GENETISCHER MATHEMATIKUNTERRICHT

Karl Bernauer

Wilfried Kuran

BG/BRG Schärding

Schärding, 2003

INHALTSVERZEICHNIS

ABSTRACT

Die mathematische Beschreibung von Wachstums- und Abnahmevorgängen in der sechsten Klasse einer AHS sowie die Einführung der Bruchzahlen in der Unterstufe entsprechen in einem hohen Maß den Leitlinien zur Inhaltswahl im Sinne des Grundbildungskonzeptes. Die konkrete Durchführung der Unterrichtsequenzen im Sinne des genetischen Prinzips stellt das Lernen und Entdecken in den Mittelpunkt und präsentiert mathematische Erkenntnisse nicht als Fertigprodukt, sondern als Ergebnisse eines teils von den Schüler/innen selbstgesteuerten, teils vom Lehrer geleiteten Prozesses.

1 EINLEITUNG: GENETISCHER MATHEMATIKUNTERRICHT

Das zentrale Anliegen des „genetischen Prinzips“ ist es, dass Mathematik nicht als ein Fertigprodukt gelehrt wird, sondern dass Lernende einen Einblick in den Prozess der Entstehung von Mathematik erhalten. Mathematik ist etwas, bei dem Lernende entdecken oder erfinden können, auch wenn es sich meist oder fast ausschließlich "nur" um Nacherfindungen handelt. Stimmt man mit Sir Carl Popper überein, dass Leben Problemlösen ist, so ist damit bereits ein wesentlicher Grund für einen problemlösenden Unterricht angesprochen: Lebensvorbereitung erfordert einen Unterricht, in dem auf dem begrenzten und überschaubaren Übungsfeld der Mathematik das Lösen von Problemen gelernt werden kann. Allerdings weiß man heute, dass der wünschenswerte Transfer der in einem Gebiet erlernten Fähigkeiten auf andere Bereiche nicht von selbst geht, sondern eigens erlernt werden muss. Wissen ist an den Kontext gebunden, in dem es erworben wurde. Der Transfer auf andere Gebiete erfordert weiteres Wissen und zusätzliche Fähigkeiten.

G. Malle [3] formuliert folgende Thesen für genetischen Mathematikunterricht:

- Begriffe und Theoreme sollen den Lernenden nicht an den Kopf geknallt werden, sondern aus Problemstellungen oder passenden Situationen heraus entwickelt werden.
- Begriffe und Theoreme sollen erst dann eingeführt werden, wenn man sie braucht. (Kein Lernen auf Vorrat)
- Mit eingeführten Begriffen und Theoremen soll wirklich gearbeitet werden. (Kein totes Wissen, keine Sackgassen!)
- Aus erfolgten Problemlösungen sollen nach Möglichkeit weitere Aufgabenstellungen entwickelt werden.
- Verallgemeinerungen sollen schrittweise erfolgen. Man sollte nicht gleich die allgemeinste Version anbieten.
- Es soll am Vorwissen der Lernenden angeknüpft werden.

- Die Darstellung soll keine Lücken bzw. Sprünge aufweisen, die das Verständnis erschweren oder unmöglich machen. (Notwendige Informationen müssen den Lernenden gegeben werden.)

Eine häufig eingesetzte Unterrichtsmethode ist der fragend-entwickelnde Unterricht im Sinne des „sokratischen Prinzips“: Der Lehrende initiiert und steuert durch Fragen den Problemlöseprozess beim Lernenden und hilft ihm so, sich Wissen selbst anzueignen. Entdeckendes Lernen ist prinzipiell unabhängig von der Unterrichtsform. Es kann sowohl im überwiegend geleiteten als auch im vorzüglich schülerzentrierten Unterricht praktiziert werden. Kennzeichnend für entdeckendes Lernen ist allein die Tatsache, dass der Lehrer den Schülern so weit wie möglich die Chance gibt, selbständig Erkenntnisse zu gewinnen. Entdeckendes Lernen muss einen gewissen Grad an selbstgesteuertem Lernen enthalten. Es erfordert daher ausreichend Zeit und muss den Schüler/innen auch „Irrwege“ und „Sackgassen“ erlauben. Zur wichtigsten Aufgabe des Lehrers gerät die Planung und Gestaltung einer Lernumgebung, welche es den Schülern gestattet, so selbständig wie möglich einen persönlichen Prozess der Wissenserweiterung zu durchlaufen. Die Schüler sollen sich in einer aktiven Auseinandersetzung mit dem Lehrstoff Methoden zum Problemlösen selbst erschließen. Es liegt daher grundsätzlich in der Verantwortung des einzelnen Lehrers, geeignete Unterrichtsformen einzusetzen, um die angestrebten Ziele zu erreichen. Dabei sind die Klassensituation, die zur Verfügung stehenden Mittel und Zeitressourcen, und vieles andres mehr zu berücksichtigen. Ist gnetischer Mathematikunterricht gleichzusetzen mit entdeckendem Lernen?

Die in dieser Dokumentation vorgestellten Unterrichtssequenzen sind Beispiele für genetischen Mathematikunterricht im Sinne der oben angeführten Gedanken.

2 EXPONENTIELLE VORGÄNGE

2.1 Zielsetzungen und Begründungen

2.1.1 WAS sollen Schüler/innen können?

Die Ziele der Unterrichtssequenz liegen im Bereich des Grundwissens über Exponentialfunktionen und in der Modellbildung, der in diesem Stoffgebiet besondere Bedeutung zukommt.

(a) Die Schüler/innen sollen die wesentlichen Eigenschaften von Exponentialfunktionen im Sinne der von G. Malle [2] vorgestellten Grundvorstellungen kennen:

- Exponentielles Wachsen (Abnehmen) bedeutet: Gleiche Zunahme der Argumente bewirkt gleiche prozentuale Zunahme (Abnahme) der Funktionswerte.
- Eine Exponentialfunktion hat die Termdarstellung $f(x) = c.a^x$ mit $c \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$.
- Der Graph einer Exponentialfunktion soll für $a>1$ und $0<a<1$ skizziert werden können.
- Die Graphen von $f(x) = c.a^x$ und $g(x) = c.a^{-x}$ liegen symmetrisch zur zweiten Achse.
- Die Konstante c ist der Funktionswert an der Stelle 0.

(b) In der Modellbildung spielt der Zusammenhang zwischen Alltagssprache und mathematischer Formelsprache eine entscheidende Rolle. Ausgangspunkt ist eine Situation aus der realen Welt, die idealisiert, d.h. vereinfacht bzw. strukturiert wird zu einem realen Modell der Situation. Dieses reale Modell wird mathematisiert, d.h. in die Sprache der Mathematik übersetzt, und führt so zu einem mathematischen Modell der ursprünglichen Situation. Berechnungen innerhalb dieses Modells erbringen mathematische Resultate, die im realen Modell interpretiert werden müssen. Bei einer nicht befriedigenden Problemlösung wird dieser Prozess erneut durchlaufen.
Neue Möglichkeiten - vor allem beim Arbeiten mit rekursiven Modellen - ergeben sich durch den Einsatz von CAS-Taschenrechnern (z.B. TI 92) bzw. durch das Arbeiten mit Computern und der Verwendung der Tabellenkalkulation. Die Schüler/innen sollen:

- Diskrete (rekursive und explizite) und kontinuierliche Modelle für Wachstumsvorgänge erstellen können.
- Die Vor- und Nachteile von diskreten und kontinuierlichen Modellen erkennen.

- Die Grenzen der Modelle erkennen und die Notwendigkeit der Verbesserung der Modelle einsehen.

- In verschiedenen Anwendungssituationen das passende Modell finden und die Wahl des Modells begründen können.

2.1.2 WARUM sollen die Schüler/innen diese Inhalte lernen?

Der Bereich „Exponentialfunktionen, Wachstums- und Abnahmevorgänge“ ist im Lehrplan der 6. Klasse neben der Trigonometrie das Kapitel, das die Leitlinien für die Inhaltswahl im Sinne des Grundbildungskonzeptes am besten erfüllt:

- Weltverständnis:
Die verschiedenen Konzepte der Modellbildung stellen Basiskonzepte der Mathematik dar, die auch in den anderen Naturwissenschaften große Bedeutung haben.

- Alltagsbewältigung/Gesellschaftsrelevanz:
Exponentielle Vorgänge spielen in den Naturwissenschaften eine große Rolle. Wachstumsvorgänge in der Biologie, radioaktiver Zerfall, aber auch finanzmathematische Anwendungen sind relevante Beispiele. Allerdings kommen auch diese Aufgabenstellungen nicht aus der Erfahrungswelt der Schüler/innen, sodass von vornherein nicht die Bereitschaft vorausgesetzt werden kann, sich mit diesem Themenkomplex zu beschäftigen.

- Wissenschaftsverständnis:
Durch die Modellbildung im Bereich der Wachstumsvorgänge kann Einsicht in mathematisches und naturwissenschaftliches Denken und Arbeiten vermittelt werden. Die Diskussion der Grenzen bzw. der Begrenztheit der Modelle zeigt die Möglichkeiten und die Probleme der Simulation der Wirklichkeit durch mathematische Modelle.

- Studierfähigkeit:
Grundlegende Kenntnisse über Exponentialfunktionen werden in vielen – nicht nur in naturwissenschaftlichen – Studienrichtungen benötigt bzw. vorausgesetzt.

2.2 Die Rahmenbedingungen

2.2.1 Themenstellung und Zeitrahmen

Das Projekt wurde von Ende Jänner bis Mitte März 2003 in der 6gR-Klasse durchgeführt. Insgesamt wurden 14 Unterrichtseinheiten dafür verwendet. Die Projektzeit war zweimal - Semesterferien und Wien-Aktion – für eine Woche unterbrochen, auch die dritte Schularbeit im 1. Semester fiel in diese Zeit hinein. Das Projektthema wurde aus den oben genannten Gründen von mir gewählt, die Schüler/innen waren in die Themenfindung und die Planung nicht eingebunden. Das Projekt sollte möglichst nahtlos in das laufende Unterrichtsjahr eingebunden sein und der realen Schulsituation entsprechen. Die zeitliche Ausdehnung erschwerte die kontinuierliche Arbeit. Auf eine Verschiebung wurde bewusst verzichtet, denn solche zeitliche Rahmenbedingungen sind einer realistischen Schulsituation adäquat. Erschwerend auf die Unterrichtsarbeit wirkte sich auch die Tatsache aus, dass von den vier Wochenstunden drei am Ende eines Vormittags lagen. Den Schüler/innen war natürlich bekannt, dass in diesen Wochen ein Projekt im Rahmen von IMST² lief. Sie wurden vermehrt zu Rückmeldungen (schriftlich und mündlich) aufgefordert, die zu meiner eigenen Reflexion und der der Schüler/innen herangezogen wurden.

2.2.2 Die Schüler/innen

Das Realgymnasium an unserer Schule leidet in den letzten Jahren unter zunehmendem Schülerschwund. In der 6gR-Klasse sitzen vergleichsweise wenige Schüler/innen, wodurch die besondere Situation einer permanenten Arbeit in der Kleingruppe entsteht. Dies bietet einerseits die Möglichkeit einer sehr individuellen Betreuung für die einzelnen Schüler/innen, andererseits macht sich – zufällig - das Fehlen sogenannter „Zugpferde“ negativ bemerkbar.
Die Schüler/innen hatten großteils schriftliche Arbeitsaufträge allein oder in der Gruppe zu bearbeiten. Die Ergebnisse wurden gemeinsam besprochen und offene Fragen geklärt. Im Bereich der erweiterten Wachstumsmodelle war verstärkt Lehrerhilfe erforderlich. Diese Art zu arbeiten ist allerdings nur in der kleinen Gruppe möglich, in einer großen Klasse müssen die Methoden entsprechend angepasst werden. Die Wahl der geeigneten Methode kann nur vom Lehrer in Abstimmung mit der Klassensituation getroffen werden.

2.2.3 Die Hilfsmittel

In der betroffenen Klasse ist seit der 9. Schulstufe als Taschenrechner der TI 92 in Verwendung. Dieser bietet einige Vorteile - vor allem bei diskreten Modellen und bei der graphischen Darstellung - ist jedoch keine Voraussetzung für die Durchführung der vorgestellten Unterrichtssequenz. Alle mit dem TI 92 durchgeführten Arbeiten können auch mit einer Tabellenkalkulation am Computer erledigt werden. Bei den einzelnen Aufgaben wird daher nicht speziell auf das TI-Handling eingegangen. Steht weder ein geeigneter Taschenrechner noch ein Computer zur Verfügung, so ist es meiner Meinung besser, auf die erweiterten Wachstumsmodelle ganz zu verzichten.

2.3 Der Ablauf

Die Unterrichtssequenz ist in drei Phasen gegliedert:

- Erstellen von diskreten und kontinuierlichen Modellen für lineare Vorgänge.
- Erstellen von diskreten und kontinuierlichen Modellen für einfache exponentielle Vorgänge und Erarbeiten der Eigenschaften von Exponentialfunktionen.
- Erweitern der Modelle auf komplexere Vorgänge: begrenztes und logistisches Wachstum.

Vorbemerkung: Die ausgewählten Beispiele können natürlich durch gleichwertige Aufgaben ersetzt werden. Man findet in den gängigen Oberstufenlehrbüchern eine Reihe von geeigneten Beispielen, ebenso in der angeführten Literatur. Es ist mir allerdings nicht gelungen, Beispiele zu finden, die aus der Lebenswelt der Schüler/innen kommen und aus diesem Grund vielleicht besonders motivierend wirken.

2.3.1 Phase 1

Im Sinne der Thesen für genetischen Unterricht erfolgt der Einstieg über ein Beispiel, bei dem am Vorwissen der Schüler/innen - Kenntnis der Eigenschaften linearer Funktionen - angeknüpft wird. Zuvor wurde in einem Test abgefragt, wie weit diese Kenntnisse noch vorhanden sind. Die Testfragen lauteten:

Welche der folgenden Aussagen treffen auf lineare Funktionen zu?

	JA	NEIN
Eine lineare Funktion besitzt die Termdarstellung y = k.x + d.	X (5)	(0)
Der Graph einer linearen Funktion ist immer eine Gerade.	X (5)	(0)
Bei einer linearen Funktion sind die Funktionswerte zu den Argumenten direkt proportional.	(5)	X (0)
Bei einer linearen Funktion sind die Funktionswerte zu den Argumenten indirekt proportional.	(0)	X (5)
Die Steigung k ist gleich der Änderung der Funktionswerte bei Erhöhung des Arguments um eins.	X (3)	(2)
Die Steigung k ist gleich dem Verhältnis der Änderung der Funktionswerte zur Änderung der Argumentwerte.	X (2)	(3)
Jede Gerade lässt sich durch einen linearen Funktionsterm beschreiben.	(5)	X (0)
Die Konstante d gibt den Funktionswert an der Stelle null an.	X (3)	(2)
Gleiche Zunahme (Abnahme) der Argumente bewirkt gleiche Zunahme (Abnahme) der Funktionswerte.	X (5)	(0)

(Das X bezeichnet die jeweils richtige Antwort, die Zahlen in Klammer geben die Anzahl der Schüler/innen an, die jeweils JA bzw. NEIN angekreuzt haben)

Bsp. 1: *Eine Polarstation am Südpol hat einen Dieselvorrat von 10000 l. Der durchschnittliche monatliche Verbrauch beträgt 975 Liter. Erstelle ein Modell zur Beschreibung des Ölvorrats in Abhängigkeit von der Zeit, skizziere den Verlauf und beantworte folgende Fragen:*
a) Wie viel Öl ist nach 5 Monaten im Tank?
b) Wie lange reicht der Vorrat?

Bezeichnet man den Ölvorrat mit N(t) (t in Monaten), so finden die Schüler/innen rasch ein rekursives diskretes Modell:

N(0) = 10000, N(1) = 10000 – 975 = 9025, N(2) = 9025 – 975 = 8050, also:

$$N(t+1) = N(t) - 975 \quad \text{mit } N(0) = 10000$$

Erkenntnis:
Ein rekursives Modell ist eine Vorschrift, mit der man aus bereits bekannten Werten weitere Werte berechnen kann. Man braucht dazu eine Formel und einen Startwert. Mit dem Taschenrechner kann nach Eingabe der Formel eine Tabelle und eine graphische Darstellung erzeugt werden.

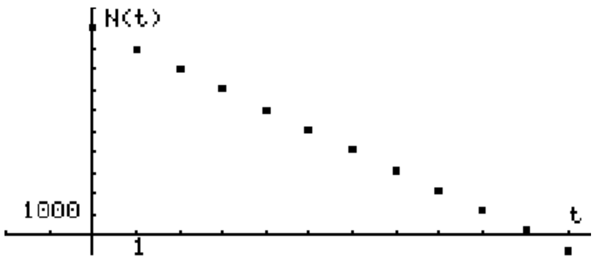
Nachteil des rekursiven Modells: Ein bestimmter Wert kann erst berechnet werden, wenn man alle davor liegenden Werte berechnet hat.

Wir erstellen daher ein diskretes explizites Modell:

N(0) = 10000, N(1) = 10000 – 975, N(2) = 10000 – 2.975.

Dies führt schließlich zu: $N(t) = 10000 - 975.t$ (t = 0,1,2, ...)

Die diskreten Modelle ergeben folgende graphische Darstellung:



Mit beiden Modellen ist Frage a) leicht zu beantworten, Frage b) jedoch nur näherungsweise. Da eine gleichmäßige Abnahme vorliegt, sollten die Schüler/innen erkennen, dass sich ein kontinuierliches Modell mit Hilfe einer linearen Funktion erstellen lässt:

$$N(t) = 10000 - 975.t \quad (\text{mit } t \in \Re_0^+).$$

Fragen:

Gültigkeitsbereich dieser Modelle? (Definitionsbereich für t)
Unter welchen Bedingungen ist die lineare Abnahme realistisch?
Ist die Verbindung der Punkte im kontinuierlichen Modell sinnhaft?

Zur Übung und Festigung werden weitere Aufgaben mit analogen Fragestellungen gelöst.

2.3.2 Phase 2

Die Schüler/innen können nach der Phase 1 die Unterschiede zwischen den einzelnen Modellen bzw. ihre Vor- und Nachteile beschreiben. Die Handhabung des Taschenrechners bzw. der Tabellenkalkulation stellt kein Problem dar.

Bsp. 2: *Ein Biologe beobachtet, dass der Inhalt der Fläche, die eine Zellkultur auf einer Nährlösung einnimmt, sich in jeder Stunde um ca. 45% vergrößert. Erstelle Modelle zur Beschreibung der Größe der Fläche A(t) in Abhängigkeit von der Zeit, wenn die Kultur zu Beginn der Beobachtung eine Fläche von 10 cm² einnimmt.*

Wir beginnen wieder mit dem <u>rekursiven diskreten Modell</u> (t in Stunden):
$A(0) = 10$; $A(1) = 10.1{,}45 = 14{,}5$; $A(2) = A(1).1{,}45 = 21{,}025$; ...
also:

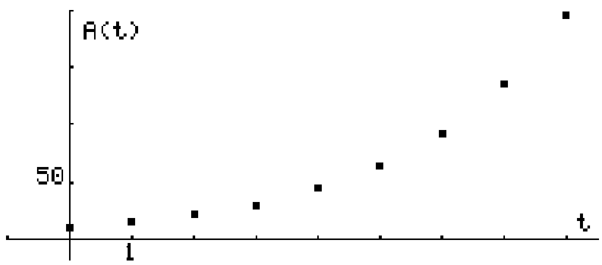
$$A(t+1) = A(t).1{,}45 \quad \text{mit } A(0) = 10.$$

Im nächsten Schritt gehen wir zum <u>diskreten expliziten Modell</u> über:
$A(0) = 10$; $A(1) = 10.1{,}45$; $A(2) = A(1).1{,}45 = A(0).1{,}45^2$;
$A(3) = A(2).1{,}45 = A(0).1{,}45^3$.

Dies führt schließlich zu

$$A(n) = 10.1{,}45^n \quad (n = 0,1,2, ...)$$

Mit beiden Modellen erhält man folgenden Graphen:



Es bleiben folgende Fragen zu diskutieren:
(1) Wie realistisch sind die berechneten Ergebnisse für größere Zeiträume?
(2) Welche Werte nimmt der Flächeninhalt für nichtganzzahlige Zeitpunkte an? Anders formuliert: Soll (darf) man die Punkte im Graphen verbinden und wenn ja, wie? Dieser zweite Aspekt wird in [1] ausführlich behandelt.

Analoge Fragestellungen werden an Hand eines weiteren Beispiels behandelt.

Bsp. 3: *Der Zerfall des radioaktiven Elements Barium 140 wird über einen längeren Zeitraum beobachtet. Man stellt fest, dass an jedem Tag 5,4% der zu Beginn des Tages vorhandenen Menge zerfallen. Erstelle Modelle zur Beschreibung der Bariummenge N(t) in Abhängigkeit von der Zeit, wenn zu Beginn der Beobachtung 10 mg vorhanden sind.*

In beiden Beispielen führt das „glatte Modell“, d.h. die Anwendung der Formel des diskreten expliziten Modells auch für nichtganzzahlige Zeitpunkte zu einem neuen Funktionstyp, der Exponentialfunktion.

Definition: Eine reelle Funktion f mit $f(x) = c.a^x$ ($c \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+$) heißt Exponentialfunktion.

Im Weiteren werden die typischen Eigenschaften einer Exponentialfunktion hergeleitet:

- Exponentielles Wachsen (Abnehmen) bedeutet: Gleiche Zunahme der Argumente bewirkt gleiche prozentuelle (relative) Zunahme (Abnahme) der Funktionswerte.

- Die Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ ist
  - streng monoton steigend für a>1.Der Graph ist umso steiler, je größer a ist.
  - streng monoton fallend für 0<a<1. Der Graph ist umso flacher, je größer a ist.

- Die Graphen der Funktionen $f(x) = a^x$ und $g(x) = a^{-x}$ liegen symmetrisch zur y-Achse.

- Die Konstante c ist der Funktionswert an der Stelle null.

Im nächsten Schritt werden zu beiden Beispielen „Umkehraufgaben“ (also Aufgaben, die auf die Berechnung eines Zeitpunktes hinauslaufen) gestellt, die zu einem neuen, bisher allgemein nicht lösbaren Typ von Gleichungen (Exponentialgleichungen) führen.

Bsp. 2 (Fortsetzung):
Nach wie vielen Stunden bedeckt die Zellkultur eine Fläche von mindestens 50 cm²? In welcher Zeit verdoppelt sich der Inhalt der Fläche, die die Kultur bedeckt?

Bsp. 3 (Fortsetzung):
Wie lange dauert es, bis noch 1 mg Barium 140 vorhanden ist?
Wie groß ist die Halbwertszeit von Barium 140?

Damit wird die Einführung des Logarithmus begründet, wobei man sich auf die Definition des Logarithmus und ein Verfahren zur Lösung einfacher Exponentialgleichungen der Form $a^x = b$ beschränken kann.

(Bemerkung: Die Verwendung eines CAS gibt die Möglichkeit, den Logarithmus an dieser Stelle zu umgehen, wenn man derartige Gleichungen „direkt“ mit dem SOLVE-Befehl löst).

Da handelsübliche Taschenrechner meist zwei Logarithmus -Tasten ($\boxed{\text{LOG}}$ und $\boxed{\text{LN}}$) haben, stellt sich an dieser Stelle auch die Frage, wie man mit der Basiszahl e des Logarithmus naturalis umgeht. Einerseits ist ihre Einführung in der 6. Klasse nur schwer zu begründen - dies ist in der 7. Klasse im Rahmen der Differentialrechnung wesentlich leichter möglich - und sie ist zur Beschreibung der Wachstumsvorgänge auch nicht erforderlich. Andererseits entsteht durch die Verwendung der $\boxed{\text{LN}}$-Taste ein Erklärungsbedarf.

2.3.3 Phase 3

In Phase 3 werden Prozesse behandelt, die nicht mehr mit einfachen Exponentialfunktionen beschrieben werden können.

Bsp. 4: *Wir bringen in einem Raum 400 ml Wasser zum Sieden und lassen es anschließend abkühlen. Wir messen die Siedetemperatur, die Zimmertemperatur und alle zwei Minuten die aktuelle Wassertemperatur während des Abkühlvorgangs.*

Die experimentelle Durchführung erzeugt eine in den Naturwissenschaften alltägliche Situation: Man hat Messdaten vorliegen und versucht, ein passendes Modell zu finden. Die Schüler/innen sollen an Hand der Daten erkennen, dass ein geeignetes Modell zwei wesentliche Eigenschaften aufweisen muss:

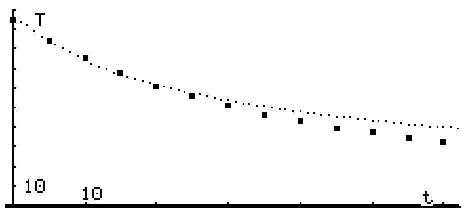
- Die aktuelle Temperatur darf nicht unter die Zimmertemperatur sinken, was bei Verwendung einer einfachen Exponentialfunktion unangenehmerweise der Fall wäre. Legt man mit Hilfe des Taschenrechners bzw. der Tabellenkalkulation eine Regressionskurve durch die Messpunkte, so kann man dies sehr anschaulich demonstrieren. Die Schüler/innen müssen dabei nicht wissen, wie die Regressionskurve berechnet wird. Es reicht als Begründung anzugeben, dass der Rechner versucht, eine Funktion zu ermitteln, die „möglichst gut" zu den Messwerten passt.

- Die Abnahme der Temperatur erfolgt zuerst rascher und verlangsamt sich umso mehr, je näher man der Zimmertemperatur kommt.

Damit kommt man zu einem rekursiven Ansatz, bei dem die Abnahme der Temperatur von der Differenz zwischen der aktuellen Temperatur und der Zimmertemperatur abhängt:

$$T(t+1) = T(t) - k.[T(t) - T_z] \quad \text{mit } T(0) = T_s$$

(T_z ... Zimmertemperatur, T_s ... Siedetemperatur)



Aus den Messwerten wird k berechnet, das Modell ergibt eine relativ gute Simulation der tatsächlichen Messwerte. Die Verwendung des TI 92 (bzw. der Einsatz einer Tabellenkalkulation) ermöglicht die Beschränkung auf das rekursive Modell. Man kann auf eine funktionale Darstellung verzichten, die ohne Ableitung vorgegeben werden müsste. Für die Messung und Auswertung dieses Beispiels ist allerdings mindestens eine Doppelstunde erforderlich. (Nach einer Stunde Messzeit lag die Wassertemperatur noch immer über 30°C).

Bei einem weiteren Beispiel kann ein analoges Modell für einen Wachstumsvorgang verwendet werden:

Bsp. 5: *Ein Ökosystem verträgt maximal 2000 Exemplare einer Tiergattung. Der jährliche Zuwachs ist ein fester Prozentanteil des jeweils noch bestehenden Freiraumes. Erstelle eine Prognose für die Anzahl der Tiere an Hand eines geeigneten Modells.*

Die Aufgaben 4 und 5 sind Beispiele für ein Wachstum mit Beschränkung:

Die Änderungsrate ist proportional zum Freiraum, d.h.

neuer Bestand = alter Bestand + Zuwachs und:

der Zuwachs ist proportional zum jeweils letzten Freiraum.

Bsp. 6: *Eine Grippeinfektion breitet sich in einer Stadt mit 10000 Einwohnern aus. Zu Beginn sind 10 Personen infiziert, einen Tag später werden 15 Erkrankte registriert. Entwickle ein geeignetes Modell, das die Zahl der erkrankten Personen in Abhängigkeit von der Zeit angibt.*

Die Schüler/innen sollten erkennen, dass bei diesem Beispiel die Zunahme der erkrankten Personen nicht nur von der Zahl der noch gesunden Personen abhängt, sondern auch von der Zahl der bereits erkrankten Personen. Dies führt auf ein diskretes logistisches Wachstum:

Die Änderungsrate ist proportional zum Bestand und zum Freiraum, d.h.:

neuer Bestand = alter Bestand + Zuwachs und:

der Zuwachs ist proportional zum jeweiligen Bestand und zum jeweils letzten Freiraum.

$$N(t+1) = N(t) + k.N(t).[Z - N(t)] \quad (Z \text{ ... Maximalwert von } N)$$

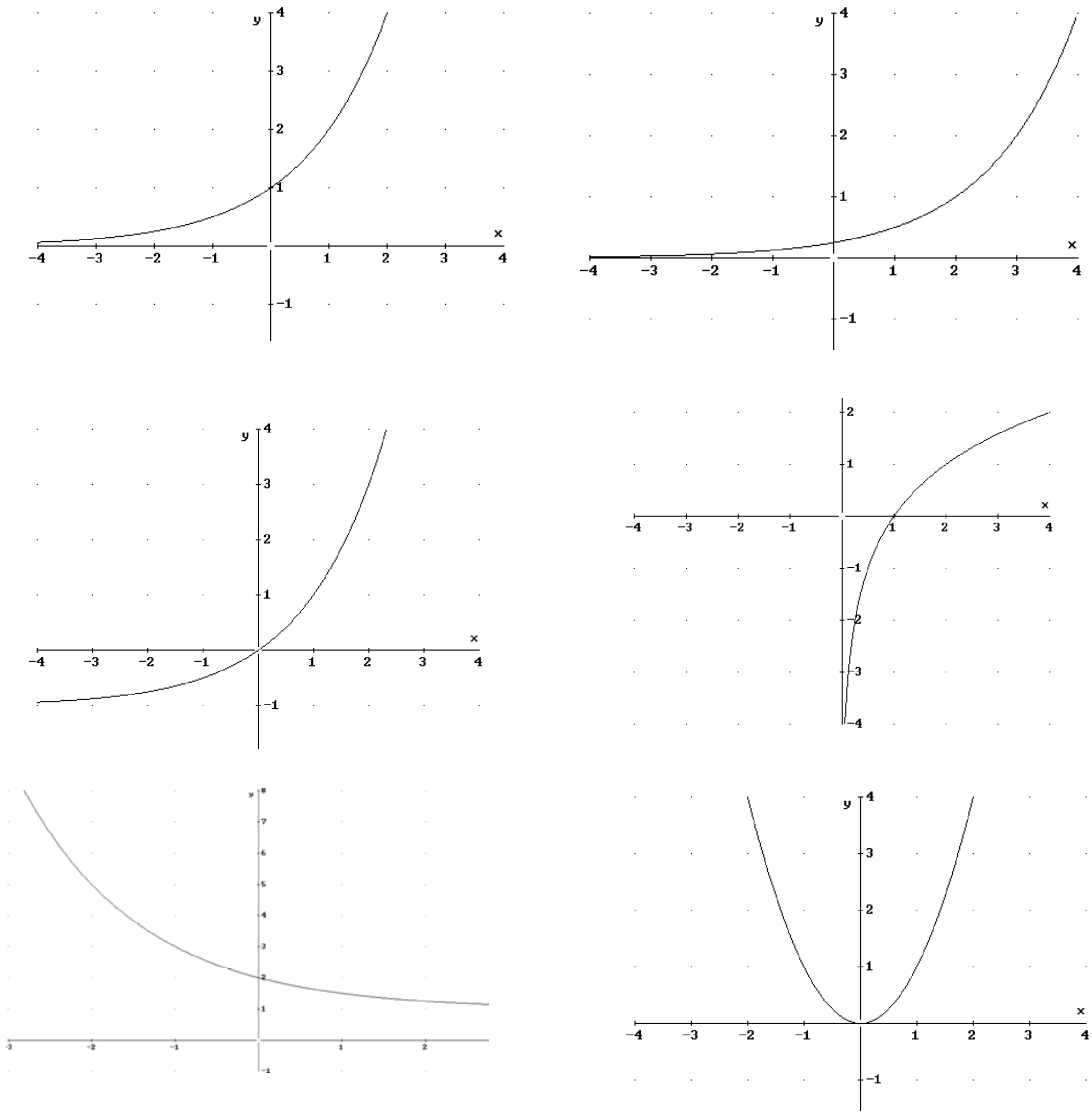
Entsprechende Aufgabenstellungen zur Überprüfung der Kenntnisse wurden bei der dritten und vierten Schularbeit eingebaut. Zusätzlich wurde etwa drei Wochen nach Abschluss dieser Unterrichtssequenz unangekündigt ein schriftlicher Test (ohne Benotung) durchgeführt.

2.4 Die Testaufgaben

- Was bedeutet exponentielles Wachsen?
- Der Zerfall einer radioaktiven Substanz wird über einen längeren Zeitraum beobachtet. Nach einer Stunde sind noch 96% der Anfangsmenge vorhanden. Wie viel Prozent des Stoffes zerfallen in der
  (a) 3. Stunde, (b) 10. Stunde des Beobachtungszeitraumes?
- In einer Bakterienkultur, in der zu Beginn der Beobachtung etwa 10000 Bakterien vorhanden sind, teilen sich die Zellen ungefähr alle drei Stunden.
  Wie viele Bakterien sind nach 12 Stunden vorhanden?
  Wann sind 640000 Bakterien vorhanden?
- Gegeben sei die Exponentialfunktion $f(x) = c.a^x$ $(c>0)$.
  (a) Welche Bedeutung hat c?
  (b) Skizziere den Verlauf von f(x) für (i) $a>1$, (ii) $0<a<1$.
  (c) Wie ändert sich der Graph von f(x) für $a>1$, wenn a zunimmt?

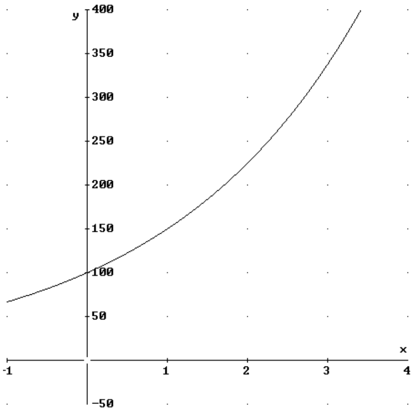
◎ Welcher der folgenden Graphen stellt die Funktion $f(x) = 2^x$ dar?

Zeichne bei diesem Schaubild den Graphen der Funktion $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ein.



◎ Die Abnahme einer Größe N in Abhängigkeit von der Zeit t wir durch das folgende rekursive Modell beschrieben: $N(t+1) = N(t) – k.[N(t) – Z]$.
Beschreibe das Modell in Worten. Welche Bedeutung hat die Größe Z?
Beschreibe allgemein den Unterschied zwischen einem rekursiven und einem expliziten Modell.

◎ Der abgebildete Graph stellt eine Exponentialfunktion der Form $f(x) = c.a^x$ dar. Bestimme c und a!



2.5 Ergebnisse und Reflexion

Die folgenden Punkte sollen ein Resümee aus Lehrer- und Schülersicht darstellen, wie es sich aus Gesprächen im Unterricht, aus der Auswertung der Testaufgaben und aus schriftlichen und mündlichen Rückmeldungen der Schüler ergeben hat.

- Die verwendeten Aufgaben sind zwar relativ praxisnah, was von den Schüler/innen durchaus geschätzt wird, sie kommen aber nicht aus ihrer Erfahrungswelt. Daher müssen sie zur Beschäftigung mit diesen Aufgaben erst motiviert werden, was nur teilweise gelungen ist. Im Sinne des sokratischen Prinzips bedeutet dies: Fragen werden erst gestellt, wenn man ein Problem hat, für das man überhaupt eine Lösung haben will.
  Einige Zitate aus schriftlichen Rückmeldungen:
  „Ich finde das Thema Wachstumsvorgänge an sich ziemlich interessant. Ich finde, dass man Wachstumsvorgänge im „normalen“ Leben kaum braucht. Das Thema hat zwar viel Bezug zum wirklichen Leben, aber ich glaube, man wird es kaum selbst anwenden.“
  „Ich fand die Wachstumsfunktionen einigermaßen interessant. Die vielen praktischen Anwendungen (Altersbestimmung, atomarer Zerfall, Seuchenausbreitung) machten das Ganze etwas greifbarer.“
  „Für mich eigentlich uninteressant und dadurch auf längeren Zeitraum schwer zu merken.“

- Das Aufstellen der Modelle klappte recht gut. Vor allem diskrete rekursive Modelle bieten einen Zugang, der den Schüler/innen leicht fällt. In diesem Zusammenhang ist die Verwendung von CAS positiv zu sehen. Sie ermöglichen bei komplexeren Problemen eine Beschränkung auf das rekursive Modell und bieten eine komfortable graphische Darstellungsmöglichkeit, die sicherlich zu einem besseren Verständnis beitragen kann. Rückmeldungen von Schüler/innen:

„Eigentlich einfach zu lernen, wenn man überhaupt lernte.“
„Exponentialfunktionen: nicht schwer, mit der Zeit fad.“
„Nicht schwer zu kapieren, eigentlich leicht.“
„Ohne TI wäre dieses Thema um einiges schwerer.“
„Dabei war der TI 92 ein unabdingbares Hilfsmittel.“

- Die Durchführung des Versuchs zur Temperaturmessung wurde von allen Schüler/innen positiv bewertet. Zitat: „Der Versuch mit dem kochenden Wasser war eigentlich schon interessant, allein schon deswegen, weil wir überhaupt in Mathematik einen Versuch gemacht haben.“ Die realistische Ausgangssituation wirkt motivierend, die Erinnerung daran bleibt länger im Gedächtnis haften. Diesen Vorteilen steht der relativ große Zeitaufwand für diese eine Aufgabe gegenüber.

- Die Berechnung exponentieller Wachstums- und Zerfallsvorgänge wurde bei den beiden Schularbeiten in diesem Zeitraum zufriedenstellend ausgeführt. Hingegen fiel es den Schüler/innen schwer, Modelle in Worten zu formulieren. Manche zeigten in diesem Punkt eine regelrechte Verweigerungshaltung, indem sie bei der Schularbeit derartige Aufgaben einfach übergingen, obwohl sie damit von vornherein eine schlechtere Benotung in Kauf nehmen mussten.

- Trotz der ausführlichen Behandlung und häufigen Wiederholung der wesentlichen Punkte ist es nicht ausreichend gelungen, die Kenntnisse dauerhaft zu sichern. Die Testfragen wurden nur unzureichend beantwortet und teilweise wesentlich schlechter gelöst als ähnliche Aufgaben bei den Schularbeiten wenige Wochen zuvor. Dabei spielte sicher die Testsituation - unangekündigt, letzte Unterrichtseinheit, keine Benotung - auch eine wesentliche Rolle.

- Die „Zerstückelung“ der Unterrichtssequenz (siehe 2.2.1) wirkte sich negativ aus. Sie wurde aber, wie bereits oben erwähnt, bewusst nicht vermieden, weil dies der Unterrichtsrealität entspricht.

- Zur Sicherung der Grundkenntnisse muss für ihre Erarbeitung noch mehr Zeit als bisher investiert werden. (Woher soll sie kommen?) Regelmäßige Wiederholungen und Überprüfungen (z.B. in Form von genau deklariertem Grundwissen, das bei jeder Schularbeit abgefragt werden kann) könnten vielleicht eine Verbesserung bringen. Gibt es vielleicht auch noch andere Möglichkeiten? Entsprechende Versuche werden im kommenden Schuljahr gemacht werden.

- Schriftliches Begründen von Rechenansätzen und Rechenschritten muss, wenn es der Lehrstoff ermöglicht, mehr als bisher geübt, gefordert und gefördert werden.

3 BRÜCHE UND DEZIMALZAHLEN

Primäre Zielgruppe dieses IMST²-Projektes sind Schüler/innen der Oberstufe. Die Problematik der Erarbeitung eines Grundwissenkatalogs trifft aber auf Schüler/innen der Unterstufe in genau gleicher Weise zu. In gebotener Kürze seien hier einige Aspekte des genetischen Mathematikunterrichts in einer ersten Klasse AHS aufgezeigt.

3.1 Einführung der Bruchzahlen und die Verbindung mit den Dezimalzahlen

Den Schüler/innen, mit denen hier der Begriff der Bruchzahlen und erste mathematische Arbeitsschritte mit Brüchen erlernt werden sollten, war das Rechnen mit Dezimalzahlen (Grundrechnungsarten und deren Verbindung) bereits bekannt. Außerdem können gewisse sprachliche Vorerfahrungen zum Thema Brüche aus dem Alltagswissen und der Volksschulmathematik vorausgesetzt werden. (Die Hälfte von…, Viertelstunde, Zehntel, Hundertstel…).

Zunächst sollten bei dieser Unterrichtssequenz Grundvorstellungen zu Bruchzahlen erarbeitet bzw. vertieft werden. Dazu wurden einige wenige Bruchzahlen in möglichst vielfältiger Gestalt dargestellt und ihr Wert sozusagen objektiviert. Dabei ließ ich mich von den Vorerfahrungen der Schüler/innen ebenso leiten wie von ihren Möglichkeiten, geometrische Objekte exakt zu konstruieren. Bruchzahlen wurden als Strecken-, Flächen- und Raumteil dargestellt. Hier waren Kreativität und Fantasie gefragt. Die Ästhetik bunter Darstellungen und die Verwendung des Zirkels als Arbeitsgerät waren hier sehr motivierend. Darüber hinaus wurde die Lebenswelt der Schüler/innen nach weiteren Anwendungsmöglichkeiten von Bruchzahlen hin durchsucht. Als Beispiele seien hier die musikalische Notenschrift, Mengenangaben bei Getränken und einfache Kochrezepte erwähnt. Zeitlich weniger aufwendig, aber nicht weniger wichtig war der umgekehrte Vorgang: Von der objekthaften Darstellung usw. einen quantifizierenden Wert als Bruchzahl abzuleiten. Eine einfache Anwendungsmöglichkeit, Sachverhalte mit Hilfe von Bruchzahlen auszudrücken, bietet sich in jeder Schulklasse, wenn man relative Anteile so darstellt. Z.B.: Welcher Bruchteil der ganzen Klasse trägt heute ein grünes Kleidungsstück?

Erste mathematische Operationen, die mit Brüchen durchgeführt werden können, traten so in zunächst spielerischer Weise auf: Der Wert von Bruchzahlen wurde verglichen und wir konnten versuchen, mehrere Brüche ihrer Größe nach zu ordnen. Dies führte von der Bindung an konkrete Objekte hin zu größerer Abstraktion. Brüche erschienen den Schüler/innen als „neue“ Zahlen. Gleiche Werte konnten als Bruchzahlen in verschiedener Gestalt auftreten. Die Prozesse des Kürzens und des Erweiterns von Brüchen dienten gleichsam der Metamorphose von Zahlen – für Schüler/innen gewiss ein erstaunlicher Vorgang. Neben der Technik des „Nenner Gleichmachens“ konnte hier auch die Transformation von Bruchzahlen hin zu gleichwertigen Dezimalzahlen eingeübt werden. Die Schüler/innen erlernten, dass der Zahlwert eines Bruches als Quotient von Zähler und Nenner angegeben werden kann. Bei der Umkehrung dieses Prozesses konnte ich mich in der ersten Klasse auf einfache Beispiele beschränken: Umwandlung von der Dezimalzahl hin zum

Dezimalbruch als Sonderfall und darüber hinaus nur die Anwendung einfacher, sich wiederholender Beispiele (etwa 0,25 = $\frac{1}{4}$ usw.). Es darf aber darauf hingewiesen werden, dass das Auftreten von periodischen Dezimalzahlen bei vielen Schüler/innen auf großes Interesse stieß.

Einen weiteren Arbeitsschritt stellten dann einfache Additionen und Subtraktionen von Bruchzahlen dar. Zur Vertiefung des Bruchzahlbegriffs trug hier bei, dass das Rechnen mit Brüchen simultan mit gleichwertigen Rechenaufgaben mit den gleichen Zahlwerten in ihrer Gestalt als Dezimalzahl durchgeführt wurde. Weiters wurden die Rechenaufgaben hier nicht nur abstrakt sondern wiederum „objektiviert“ durchgeführt: Die Zahlen traten etwa als Streckenlängen oder als Flächenteile in Erscheinung.

3.2 Eine besondere Aufgabensequenz: Bruchrechnen mit Stundenbruchteilen

Gewisse Stundenbruchteile sind den Schüler/innen aus dem Alltagsleben bekannt: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ Stunden. Über das kreisförmige Zifferblatt ist außerdem gewährleistet, dass Stundenbruchteile mit einer ausreichenden Sicherheit als Kreissektoren veranschaulicht werden können. Auf dem Hintergrund dieser Anschauung kann in der ersten Klasse auch die Umwandlung von Stundenbruchteilen in Minuten vorausgesetzt werden, sodass nur ein kleiner Schritt gemacht werden muss, um die Identitäten $\frac{1}{4}$ Stunde = 15 Minuten = $\frac{15}{60}$ Stunden usw. nachvollziehen und fortsetzen zu können.

Nachdem andere einfache Brüche bereits bearbeitet worden waren, konnte somit ohne weiteres danach gefragt werden, ob nicht auch andere Bruchteile einer Stunde auf diese Weise angeschrieben bzw. dargestellt werden könnten. Rasch wurden so im Alltag ungebräuchliche Brüche wie z. B. $\frac{1}{3}$ Stunde = 20 Minuten = $\frac{20}{60}$ Stunden, $\frac{1}{5}$ Stunde, $\frac{1}{6}$ Stunde usw. von den Schüler/innen entdeckt und als Kreissektoren gezeichnet. Über den einfachen Transfer von Stundenbruchteilen in entsprechende Minutenwerte gelang es leicht, diese „neuen“ Bruchzahlen der Größe nach zu ordnen. Dieser Tätigkeit kam zugute, dass die Zahl 60 so viele Teiler aufweist. Querverweise auf das Sexagesimalsystem und andere Zahlensysteme boten sich an.

Nach dem Ordnen und Darstellen der Stundenbruchteile konnten sehr bald einfache Rechnungen durchgeführt werden. Die Addition und die Subtraktion von Brüchen wurde auf diese Weise verhältnismäßig einfach in Angriff genommen: Es war dabei zunächst nicht unbedingt notwendig, dass die Begriffe des Kürzens und Erweiterns von Brüchen bewusst verstanden und angewendet werden konnten. Als gemeinsamer Nenner solcher Rechnungen bietet sich auf „natürliche“ Art und Weise die Zahl 60 an.

Z. B.: $\frac{1}{3}$h + $\frac{1}{4}$h = 20 min + 15 min = $\frac{35}{60}$h.

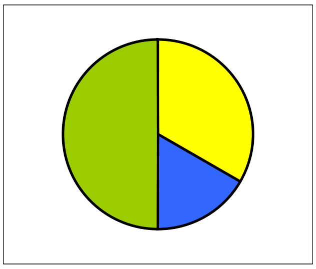
Oder: $\frac{1}{3}$h + $\frac{1}{6}$h = 20 min + 10 min = $\frac{30}{60}$h = $\frac{1}{2}$ h.

Auch beim zweiten angeführten Beispiel wird eigentlich nicht gekürzt, sondern eher die einfachere Darstellung der Summe (eine halbe Stunde) bevorzugt, „weil es eben so ist.“ Bei weiteren Aufgaben gingen wir zunehmend dazu über, nur die Brüche anzuschreiben. Der Zwischenschritt über die entsprechenden Minutenwerte konnte schriftlich weggelassen werden, obwohl diese weiterhin gedanklich den Leitfaden für unsere Überlegungen bildeten.

Nach diesen vorbereitenden Arbeitsschritten war der Boden bereitet für den Hinweis auf die uralte Technik des Rechnens mit Stammbrüchen. Gemeinsam suchten wir in der Schule nach solchen Stammbruchsummen, die genau 1 als Ergebnis aufweisen.

Z. B: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$.

Diese Bruchadditionen bzw. Summen lassen sich auch sehr leicht durch Kreisdiagramme veranschaulichen.

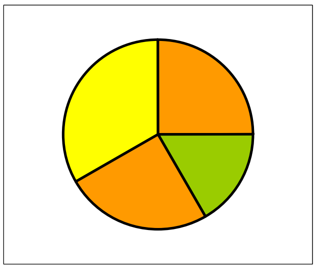


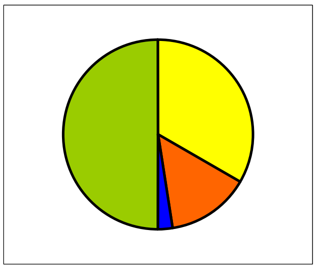
Die ersten Beispiele solcher Summen in der Schule hatten stets drei Summanden. Mit dem Beispiel: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ war somit der Wettbewerb für die Hausübung eröffnet: „Wer findet die meisten Stammbruchsummen mit genau vier Summanden, deren Summe gleich 1 ist?“ Hier handelt es sich zugegebenermaßen um eine recht künstliche Fragestellung – in unserer heutigen Welt. Allerdings bietet sich so auf einfache Weise die Möglichkeit zu einem Einblick in tiefere und kompliziertere mathematische Fragestellungen: Wodurch unterscheiden sich verschiedene richtige Lösungen? Ist es erlaubt, die Summanden zu vertauschen? (Liefert die Anwendung des Kommutativgesetzes neue Lösungen?) Wie soll man verschiedene Lösungen ordnen, um Vergleiche herstellen zu können? Wie kann man systematisch zu weiteren Lösungen der Aufgabestellung gelangen? Wie viele Lösungen gibt es überhaupt? (Es gibt 14 Lösungen mit paarweise verschiedenen Summanden!) Wieso kann man sicher sein, dass es nicht doch noch weitere Lösungsmöglichkeiten gibt?

Eine andere Blickrichtung bieten Fragen wie etwa: Was ist $\frac{1}{7}$ Stunde? Wie kann man dies mit Minuten oder Sekunden ausdrücken?

Zwei der Lösungen der obigen Aufgabe sind:

$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=1$ und $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}=1.$





Allerdings kann die letztgenannte Lösung von Schüler/innen der ersten Klasse kaum gefunden werden. Für Begeisterte ist die Aufgabenstellung sehr leicht vertiefbar, etwa indem man zu Summen aus fünf Summanden übergeht, oder indem man andere Summen als 1 anstrebt.

Natürlich wurden auch falsche Lösungen angeboten. Es stellte sich die Aufgabe der Kontrolle. Zunächst genügte es dabei stets auf 60 als gemeinsamen Nenner zurückzugreifen. Bei diesem Kontrollieren und Nachrechnen konnte schrittweise auf den Umweg über das Rechnen mit den Stundenbruchteilen entsprechenden Minutenwerten verzichtet werden. Wir erlernten und übten das Erweitern bzw. Kürzen von Brüchen. Schließlich konnten im Zuge einer weiteren Abstraktion des Rechenverfahrens verbale Rechenregeln formuliert werden. Die Addition und die Subtraktion von Brüchen wurde schrittweise weiter algorithmisiert. Dabei handelt es sich wohlgemerkt in der ersten Klasse zunächst um Vorformen der abstrakten Vorgehensweise späterer Jahre, zumal etwa Primfaktoren ja noch nicht bekannt sind.

Eine grundlegend andere Schiene für das erste Rechnen mit Brüchen bietet das Arbeiten mit Dezimalbrüchen und eine entsprechend stärkere Anlehnung an das Dezimalzahlsystem. Z. B. $\frac{3}{10}=\frac{30}{100}=0{,}3=0{,}30$ usw.

3.3 Die Testaufgaben

Nach dem Rechnen mit Dezimalzahlen stellte das Arbeiten mit Brüchen einen wesentlichen Schwerpunkt bei der vierten und letzten Schularbeit in diesem Arbeitsjahr dar. Hier seien einige der gestellten Übungsaufgaben aus der intensiveren Vorbereitungszeit bzw. von den Schularbeitsaufgaben selbst angeführt.

- Gib 5 Stammbrüche an und ordne sie nach ihrem Wert (<)
- Erkläre „Erweitern von Brüchen bedeutet...“. Gib drei eigene Beispiele an.
- Mache die Brüche $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{7}{10}$ und $\frac{8}{12}$ nennergleich und ordne sie der Größe nach.
- Wie groß ist die Summe dieser Brüche?
- Wandle die Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{6}{10}$ und $\frac{1}{7}$ in Dezimalzahlen um und stelle sie in Form einer Zeichnung dar.
- Stelle $\frac{3}{4}$ als Strecke, als Fläche und als Kreisteil dar.
- Berechne: $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} =$
- Berechne: $2\frac{1}{3} - 1{,}25 =$
- Berechne: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} =$

3.4 Resümee

Im Vergleich zu früheren Jahrgängen scheinen mir bei den Schüler/innen dieses Jahrgangs Bruchzahlen als eigene Denkobjekte gut verankert worden zu sein. Insbesondere dürfte sich der intensiver durchgeführte Transfer von Bruchzahlen zu geometrischen Darstellungen ihrer Werte und umgekehrt der Weg von Objekten hin zu Abstraktionen in Bruchzahlgestalt positiv ausgewirkt haben. Allerdings möchte ich nicht verhehlen, dass die Bereitschaft, sich von früher Bekanntem zu lösen und zu neuen Ufern aufzubrechen nicht bei allen Schüler/innen in gleichem und wünschenswertem Ausmaß gegeben schien. Als Beispiel einer typischen Fehlleistung gegen Ende dieser Unterrichtssequenz sei etwa der Lösungsversuch der letzten der obigen Testaufgaben in folgender Gestalt angeführt:

- $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} = 30 + 20 + 15 + 12 + 10 + 6 = 93$ min.

Dieses Beispiel ist aber sicherlich nicht dazu geeignet, genetischen Mathematikunterricht – wie er von mir und meinem Kollegen angestrebt wurde – grundsätzlich zu desavouieren. Vielmehr verstehe ich diesen Lösungsversuch als Hinweis darauf, wie genau man immer wieder darauf achten müssen wird, wie weit Schüler/innen in ihrem Nach-denken den angestrebten Gedankengängen ihrer Lehrer folgen können oder wollen. Die äußerlich vorgegebenen

Rahmenbedingungen unserer Schule scheinen dazu zu zwingen, stets auf hohes Lerntempo zu achten, wodurch von Schüler/innenseite oftmals geistig Unverdautes nur so weit wie unbedingt notwendig mitgeschleppt und vor einem ausreichenden Verdauungsprozess wieder abgelegt wird. Ist für den/die eine/n schon das Bruchzeitalter angebrochen und die wissensdurstige Bereitschaft zu weiterer Auseinandersetzung gegeben, so wundert sich der/die andere noch darüber, wieso hier vermeintlich Einfaches unnötig kompliziert ausgedrückt werden soll und ist – salopp gesagt – angespeist, weil sein offenbar richtiges und ökonomischeres Vorgehen nicht die entsprechende Würdigung durch bessere Benotung erfährt. In diesem Sinne bemühen wir uns weiter, Mathematikunterricht werden zu lassen.

4 LITERATUR

[1] Bürger, H., Fischer, R., Malle, G.: Mathematik, Oberstufe 2

[2] Malle, G.: Grundvorstellungen zu Funktionen

[3] Malle, G.: Genetisch in die Trigonometrie,
Vortrag beim IMST² S1 Workshop, 2002

[4] Lechner, J.: Wachstumsmodelle als Bausteine für systemdynamisches Modellieren, ACDCA-Materialien

[5] Nocker, R., Langmüller, C.: Wachstumsprozesse (rekursive Modelle), ACDCA-Materialien

[6] Malle, G.: Bruchrechnen 1. und 2. Klasse, Überlegungen zum Kernstoff.

[7] Weigand, H.-G.: Didaktische Prinzipien, Sommer 2000 – Auszug im Internet

[8] Kaiser, G.: Realitätsbezüge im Mathematikunterricht – Ein Überblick über die aktuelle und historische Diskussion, Schriftenreihe der ISTRON-Gruppe, Band 2