fahrbahn mit Experimentierwagen und den Zeitmarkengeber mit Schreibstreifen und eine Verbindungsschnur (**Siehe Fotobeilage 7**).
Jeder Schüler der Gruppe erhielt ein Versuchsprotokoll zum Eintragen der gemessenen Längen auf dem Schreibstreifen und vorbereitete Diagramme, um die gemessenen Werte dort eintragen zu können (**Siehe Beilage 5a und 5b**).

Der Versuch musste nach einigen Probeläufen dreimal unter verschiedenen Bedingungen durchgeführt werden und zwar:

1) Der Wagen soll mit der Hand möglichst unregelmäßig die Versuchsstrecke entlang geführt werden.
2) Die Fahrbahn wird an einer Seite leicht erhöht, um v. a. die Reibung des durchzuziehenden Schreibstreifens auszugleichen und dann einmal angestoßen.
3) Der Wagen wird mit Massenstücken (ca. 200g) beschwert und ein Faden verbindet den Wagen über eine feste Rolle mit einem Massenstück von 10 g.

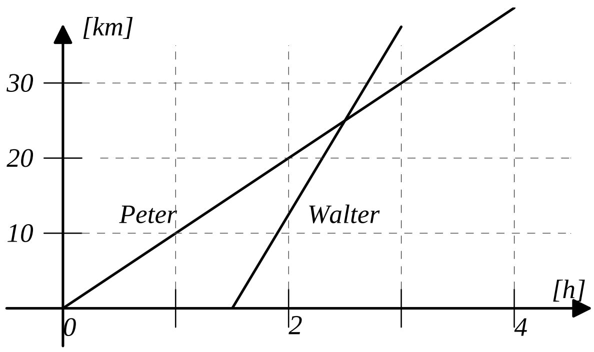
Eigentlich war vorgesehen, dass die SchülerInnen in einer Unterrichtsstunde darauf vorbereitet wurden, was sie in der nächsten Schülerversuchsstunde machen sollten. Aber durch immer wieder auftretende Schwierigkeiten mit dem Zeitmarkengeber musste noch eine weitere Schülerversuchsstunde aufgewendet werden, um die vorgegebenen Ziele zu erreichen. Am Ende waren wir sehr überrascht, dass eigentlich bei allen die ermittelten graphischen Darstellungen unseren Vorstellungen entsprachen.
Die SchülerInnen sollten - zumindest beim Eintragen der Werte in die Diagramme - erkennen, dass man durch einfache Versuche zu graphischen Darstellungen gelangen kann. Die Begriffe ungleichförmige und gleichförmige Bewegung, gleichmäßig beschleunigte Bewegung sowie Geschwindigkeit und Beschleunigung wurden dann auch an Hand dieser graphischen Darstellungen erläutert.
In einer weiteren Schülerversuchsstunde wurde noch die graphische Darstellung einer indirekt proportionalen Funktion entwickelt. Dabei arbeiteten wiederum dieselben Gruppen, allerdings verwendeten wir nicht mehr den sehr störungsanfälligen Zeitmarkengeber, sondern eine Stoppuhr, wobei die Zeit gemessen werden sollte, die der mit Massenstücken (insgesamt 300 g) beschwerte Wagen auf der Fahrbahn bei wachsender beschleunigender Kraft für eine vorgegebene Strecke (ca. 60 cm) benötigt. Bei den verschiedenen Massen sollte immer der Mittelwert von drei Messergebnissen in das vorbereitete Versuchsprokoll und anschließend in das Diagramm eingetragen werden (**Siehe Beilage 6**).

Dabei entstanden eigentlich bei allen SchülerInnen sehr schöne Graphen von indirekt proportionalen Funktionen, obwohl sie von vornherein überhaupt nicht wussten, wie der zu ermittelende Graph eigentlich auszusehen hat. Bewundernswert war allerdings, wie schnell nach den beiden ersten Schülerversuchsstunden die SchülerInnen diesmal ihre Aufgaben mit Fahrbahn, Experimentierwagen und Stoppuhr erledigten.



Grundsätzlich muss allerdings schon festgehalten werden, dass Schülerversuche wesentlich mehr Vorbereitung benötigen, dass sie eigentlich nur bei nicht zu großen Schülerzahlen und auch da nur begrenzt möglich sind.

Nach der fächerübergreifenden Behandlung graphischer Darstellungen wurden dann in den ersten beiden Beispielen einer aus 4 gleichwertigen Beispielen mit je 12 Punkten bestehenden Mathematikschularbeit diese Fertigkeiten überprüft:



Aus der Schularbeit vom 20. 4. 2002 mit 4 gleichwertigen Beispielen zu je 12 Punkten :

1a) Hier ist die Abhängigkeit des Kraftstoffverbrauchs pro 100km für eine bestimmte Autotype dargestellt:

*) Bei welcher Geschwindigkeit beträgt der Kraftstoffverbrauch 7l /100km ?

__________ km/h

*) Wie groß ist der Kraftstoffverbrauch bei einer Geschwindigkeit von 80 km/h?

________ l /100km

*) Um wieviel % ist der Kraftstoffverbrauch bei 100km/h höher als bei 80 km/h ?

____

1b)*) Wann fährt Walter ab ? Wieviele km hat Peter zu dieser Zeit bereits zurückgelegt ?

____

*) Zu welcher Zeit t und nach wievielen km holt Walter Peter ein ?

______________ ______________

*) Mit welchen Geschwindigkeiten fahren beide ?

______________ ______________

*) Stelle für Peter eine Funktionsgleichung auf ! ________________________________

2a) An einer Tankstelle, die ausschließlich bleifreies Benzin führt, werden im Monat Juni folgende Benzinmengen abgegeben: a_1 Liter Normalbenzin zu s_1 Schilling pro Liter und a_2 Liter Superbenzin zu s_2 Schilling pro Liter.

*) Gib Formeln an für die **Gesamteinnahmen im Monat Juni** sowie für die **mittlere Gesamteinahme pro Tag**!

*) Im Juli wurden um x_1 Liter mehr Normalbenzin und um x_2 Liter weniger Superbenzin verkauft als im Juni. Gib eine Formel an für die **mittleren Gesamteinnahmen pro Tag** im Juli !

*) Im August erfolgten folgende prozentuelle Änderungen der verkauften Benzinmengen gegenüber Juni :
p_1 % Zunahme bei Normalbenzin und p_2 % Zunahme bei Superbenzin.
Stelle eine Formel auf für die **Gesamteinnahmen im Monat August** !

2b) Frau Eifrig startet vom Ort A aus zu einem Joggingtraining und läuft konstant mit einer Geschwindigkeit von 8 km/h. Herr Marathon verlässt eine viertel Stunde später ebenfalls Ort A und trainiert mit einer konstanten Geschwindigkeit von 12km/h. Sobald er Frau Eifrig eingeholt hat, stoppt er eine viertel Stunde seinen Lauf für Dehnungsübungen. Dann setzt er sein Training wieder mit 12km/h fort bis er Frau Eifrig wieder einholt.

*) Zeichne ein Zeit-Weg-Diagramm (1cm $\triangleq$ 10min; 1cm $\triangleq$ 2km) für beide LäuferInnen in ein und dasselbe Koordinatensystem!

*) Stelle für beide LäuferInnen eine Funktionsgleichung für die erste Teilstrecke auf und berechne, wann Herr Marathon Frau Eifrig das erste Mal einholt!

Auswertung der Ergebnisse dieser beiden Beispiele:

Nummer des Beispiels	**1.a)**	**1.b)**	**2.a)**	**2.b)**	**Gesamt**
Punkte	4	8	6	6	24
Gesamtpunkte (Punkte mal 21)	84	168	126	126	504
Erreichte Punkte	48	127	87	72	334
Anteil erreichter Punkte	57,1%	75,6%	69,0%	57,1%	66,3%

Dabei muss festgehalten werden, dass die SchülerInnen ihre erworbenen Kenntnisse recht zügig anwenden mussten, um die geforderten Lösungen in der für eine Schularbeit zur Verfügung stehenden Zeit (50 Minuten) zu schaffen (Es gab noch zwei weitere Beispiele). Unter diesen Voraussetzungen waren wir mit den erreichten Leistungen recht zufrieden.

Im Folgenden wurde der Begriff der Funktion definiert, wobei über die direkte Proportionalität die lineare Funktion eingeführt wurde. Die SchülerInnen sollten in der Lage sein, die Steigung

linearer Funktionen zu deuten, ihre Graphen zu zeichnen und andererseits auch aus Graphen von linearen Funktionen k und d herauszulesen.
Weiters sollten sie ihr Wissen über lineare Funktionen bei gleichförmigen Bewegungen und verschiedenen Zeit-Weg-Aufgaben einsetzen können.
Um das Verständnis über lineare Funktionen und ihren graphische Darstellungen zu festigen, wurden im Anschluss u. a. sehr viele Übungen der Art gemacht, wie sie in der **Beilage 1** angeführt sind.

Anschließend wurde ein von einer Projektgruppe (Evaluations-Projekt des Austrian Center for Didactics of Computer Algebra) ausgearbeiteter Test betreffend Allgemeinwissen, **Qualität im Mathematikunterricht**, durchgeführt.
Die Aufgabenstellungen befinden sich in den **Beilagen 4a, 4b und 4c** . Die Auswertung ergab folgende Ergebnisse:

	A.1	**A.2a**	**A.2 b**	**A.3**	**A.4**	**A.5**	**A.6**	**A.7**	**A.8**	**5.1**	**Ges.**
Gesamtpunkte	21	21	42	42	42	21	21	21	21	21	273
Erreichte Punkte	21	11	23	38	30	20	16	12	3	16	190
Anteil erreichter Punkte **(%)**	100	52,4	54,8	90,5	71,4	95,2	76,2	57,1	14,3	76,2	**69,6**

Dabei fällt auf, dass es Beispiele gab, die von allen (A.1) oder fast allen (A.3, A.5) gelöst werden konnten, das Beispiel 8.A aber nur von 3 SchülerInnen.

Im Anschluss daran wurde der Begriff der Funktion vor allem im Mathematimunterricht sowohl an direkt proportionalen als auch an indirekt proportionalen Funktionen geübt (verschiedene Hyperbeln und in Text verpackte Aufgaben), wie es in der **Beilage 2** ersichtlich ist. Im Physikunterricht hatten wir u. a. schon den Graphen einer indirekt proportionalen Funktion durch Schülerversuche ermittelt.
Damit hatten wir den Teil über Funktionen, den wir uns für dieses Projekt vorgenommen hatten, erledigt. Wir formulierten am Ende dieses zu dokumentierenden Projekts noch eine schriftliche **Mitarbeitsüberprüfung**, wobei wir zu ermitteln versuchten, wie weit bei den SchülerInnen dieser Klasse Grundvorstellungen über Funktionen - speziell natürlich bei linearen Funktionen- vorhanden sind und welche Grundfähigkeiten sie entwickelt haben. Die Aufgabenstellungen sind in der **Beilage 3** enthalten. Die Auswertung ergab ein für uns sehr zufriedenstellendes Bild. Nur bei Aufgabe 4 war der Anteil der erreichten Punkte etwas zu niedrig:

	1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**Gesamt**
Gesamtpunkte	63	84	63	21	63	42	336
Erreichte Punkte	50	65	51	11	48	34	259
Anteil erreichter Punkte (in %)	79,4	77,4	81	52,4	76,2	81	77,1

Erkenntnisse:

Die fächerübergreifende Anwendung funktionierte gut, die SchülerInnen waren mit Eifer bei der Sache. Durch gleichzeitiges Bearbeiten eines Stoffgebiets in zwei Gegenständen gelang es besser, die Begeisterung der SchülerInnen für dieses Stoffgebiet zu wecken. Das praktische

Arbeiten in Physik machte die Theorie in Mathematik leichter durchschaubar und der Lehrstoff konnte daher schneller gefestigt werden.
Für unsere weitere Arbeit in der Zukunft werden wir noch mehr Wert darauf legen, Stoffgebiete fächerübergreifend zu behandeln, um dadurch ein und dieselbe Problematik von verschiedenen Gesichtspunkten aus zu beleuchten.
Obwohl wir mit dem bisher Erreichten sehr zufrieden sind, können wir einen endgültigen Schlussstrich unter dieses Projekt wohl erst im Laufe der 5. Klasse, wo das Thema "Funktionen" im Mathematikunterrricht eine tragende Rolle einnimmt, oder überhaupt erst im Laufe der Oberstufe ziehen. Erst dann werden wir sehen, ob sich die SchülerInnen dieser Klasse beim Thema "Funktionen" bessere Grundvorstellungen angeeignet und ausgereiftere Grundfähigkeiten entwickelt haben, die Ihnen auch in anderen Gegenständen und Situationen nützen können.
Unsere Begeisterung für kurzfristig anberaumte fächerübergreifende Projekte ist deutlich gestiegen, wobei die Flexibilität der KollegInnen dabei sehr gefordert ist, da sich verschiedene Themenbereiche erst im Laufe der Unterrichtsarbeit - manchmal auch durch besonderes Interesse der SchülerInnen - ergeben.
Der Erfahrungsaustausch bei den Seminaren und die Durchführung der Worshops waren überaus anregend und interessant. Allerdings übersteigen ausführliche Beschreibungen und Dokumentationen den neben der Unterrichtsarbeit möglichen Zeitrahmen. Das schreckt wahrscheinlich viele KollegInnen von der Mitarbeit bei solchen Projekten ab. Sehr gefreut haben wir uns über eine Vertiefung der emotionalen Komponente der Lehrer-Schüler-Beziehung, die die Unterrichtsarbeit hoffentlich auch in den nächsten Jahren positiv beeinflussen wird.