Fonds für Unterrichts- und Schulentwicklung
(IMST-Fonds)
S1 „Lernen und Lehren mit neuen Medien“

MODULARES ARBEITEN UND BLACK BOXES IM RAHMEN EINES MATHEMATIKUNTERRICHTS DER AHS-OBERSTUFE MIT *MATHEMATICA*

Markus Binder

BG/BRG Waidhofen an der Thaya

Waidhofen an der Thaya, im Juli 2007

INHALTSVERZEICHNIS

ABSTRACT

Der Computer bewirkt wesentliche Veränderungen im Mathematikunterricht. Eine zentrale Frage ist dabei, welche Aufgaben an die Maschine übergeben werden können oder sollen und welche didaktischen Möglichkeiten sich dadurch ergeben.

Die Sichtweise, dass der Computer einerseits reines Werkzeug im Unterricht sei, und dass andererseits operative Tätigkeiten sowohl mit der Hand als auch mit dem Rechner zu beherrschen seien, legt dem Unterricht unnotwendige Zwänge auf.

Im Rahmen dieses Projekts, das unter Verwendung von Mathematica *läuft, versuche ich verschiedene Möglichkeiten aufzuzeigen, wie man Tätigkeiten an den Computer auslagern und auch mit Nichtwissen redlich umgehen kann. Diese Überlegungen basieren auf einer veränderten, sehr differenzierten Art und Weise, wie mit dem Computer (in diesem Fall mit* Mathematica*) Mathematik betrieben wird.*

Schulstufe: 10.

Fach: Mathematik

Kontaktperson: Mag. Markus Binder

Kontaktadresse: BG/BRG Waidhofen an der Thaya
Gymnasiumstraße 1
3830 Waidhofen an der Thaya
markus.binder@schule.at

1 AUSGANGSSITUATION

1.1 Rahmenbedingungen für das Projekt

In diesem Bericht möchte ich zahlreiche Ideen aufgreifen, die Martin Dangl und ich im Schuljahr 2005/2006 in ein Vorgänger-Projekt eingebracht haben.[1] Zentral war dabei die Reflexion und Evaluation der eigentlichen unterrichtlichen Arbeit mit *Mathematica*; wir haben in diesem Projekt versucht, uns auf die Beobachtung dreier Bereiche zu konzentrieren, die wir für recht wesentlich im Unterrichtsgeschehen mit *Mathematica* halten: den Einsatz mathematisch-informatischer Konzepte, modulare Arbeitstechniken sowie die Unterlagenorganisation durch die Schüler.

Für das Projekt im abgelaufenen Schuljahr 2006/2007 habe ich versucht, den Aspekt der Modularität näher zu untersuchen, weil damit – wie ich glaube – einige wichtige Verbindungen zum Computerunterricht im Allgemeinen herzustellen sind. Das zweite Teilthema, die „Black Boxes“, greift die Fragestellung auf, was an Mathematik man überhaupt an den Computer übergeben sollte, und hängt bei näherer Betrachtung stark mit dem Modularitätsaspekt zusammen. Ich möchte im nachfolgenden Kapitel 2 versuchen, einige mir dafür als wesentlich erscheinende Überlegungen darzulegen.

1.2 Rahmenbedingungen für den Unterricht

Bei der Projektklasse handelt es sich um eine 6. Klasse Realgymnasium mit fünf Schülerinnen und 16 Schülern, von denen ein Teil bereits seit der ersten Klasse sporadisch mit Dynamischer Geometrie-Software bzw. mit DERIVE gearbeitet hat. Im abgelaufenen Schuljahr hat die Klasse ihr zweites Jahr mit *Mathematica* hinter sich gebracht und wird in zwei Jahren auch die Reifeprüfung mit *Mathematica* absolvieren.

Die vier Mathematikstunden wurden teilweise in einem Notebook-Sonderunterrichtsraum, teilweise in einem Informatiksaal abgehalten. Die infrastrukturellen Rahmenbedingungen sind dabei optimal: In den vernetzten Arbeitsräumen steht jeweils eine interaktive Projektionstafel zur Verfügung, und jeder Schüler[2] kann zu jedem Zeitpunkt einen eigenen PC nutzen. Privat haben alle Schüler sowohl Zugang zum Internet als auch einen PC mit einer *Mathematica*-Installation.

Eine wichtige technische Rahmenbedingung ist der Einsatz einer Lernplattform; sie weist eine unkomplizierte Handhabung auf und erfüllt die wesentlichen Anforderungen des Unterrichts. Es sind so der Austausch von Daten – Unterlagen, Hausübungen, Schularbeiten – und zusätzlich der Austausch diverser Informationen über Foren möglich. Die Realisierung in dieser Form hat gegenüber einer vergleichbaren Variante im Schulnetz den Vorteil, dass ohne großen Administrationsaufwand der Informationsaustausch für die Schüler auch von außerhalb der Schule möglich ist. Darüber hinaus hat sich in der Klasse auch die Verwendung von tragbaren Datenträgern eingebürgert, da die Anzahl der *Mathematica*-Dateien mittlerweile recht groß geworden ist.

---

[1] Siehe dazu auch den entsprechenden Projektbericht ([DaB06]).

[2] Um den satzbaulichen Rahmen des Textes nicht zu sprengen, sind mit „Schülern“ auch immer „Schülerinnen“ gemeint. Wo eine Unterscheidung zwischen „Schülerinnen“ und „Schülern“ notwendig ist, wird dies ausreichend klar formuliert.

Mathematica kommt nicht allein als Computeralgebrasystem[3] zum Einsatz, sondern spielt auch eine zentrale Rolle in der Dokumentation der Arbeit der Schüler. Das Programm bietet – über das gängige Ausmaß eines CAS hinausgehend – vielfältige Möglichkeiten zur Unterlagenerstellung und -gestaltung; dies reicht von Formatierungen und Gliederungen über Verlinkung von Dokumentstellen bis hin zum professionellen mathematischen Text- und Formelsatz. Der Hauptteil der Dokumentation wird von den Schülern in von mir zur Verfügung gestellten Arbeits- und Übungsskripten durchgeführt, daneben haben sich aber auch eigene elektronische Zusammenfassungen, Formelsammlungen und andere „Konzentrate" eingebürgert. Ein Teil der Schüler führt neben den elektronischen Aufzeichnungen auch eine Unterlagenmappe mit Ausdrucken und handschriftlichen Notizen. Die Organisation und Pflege der eigenen Unterlagen liegt vollständig in der Verantwortung der Schüler.

Durch das technische und organisatorische Umfeld ergeben sich automatisch bestimmte Arbeitsweisen im Unterricht. Neben notwendigen Frontalsequenzen treten häufig Phasen des freien Arbeitens – besonders auch mit experimentellem Charakter – sowie Partner- und Gruppenarbeiten auf. Oft arbeiten Schüler in Stunden an verschiedenen Inhalten; Rückmeldungen und Korrekturen durch den Lehrer ergeben sich in solchen Phasen meist durch Gespräche. Weitere Rückmeldungen entstehen über die Hausübungen, deren Organisation mit Hilfe der Lernplattform erfolgt: Die Arbeiten werden dabei nach Vereinbarung eines Abgabetermins von den Schülern hochgeladen und von mir korrigiert bzw. kommentiert. Auf diese Weise kann ich auch auf individuelle Bemerkungen und Fragen eingehen, welche die Schüler in ihre Arbeiten eingebracht haben.

Abschließend noch eine Bemerkung zur Situation in der Schule: Von Seiten der Schulleitung und Administration ist die notwendige Unterstützung vorhanden, sei es für allfällige technische Aufrüstungen oder punktuelle organisatorische Rücksichtnahme im laufenden Schulbetrieb. Durch meine Position als Netzwerkadministrator kann ich auftretende technische Probleme im laufenden Unterricht meist rechtzeitig abfangen bzw. lösen, wenn auch die Notwendigkeit dazu sehr selten gegeben ist.

---

[3] Im allgemeinen Sprachgebrauch hat sich der Begriff „Computeralgebrasystem" für die entsprechenden Programme bzw. Geräte im Schulunterricht eingebürgert. Ursprünglich ist ein CAS allerdings ein Programm, das (nur) symbolische mathematische Operationen durchführt (vgl. z. B. [Coh03], S. 1). Auch DERIVE ist kein reines CAS, wie Kutzler und Kokol-Voljc im Handbuch betonen: „DERIVE is a mathematical computer program. [...] The main strength of DERIVE are symbolic algebra and powerful graphics." ([KuK00], S. 1). Ich möchte die Arbeit mit den gängigen Programmen allgemein als „Arbeit mit dem Computer" bezeichnen, unabhängig davon, ob im konkreten Fall etwa DERIVE, Maple, Mathcad, *Mathematica*, MuPAD, oder der TI Voyage eingesetzt wird.

2 COMPUTER UND MATHEMATIKUNTERRICHT

Dass ein durchgängiger Einsatz des Computers den Mathematikunterricht nachhaltig und grundlegend verändert, ist hinlänglich bekannt. Ebenso liefern die vielfältigen grafischen und symbolischen Möglichkeiten des Computers ein weites Betätigungsfeld für kreativen Umgang mit Mathematik, wobei gleichzeitig eine Verlagerung des Schwerpunkts weg von operativen Tätigkeiten (diese kann der Computer übernehmen) hin zu argumentativen, interpretativen, beschreibenden und begründenden Tätigkeiten stattfindet. Diese Sichtweise ist nicht neu, und zum Thema „Computer im Mathematikunterricht" gibt es neben mehreren großen Projekten bereits zahllose Publikationen.

2.1 Die Rolle des Computers

Welche Rolle kommt dem Computer nun tatsächlich zu, und welchen Gewinn kann der Einsatz im Mathematikunterricht – abgesehen von den eingangs erwähnten Verschiebungen – abwerfen?

Tatsache ist, dass eine aktive Verbreitung des Computers für die Verwendung im Unterricht vor allem von zwei Gruppen forciert wird: Zum einen gibt es diejenigen Kolleginnen und Kollegen, die durch ihr Engagement und ihre Begeisterung für die Mathematik immer wieder Unterrichtsthemen auf neue, teilweise verblüffende Weise aufbereiten. Oft geht es um geometrische Zusammenhänge, und der Computer kann dabei sowohl die visuelle Veranschaulichung als auch den veritablen Aufwand an nötiger algebraischer Arbeit übernehmen. Es besteht in diesem Zusammenhang natürlich die Intention, weiteren interessierten Kolleginnen und Kollegen einen möglichst reibungslosen Einstieg in die Computer-Verwendung im Unterricht zu ermöglichen; die Multiplikatorenwirkung der bereits kompetenten Kolleginnen und Kollegen leistet hier ein übriges, eine zusätzliche Motivation, das eigene Wissen weiterzugeben, ist vielleicht auch die Tatsache, dass noch immer ein Großteil der Lehrenden an AHS dem Computer kritisch bis ablehnend gegenübersteht.

Dasselbe Ziel wie die als Multiplikatoren wirkenden Kollegen streben auch diejenigen Firmen an, welche einschlägige Programme bzw. Geräte vertreiben. Der Wunsch nach Neueinsteigern gilt für beide Gruppen, wenn auch aus unterschiedlichen Intentionen heraus. Von Herstellerseite versprechen Folder und Prospekte, dass die Mathematik mit dem jeweiligen Produkt leichter und besser zu verstehen sei als dies bisher möglich war; dass für Lernprozesse vorrangig die Kopfarbeit des jeweiligen Individuums notwendig ist, wird dabei nicht so direkt erwähnt. Um das leichtere Verstehen zu fördern, werden auch die Bedienungsoberflächen der Programme so gestaltet, dass sie für Schüler möglichst ansprechend erscheinen: Bei Handheld-Geräten werden wirklich erstaunlich viele Features aus den begrenzten Hardwaremöglichkeiten herausgeholt, und bei manchen PC-Programmen wird – damit ein Umstieg vom Handheld-Gerät kommend nicht so schwierig ist – eine diesem ähnliche Oberfläche nachgebaut. Ob insgesamt durch eine besonders „benutzerfreundliche" Schnittstelle das entsprechende Programm auch besonders leicht zu bedienen ist, sei dahingestellt. Ich werde auf diesen Punkt später noch einmal zurückkommen.

Insgesamt ergibt sich hier eine Frage zum Stand des „Computer-Gesamtprojekts": Was wurde bisher erreicht? Was sind die tatsächlichen Arbeitsschwerpunkte der vielen involvierten Kolleginnen und Kollegen? In diesem Sinne denke ich, dass der Computer ein Auslöser für einen Diskurs im größeren Rahmen sein sollte. Der Unterricht in der AHS-Oberstufe war bis jetzt immer von (eher bescheidenen) Rechen- und Darstellungsmöglichkeiten geprägt[4,5]; der Computer erweitert diese Möglichkeiten und kann dadurch zum Katalysator für einen Umdenkprozess werden, in dem auch die bisherigen Inhalte und didaktischen Konzepte des Unterrichts kritisch reflektiert werden sollten. Natürlich kann es nicht vorrangig um einen „besseren Unterricht" gehen, der noch dazu nur mehr mit dem Computer möglich ist, aber das gerade durch die eingeschränkten Rechenmöglichkeiten stark verzerrte Bild der Oberstufenmathematik könnte in einem allgemeineren Diskurs hinterfragt und relativiert werden. Ich denke, dass die Chance, die der Computer in dieser Hinsicht bietet, genutzt werden sollte.

2.2 Der Computer als Hilfsmittel, Werkzeug oder Medium?

Es ist zu beobachten, dass ganz allgemein der Unterricht mit dem Computer oft von vornherein in der Defensive ist; kritisiert wird dabei nicht die Tatsache der Innovativität, sondern der Computerunterricht an sich. Hier könnte ein allgemeiner Reflexionsprozess den Blickpunkt, von dem aus traditioneller Unterricht und Computer gesehen werden, relativieren. Meist sind nämlich die „Defizite", die Computer-Schüler gegenüber ihren traditionell ausgebildeten Kollegen ausweisen, recht leicht zu nennen (etwa fehlende operativ orientierte Fertigkeiten); der Gewinn, den Schüler durch den Computereinsatz mitnehmen, lässt sich hingegen eher schwer verkaufen. Der Mehrwert des „Neuen" wird nur allzu oft an traditionellen Kriterien gemessen („dieses und jenes müssen die Schüler aber schon noch können"). Die traditionalistische (nicht traditionelle) Forderung, dass Computer-Schüler übliche Inhalte beherrschen und zusätzlich noch Kompetenzen im Umgang mit dem Gerät aufweisen müssen, verschärft die Problematik noch weiter.

Ein weiterer Einwand kommt noch dazu: Viel gehe auf Kosten der „eigentlichen Mathematik" dadurch verloren, dass man die „Bedienung des Geräts" erst erlernen müsse. Dahinter steht die Ansicht, dass der Computer als reines Hilfsmittel[6] verwendet werde und dass das Arbeiten mit einem Programm in Form von richtigem Drücken der Knöpfe wohl oder übel erlernt werden müsse, aber mit der eigentlichen Mathematik nicht direkt zu tun habe; allenfalls wird den Schülern noch der Besitz einer graduell feststellbaren „Werkzeugkompetenz" zugebilligt. Teilweise wird auch versucht, diese Werkzeugkompetenz (sozusagen ohne Mathematik) zu testen.

Ich möchte dazu zwei Bemerkungen zum Mathematikunterricht anführen, die zum einen direkt mit Ideen von Roland Fischer zu tun haben und zum anderen eine Verknüpfung zu *Mathematica* erlauben, ja fast fordern. Zum Ersten: Die Arbeit mit dem Computer ist integraler Bestandteil mathematischen Tuns; somit ist das

---

[4] Mehr dazu zum Beispiel in [Fis06], S. 69.

[5] Man denke z. B. an die zahlreichen Rotationsaufgaben im Bereich der Kegelschnitte – der quadratische Term ist ideal (und notwendig!) für eine solche Integralberechnung. Eine Untersuchung von AHS-Reifeprüfungsaufgaben, die eine Arbeitsgruppe der AG Mathematik Niederösterreich durchgeführt hat, bestätigt diese inhaltliche „Kanalisierung" ([NN06]).

[6] Auch in fachdidaktischen Publikationen findet man diese Sichtweise. So betont z. B. Horst Hischer die Wichtigkeit der Auslagerung, weist aber gleichzeitig dem Computer als „Neues Medium" im Unterricht entweder die Funktion eines Unterrichtsmittels (Werkzeugs, Hilfsmittels) oder aber die Funktion eines Unterrichtsinhalts (Gegenstands des Unterrichts) zu ([His03], S. 77). Beide Sichtweisen widersprechen den Überlegungen in diesem Projektbericht.

Erlernen von *Mathematica* bereits Erlernen von Mathematik. Und zweitens: In der Arbeit mit dem Computer ist es weder sinnvoll noch möglich, mathematische und informatische Konzepte zu trennen; knapp formuliert: „Mathematik ist Informatik“.[7]

Dem Einwand, dass dabei mathematisches Denken in die Maschine „ausgelagert“ wird, ist nichts entgegenzuhalten. Im Sinne von Roland Fischers *Materialisierungsthese* ist dieser Prozess des Auslagerns immer schon ein wesentlicher Teil von Mathematik gewesen:

> *„Mathematik bietet für bestimmte, häufig auftretende Abstrakta symbolische materielle Darstellungsformen an, die das Abstrakte sichtbar, handhabbar und konkret werden lassen. [...] Es ist zwar vieles im Kopf möglich – Kopfrechnen, Ideenfindung – die eigentliche, insbesondere gesellschaftliche Wirksamkeit von Mathematik hängt aber mit der auslagernden Materialisierung zusammen.* ***In diesem Sinn ist der Computer kein Zufall in der Mathematik****, er ist bislang letzter Schritt in einer Serie von Materialisierungen.“* ([Fis06], S. 33, Hervorhebung von mir)

Damit ist dem „Hilfsmittelaspekt“ des Computers entschieden widersprochen; Roland Fischer schreibt dazu sehr deutlich:

> *„Auf der anderen Seite, was die materielle Darstellung von Abstraktem betrifft, ist der Computer prinzipiell nichts Neues. Die Auffassung, dass Mathematik etwas rein Geistiges sei und Computer 'nur' untergeordnete Hilfsmittel seien, ist [...] wohl nicht mehr aufrecht zu erhalten.“* ([Fis06], S. 68)

Und weiter:

> *„Der Computer ist eine neue Darstellung, er produziert aber auch neue Darstellungsarten. [...] In dem Ausmaß, in dem uns der Computer das regelhafte Operieren abnimmt, wird eine neue Kreativität in der Mathematik gefordert: Das Erfinden neuer Darstellungsformen.“* ([Fis06], S. 70f)

Die Konsequenzen der Materialisierungsthese für den Mathematikunterricht müssten im Detail überlegt und ausgearbeitet werden; vor allem aber können davon wesentliche Impulse und Orientierungen – auch Befreiung von traditionalistischen Zwängen – ausgehen und für eine produktive Diskussion über den Computereinsatz sorgen. Ich werde auf Roland Fischers Überlegungen später noch einmal zurückkommen, wenn es um „Black Boxes“ geht.

Warum sollte allerdings „Mathematik gleich Informatik“ sein? Ich möchte das ein wenig ausführen: Beim Arbeiten mit *Mathematica* kommt man – stärker als bei gängiger Mathematik-Software – mit vielen Techniken und Konzepten aus der Informatik in Kontakt; tatsächlich sind dies auch Konzepte der Mathematik: Umgehen mit Variablen (verschiedene Arten der Speicherung, lokal versus global, Übergabe von Variablen, Gültigkeitsbereiche), Arbeiten mit Listen, Erstellen von Programmen (Modulen), Arbeiten mit Funktionen usw. Mit *Mathematica* erlernt man eine sehr klar strukturierte Sprache, in der sich mathematische und informatische Konzepte gegenseitig überschneiden und ergänzen. Für die Unterrichtssituation ist wesentlich, dass man mit dem Programm auf höchst unterschiedlichen Niveaus umgehen kann; dies eröffnet ein breites Feld an Möglichkeiten für mathematische Tätigkeiten.

> *„Mathematik zu treiben besteht über weite Teile in einer Interaktion zwischen Mensch und Darstellung (auf dem Papier, am Bildschirm). Man verändert die*

[7] Siehe dazu [DaB06].

Darstellung, sieht sie an, verändert sie wieder, sieht sie an usw. usw." ([Fis06], S. 38)

Das Arbeiten mit *Mathematica* kommt dieser allgemeinen Beschreibung mathematischen Tuns sehr nahe. Gleichzeitig gibt es aber zwischen dem mathematischen Arbeiten auf dem Papier und dem mathematischen Arbeiten mit dem Computer keinen *prinzipiellen* Unterschied. Je feiner die Benutzerschnittstelle, je differenzierter die Interaktionsmöglichkeiten sind, desto unscheinbarer wird das oft als störend empfundene „Maschinenhafte" der Mathematik mit dem Computer, in gleicher Weise tritt aber auch das „Routinehafte" der „Papier-Mathematik" zu Tage.

Zum Abschluss möchte ich Sybille Krämer zitieren, deren Hinweis auf den Computer als *Medium* (nicht als Werkzeug) aus einem medientheoretischen Blickwinkel meiner Meinung nach recht treffend zu dieser Sichtweise einer differenzierten Interaktionsmöglichkeit passt:

> *„Apparate [d. s. Medien in Form technischer Geräte, z. B. der Computer] […] effektivieren nicht einfach das, was Menschen auch ohne Apparate schon tun, sondern erschließen etwas, für das es im menschlichen Tun kein Vorbild gibt – und das an diesem Tun vielleicht auch gar keinen Maßstab findet. Die Technik als Werkzeug erspart Arbeit; die Technik als Apparat aber […] ermöglicht Verfahren, die es ohne Apparaturen […] überhaupt nicht gibt."* ([Krä98], S. 84f.)

2.3 Was soll man noch händisch können?

Da der Computer allerdings einiges von dem, was Lehrende und Lernende mathematisch beherrschen, in kürzerer Zeit fehlerfreier erledigen kann, ergibt sich die Frage, welches Tätigkeitsfeld für den Unterricht übrig bleibt. Einige mögliche Zielsetzungen habe ich oben bereits angesprochen.

Welche operativen Tätigkeiten sollen aber von den Schülern trotzdem beherrscht werden? Auch hier wird oft mit traditionellem Maß gemessen: Schüler sollen alles „Alte", aber zusätzlich auch noch das Arbeiten mit dem Computer beherrschen. Im Falle des Falles, so wird argumentiert, solle man jede Aufgabe – wenn auch nur theoretisch, in beliebiger Zeit und Papiermenge – händisch bearbeiten können. Der große Vorteil des Computers liege damit vorrangig in der Befreiung von den zeitraubenden operativen Arbeiten. Mit dieser Ansicht ist man auch in „sozialer" Hinsicht auf der sicheren Seite: Es bietet sich wenig Angriffsfläche für den eigenen Computer-Unterricht, eine Änderung des didaktischen Zugangs zu mathematischen Themen ist nicht unbedingt notwendig, und die Wichtigkeit des operativen Arbeitens wird – trotz des „Befreiungsarguments" – nicht in Abrede gestellt.[8]

In der praktischen Unterrichtsdurchführung hat sich als didaktische Leitlinie im obigen Sinne das von Bruno Buchberger formulierte „White-Box/Black-Box-Prinzip" etabliert; Buchberger bietet eine Antwort auf die Frage, ob Mathematik-Lernende ein bestimmtes Gebiet X überhaupt noch erlernen müssen, wenn es einen effizienten Algorithmus zur Bearbeitung der Probleme dieses Gebiets gibt:

> *„In the stage where area X is new to the students, the use of a symbolic software system realizing the algorithms of arey X as black boxes would be a disaster [...]. Students have to study the area thoroughly, i. e. they should study problems, basic concepts, examples, hand calculations. In the stage where area X has*

[8] Vergleiche dazu [Pes99].

been thoroughly studied, when hand calculations for simple examples become routine and hand calculations for complex examples become intractable, students should be allowed and encouraged to use the respective algorithms available in the symbolic software systems." ([Buc89], S. 3f)

Dieses Prinzip wurde in der Folge aufgegriffen und in verschiedenen Variationen didaktisch ausgebaut (z. B. [HKL96]).

Ich möchte dazu einige Überlegungen festhalten: Prinzipiell ist eine Black Box im obigen Sinn gar nicht so „black", da sie zuvor immer erschlossen wurde; man hat in der Phase des händischen Rechnens genau die Verfahren eingeübt, die man dann den Computer durchführen lässt. Weiters hatten die Methoden der herkömmlichen Mathematik im Allgemeinen immer schon den Sinn von Rechenvorteilen (und hier kommt noch gar kein Computer ins Spiel): Für bestimmte Probleme mit entsprechenden – recht umständlichen – Lösungsverfahren hat man Abkürzungen entwickelt, zum Beispiel das Multiplizieren anstelle wiederholter Addition, die Formel $A = a \cdot b$ anstelle des Auslegens eines Rechtecks mit Einheitsquadraten, eine Lösungsformel für quadratische Gleichungen anstelle des Ausprobierens oder des Umformens auf vollständige Quadrate usw. Grundsätzlich steckt jedoch der ganze Vorgang komprimiert in der Abkürzung.

Man kann also entweder Transparenz oder aber Kompaktheit von einem Verfahren erwarten[9], beides zugleich ist schwer möglich. Dazu kommt noch etwas Anderes: Der Computer erlaubt oft auch die umständliche Variante. Man kann Gleichungen beliebigen Grades (ohne Formel) lösen, nicht-differenzierbare Funktionen auf Extremstellen untersuchen oder Flächeninhalte durch numerische Verfahren bestimmen. Zur praktischen Verwendung eignet sich damit jede Rechenprozedur, die im Computer formalisiert werden kann, wo hingegen die Mathematik vor dem Computer mit Funktionen auskommen musste, die im tatsächlichen Sinn „handhabbar" waren.[10]

Kann man nun mit dem Computer verfügbare Verfahren guten Gewissens einsetzen? Ich möchte dies bejahen. Viele bewährte Rechenvorteile werden durch den Computer obsolet, und eine Neubewertung von Wichtigkeiten muss zwangsläufig erfolgen (es ergeben sich neue Begriffe, Verfahren und Modelle). Zudem ist die Auslagerung von Problemen in Black Boxes geradezu einer der Wesenszüge der Mathematik, darin liegt sozusagen ihre Effizienz. Der Computer ist da nur der letzte Entwicklungsschritt. Ob es nun im konkreten Fall sinnvoller ist, die Stammfunktion von $f(x) = x^2 \cdot e^x$ händisch oder mit dem Computer zu ermitteln, hängt wohl davon ab, welcher Aufwand für das routinierte Beherrschen der Integrationsregeln verwendet wurde und welchen Stellenwert das Beherrschen der Integrationsregeln im eigenen Unterricht hat. Ich möchte allerdings bezweifeln, dass sich das Verständnis für die Bedeutung des Integralsbegriffs allein aus der Beherrschung dieser Integrationsregeln ergibt.

Abschließend noch zwei Zitate von Werner Peschek:

„Zum Verständnisbegriff gibt es einige Kubikmeter Literatur, ich greife nur einen mir wichtigen Aspekt heraus: Verständnis ist nicht etwas Absolutes, es ist immer relativ, kontextabhängig und zweckgebunden. Unbestritten tragen gewisse Algorithmen (wie auch Beweise) zum inhaltlichen Verständnis von

[9] Siehe dazu auch [Sch02], S. 242.
[10] Vergleiche zu diesen Überlegungen [Fis06] bzw. [Pes99].

mathematischen Begriffen und Konzepten bei – andere sind hingegen eher technischer Natur [...]. Ich wüsste keinen Weg, den Begriff der Gleichung plausibel zu erklären, wenn ich keine Gleichung händisch lösen darf." ([Pes99], S. 5)

Und weiter:

> *„Die mathematische Ausbildung sollte sich bei der Einführung wie auch bei der Anwendung mathematischer Konzepte zeitgemäßer Mittel bedienen; sie sollte insbesondere auch versuchen, operatives Wissen und operative Fertigkeiten an diese auszulagern, soweit dies didaktisch sinnvoll möglich ist. Sie hat darauf bedacht zu sein, die Lernenden*
>
> - *zur effizienten Nutzung von mathematischen black boxes*
> - *zur Beurteilung der Voraussetzungen, Reichweite und Grenzen der verwendeten black boxes*
> - *und zur Einsicht in die wissenschaftstheoretische wie auch gesellschaftliche Bedeutung der Verwendung mathematischer black boxes*
>
> *zu befähigen. Ich nenne dieses didaktische Prinzip 'Auslagerungsprinzip'."* ([Pes99], S. 12)

Zweifelsfrei erfordert das Zulassen von derartigen Black Boxes einen gewissen „Mut zur Lücke". Dennoch sollte man sich stets dessen bewusst sein, dass erstens der Absolutheitsanspruch des Wissens praktisch nirgendwo gegeben ist und dass zweitens eine lückenlose Rückführung von Wissen auf eine Art „fundamentales Letztwissen" ebenfalls unmöglich ist. Dies musste die Mathematik Anfang des letzten Jahrhunderts schmerzlich zur Kenntnis nehmen. In diesem Sinn kann das Transparentmachen, wie relativ Wissen in jedem Kontext ist, für den Unterricht nur positiv wirken.

2.4 Modularisierung

Die im vorigen Abschnitt angesprochenen Auslagerungen und Abkürzungen treten sowohl im traditionellen als auch im computergestützten Unterricht auf, wenn auch in unterschiedlicher Form. Es ist z. B. leicht einzusehen, dass das Hornersche Schema manchmal in kürzerer Zeit ein Ergebnis liefert als das entsprechende Eintippen der Rechenoperationen für das Polynom in den Taschenrechner. Dabei ist es gar nicht notwendig, über die „Funktionsweise" des Schemas Bescheid zu wissen (auch nicht darüber, dass Multiplikationen und Additionen im Allgemeinen leichter durchzuführen sind als Berechnungen von Potenzen; der Zusammenhang des Polynoms mit der „ausgeklammerten" Fassung wäre hier schon mehr als eine Zugabe). Es genügt, das Schema fehlerfrei durchführen zu können. In ähnlicher Weise wird man z. B. mit der Hesse'schen Normalform verfahren; selbst nach verstandener Herleitung und Kenntnis der Zusammenhänge muss man bei der Verwendung der Normalform nicht notwendigerweise jedes Mal an Projektionen denken. Es genügt, ein entsprechendes relatives Verständnis für den aktuellen Kontext zu entwickeln.

Mit der Verwendung des Computers werden solche Auslagerungen umso leichter möglich, man kann viele Inhalte als abgeschlossene Einheiten ansehen und etwa Unterprogramme oder Makros („Module") für deren Ausführungen implementieren. Teilweise stellen Programme bereits eine unüberschaubare Vielzahl entsprechend brauchbarer Module zur Verfügung. Im Grunde genommen hat hier die Informatik ähnliche Intentionen wie die Mathematik: Tätigkeiten, die in Algorithmen gefasst, also formalisiert werden können, können vom „Ganzen“ abgekapselt werden und bei Bedarf wieder benutzt werden. Der Gewinn besteht da wie dort z. B. in der Eigenständigkeit der einzelnen Module, ihrer vielfältigen Kombinierbarkeit und der reduzierten Gesamtkomplexität.

Welche didaktischen Möglichkeiten bestehen nun hinsichtlich der Modularisierung? Kann man auch andere Arten von Modularisierung ins Auge fassen? Ich möchte ein paar mögliche Ideen festhalten:

- Modularisierung als Auslagerung meist operativer Elemente zu „gedankenlosen“ Nutzung im obigen Sinn: Didaktisch gesehen gibt es mit Buchberger bzw. Fischer und Peschek zwei verschiedene Vorschläge, wie man mit dieser Art von Modularisierung umgehen könnte.
- Modularisierung von Inhalten im Sinn von Zusammenfassen und Abgrenzen, sozusagen als Gegenpol zur Vernetzung von Inhalten: Ein etwaiger Vorteil dabei ist eine flexible Anordnung von entsprechend modularisierten Themengebieten im Lauf eines Schuljahrs. Abgesehen von den eventuellen organisatorischen Vorteilen gibt dies meiner Meinung nach allerdings ein falsches Bild von Mathematik wieder; das willkürliche Ausklammern ganz bestimmter Zusammenhänge fördert sicherlich nicht das mathematische Verständnis der Schüler.
- Modularisierung im Sinn des Erstellens abgeschlossener Bausteine, um diese dann zu erforschen, neu zu kombinieren und gegebenenfalls an passender Stelle gewinnbringend einzusetzen: Eberhard Lehmann hat zum Beispiel Unterrichtssequenzen sehr genau untersucht, die auf der Verwendung von Bausteinen wie etwa **`binobau(a,b,n)=(a+b)`**^{n} basieren; diese Bausteine sollen von den Schülern sehr genau und systematisch analysiert werden, es sollen die einzelnen Parameter variiert und Kombinationen der Bausteine miteinander untersucht werden[11]. Dies alles suggeriert die Vorstellung, dass eine Erstellung von Modulen – wo auch immer dies möglich erscheint – eine sinnvolle didaktische Richtlinie darstellt. Ich kann mich dem nicht anschließen. Abgesehen davon, dass eine didaktische Nutzung von Modulen m. E. eher darin liegen sollte, eine weitere Entlastung von operativen Tätigkeiten zu erreichen, trägt das (fast mechanische) Hantieren mit solchen Modulen wohl wenig zum Verständnis mathematischer Grundbegriffe bei.[12]
- Modularisierung im Sinn des Findens von „kleinsten Bausteinen (Atomen)“: Eine Vorstellung dazu könnte sein, einen Gutteil gängiger Aufgaben aus dem Mathematikunterricht zu analysieren und in „Einzelteile“ zu zerlegen; eine mögliche „Einzelanforderung“ (also ein Baustein im obigen Sinn) könnte zum Beispiel „Normalvektor aufstellen“ oder „Erwartungswert berechnen“ sein. Diesen Baustein kann man entsprechend in verschiedenen Aufgaben an passender Stelle einsetzen, darüber hinaus lassen sich Kenntnis und Fähigkeit, die Bausteintätigkeit durchzuführen, leicht separat überprüfen. Didaktisch wird man allerdings meiner Meinung nach mit einem solchen Vorhaben scheitern, da die vorgeschlagene Sichtweise einerseits eine vollständige Kontextfreiheit verlangt (dies ist höchstens in einer rein operativ orientierten Aufgabe realisierbar), und andererseits nicht objektiv entscheidbar

[11] Siehe [Leh02].
[12] Siehe dazu auch [Sch02], S. 56-59.

(bestenfalls aushandelbar) ist, wie eine Liste entsprechender kleinster Bausteine auszusehen hat. Selbst wenn nun eine solche Liste vorliegt, ist noch nicht garantiert, dass damit alle möglichen (operativen) Aufgabenstellungen bewältigbar sind.

Im Zusammenhang mit *Mathematica* möchte ich lieber von Modularität als von (aktiver) Modularisierung sprechen. Die Konzeption des Programms ergibt fast automatisch eine bestimmte Arbeitsweise, mittels derer man mit dem Programm umgeht. Diese Arbeitsweise ist sicherlich als modular zu bezeichnen, hat aber – mit Ausnahme des ersten Vorschlags – keinen Zusammenhang mit den angeführten Arten von Modularität. Durch die Eigenschaften der Benutzerschnittstelle von *Mathematica* ergibt sich eine Art „natürliche Entschärfung“ der Black Box-Problematik. Ich möchte das im Folgenden kurz beschreiben.

2.5 Modulares Arbeiten mit *Mathematica*

Die Konzeption eines Programms bestimmt wesentlich, wie (und wie differenziert) man mit ihm umgehen kann. Abgesehen von der Gestaltung der grafischen Benutzeroberfläche besteht bei der Konzeption eines Programms eine wesentliche Entscheidung darin, wo die Grenze zwischen Objekt- und Meta-Ebene liegt, da diese Grenze die Menge derjenigen Elemente bestimmt, mit denen überhaupt operiert werden kann. Operable Elemente unterliegen den Regeln der Sprache, der Syntax des jeweiligen Programms, während dies Elemente der Meta-Ebene nicht tun.

Ich zitiere Stephen Wolfram, der die Philosophie von Mathematica so beschreibt:

> *„Mathematica handles many different kinds of things: mathematical formulas, lists and graphics, to name a few. Although they often look very different,* Mathematica *represents all of these things in one uniform way. They are all expressions.“* ([Wol03], S. 230)

Die interne Repräsentation von Ausdrücken bleibt allerdings nicht „privat“: Jeder Ausdruck in *Mathematica* hat eine Standardform, die prototypisch z. B. von der Art **`f[x,y]`** ist; ob es sich beim Ausdruck um eine Funktion g mit zwei Argumenten a und b oder um eine Addition in der Form **`Plus[1,2]`** handelt, ist von der Behandlung her gleichgültig. Dem Benutzer stehen sowohl die gängige Notation **`1+2`** als auch prinzipiell die Standardform **`Plus[1,2]`** zur Verfügung, wiewohl man in diesem Beispiel praktisch immer die erstere Notation verwenden wird. Obwohl alle Ausdrücke dieselbe Struktur aufweisen, sind sie doch in ihrer Verwendung unterschiedlich. Einige Ausdrücke repräsentieren Funktionen im klassischen Sinn (**`Cos[x]`**, **`f[4]`**), andere sind mit Operationen oder Algorithmen verknüpft (etwa **`Expand[(a+b)^2]`** zum Entwickeln oder **`Cancel[(x+1)/(x^2+2x+1)]`** zum Kürzen). Die Verwendung von Operatoren erfolgt meistens in der gängigen Weise, z. B. durch **`a=5`** oder **`x*y`**, hat aber immer eine Entsprechung in der Standardform (hier **`Set[a,5]`** bzw. **`Times[x,y]`**. Die Gleichheitsrelation könnte man sowohl in der Form **`x==y`** als auch durch **`Equals[x,y]`** schreiben.

Dies alles sieht auf den ersten Blick sehr kompliziert und für den Unterricht unhandlich aus. In der Diskussion stellt sich vielfach die Frage, inwieweit die Schüler im Erlernen der *Mathematica*-Sprache überfordert werden, und inwieweit darüber hinaus die eher einfachen Einsatzmöglichkeiten im Unterricht den relativ großen Aufwand des Einarbeitens in das Programm überhaupt rechtfertigen.

Diese allgemeinen Einschätzungen werden durch meine bisherige Erfahrung mit *Mathematica* im Unterricht nicht bestätigt. Das mag zu einem nicht unwesentlichen Teil daran liegen, dass die logisch sehr klar aufgebaute *Mathematica*-Sprache in ihrer Struktur sehr transparent und dadurch leicht durchschaubar ist.[13] Gleichzeitig bleibt es jedem Schüler weitgehend selbst überlassen, wie weit er selbst beim Erlernen dieser Sprache gehen möchte. Der Einstieg ist in jedem Fall sehr einfach: Man kann – ohne jegliche Einschulung – in *Mathematica* wie mit einem üblichen Taschenrechner arbeiten, und die wichtigsten Algebra-, Grafik- und Tabellenfunktionen stehen auch dem Einsteiger zur Verfügung.

Worin liegt nun die modulare Arbeitsweise? Durch die Vorgabe „everything is an expression“ gibt es für mathematische Elemente in *Mathematica* keine Trennung in Objekt- und Meta-Ebene. Mit jedem Ausdruck, egal, ob es sich um ein algebraisches, grafisches oder ein anderes Element handelt, kann operiert werden, jedes Ergebnis kann Teil eines folgenden Ausdrucks oder Operand einer folgenden Operation werden.[14] Der Zugriff auf jeden Teil eines Ausdrucks ist mit Mitteln der Sprache möglich, und kein Ergebnis einer Berechnung verlässt jemals die Objekt-Ebene. Die Elemente der Meta-Ebene sind gleichzeitig und ausschließlich Elemente der grafischen Bedienungsoberfläche. Sie haben den Zweck der Dokumentorganisation, greifen aber nicht auf Ausdrücke zu. Man kann zwar mit Tastatur oder Maus Teile von Eingaben oder Ausgaben kopieren, verschieben oder löschen, aber jede nächste Eingabe ist wiederum ein Ausdruck im Sinne des Grundkonzepts von *Mathematica*.

Wenn nun Schüler Aufgaben mit *Mathematica* bearbeiten, dann kommt es häufig vor, dass einzelne Arbeitsschritte oder auch ganze Teile einer Ausarbeitung wiederholt durchlaufen werden müssen, wobei sich von Fall zu Fall nur einzelne Parameter oder spezielle Einstellungen verändern. Mit dieser Tatsache kann man auf verschiedene Art umgehen. Die einfachste Variante dieser Arbeitsweise besteht darin, entsprechende Teile früherer Eingaben (Code, Text usw.) zu kopieren, an der gewünschten Stelle einzufügen und nach entsprechender Änderung erneut auszuwerten. Im ersten Moment klingt das sehr simpel und erscheint eher wenig mathematisch; analysiert man diese Tätigkeiten aber genauer, so erkennt man doch eine Reihe von mathematischen Kompetenzen:

- Sind Lösungsschritte überhaupt ähnlich?
- Welche Eingaben kann man erneut verwenden, welche Parameter sind anzupassen?
- Welche Zwischenergebnisse sind von den Änderungen betroffen?
- An welchen Stellen eines Lösungswegs können Eingriffe von außen (z. B. durch händische Eingabe von Werten) vermieden werden?

Kompetenzen auf etwas höherer Ebene sind zum Beispiel die folgenden:

---

[13] Dass syntaktische Fehler im Unterricht häufig auftreten, ist leicht einzusehen. Schüler werden aber, so zumindest meine Beobachtung, im Lauf der Zeit routinierter, was das Korrigieren solcher Fehler angeht. Das Korrigieren logischer Fehler ist hingegen ungleicher schwieriger; dieses Problem tritt allerdings nicht nur beim Arbeiten mit dem Computer auf.

[14] In anderen Programmen bzw. Geräten sind zum Beispiel grafische Darstellungsmöglichkeiten in die Meta-Ebene ausgelagert. In DERIVE etwa gibt es meines Wissens keine Möglichkeit, über Elemente der Sprache auf bereits erstellte Grafiken zuzugreifen. Insofern erfolgt ein Lernen hier in Form von „Programmlernen“: Man muss stets wissen, in welchem Menü und unter welchem Icon sich welches Modul verbirgt. Dieses spezielle Wissen ist keines von mathematischer Art.

- Kann man eine operative Vorgangsweise mit der **`Module[]`**-Funktion „verpacken“? Mit anderen Worten: Kann man eine bestimmte Aufgabe vollständig in die Maschine auslagern? Welche Parameter eines Problems sollten dabei „frei“ bleiben? Soll man überhaupt auslagern?
- Wie kann man das Zusammenspiel von Operieren und Darstellen, von Algebra und Geometrie verbessern?
- Wie kann man einen Lösungsweg optimieren?
- Gibt es eine kürzere Ausarbeitung?
- Soll die Ausarbeitung überhaupt möglichst kurz sein oder verliert man dabei an Übersichtlichkeit?

Dazu kommen noch mathematisch-informatische Tätigkeiten, die den Zugriff auf Teile von Eingaben bzw. Ergebnissen ermöglichen:

- Wie verarbeitet man Zwischenergebnisse weiter?
- Wie zerlegt man mathematische Objekte, z. B. Listen oder Vektoren?
- Wie setzt man Substitutionsregeln – die *Mathematica* unter anderem auch bei der Angabe der Lösungen von Gleichungen verwendet – sinnvoll ein?

Das alles sieht teilweise recht „technisch“ aus, aber das Zerlegen von Ausdrücken ist auch eine Tätigkeit des traditionellen Unterrichts, nur nimmt man das nicht so bewusst wahr, weil weniger Zwischenschritte materiell (d. h. auf dem Papier) vorliegen.

Ein weiterer Aspekt zu *Mathematica*, der kein Pendant im traditionellen Unterricht hat, ist der folgende: Einer fertigen Ausarbeitung sieht man nicht an, wie sie entstanden ist; Schüler können Verschiedenes probieren, ändern, löschen, einfügen. Man kann Schritte zusammenziehen, Teile für eine mögliche spätere Wiederverwendung anpassen, oder auch überflüssige Variablen eliminieren, man kann Entscheidungen über die passende Speicherung von Variablen treffen (einfach, indiziert, Term, Funktion, Gleichung). Speziell in grafischen Darstellungen wird man einmal ein Grundgerüst erstellen, dann nachsehen, ob man auf dem richtigen Weg ist und erst am Schluss Details wie Beschriftungen, Skalenausschnitte oder Formatierungen adaptieren. In Summe kommt es zu einer globaleren Sicht des Lösungswegs, und nicht alles muss im Vorhinein linear geplant und durchgeführt werden.

Im Unterricht ergeben sich die meisten dieser Arbeitsweisen von selbst und müssen (können) nicht „für sich“ entwickelt werden. Das Kopieren, mehrfache Überarbeiten und Anpassen von Eingaben etwa entdecken die Schüler nach den ersten Stunden; ein Verbot dieser Arbeitsweise könnte ich persönlich nur sehr schwer glaubhaft begründen. Spezielleres wie das Zugreifen auf Vektorkomponenten oder das Arbeiten mit der **`Module[]`**-Funktion muss natürlich an Hand von Beispielen aus der Mathematik entwickelt werden, auch das sinnvolle Anpassen von Grafiken unterliegt anfangs einem längeren Lernprozess. Gefördert werden diese Arbeitsweisen in jedem Fall von einer klaren, einfachen Sprachkonstruktion, die an jeder Stelle zwar zu einer eindeutigen Formulierung zwingt, andererseits dadurch aber eine große Zahl möglicher Wege offen lässt.

3 ZIELE UND UNTERSUCHUNGSFRAGEN

3.1 Konkrete Projektziele

Zwei zentrale Projektziele sind relativ einfach zu formulieren:

- Ich möchte bei den Schülern eine Weiterentwicklung der Kompetenzen im modularen Arbeiten erreichen, es soll sich ein differenzierterer Umgang mit mathematischen Ausarbeitungen ergeben. Kein Ziel kann hingegen sein, alle Schüler der Klasse auf einen einheitlichen Stand zu bringen; die Weiterentwicklung der Kompetenzen erfolgt immer noch individuell, und jeder Schüler muss an der konkreten Stelle selbst entscheiden, wie er mit einer gegebenen Anforderung bzw. Aufgabe umgeht. Eine erweiterte Zahl von offen stehenden Optionen ist dabei sicherlich nicht von Nachteil.
- Die Schüler sollen einen verständigen Umgang mit allfälligen Black Boxes erlernen; die Fokussierung auf die folgenden Bereiche ist mir dabei wichtig:
    - Grenzen und Einschränkungen von Black Boxes kennen
    - Fragen so stellen, dass eine bestimmte Black Box von Nutzen ist
    - Ergebnisse, die eine bestimmte Black Box liefert, einschätzen können
    - die Auswirkungen der prinzipiellen Verwendung von Black Boxes einschätzen.

3.2 Persönliche Ziele

Für mich persönlich ist das Projekt eine Möglichkeit, meine Unterrichtsarbeit in größerem Zusammenhang zu untersuchen und zu reflektieren. Die bildungstheoretischen und didaktischen Grundlagen bilden dabei unter anderem die Publikationen von Roland Fischer. Gerade die häufig gehörte Frage „Wozu überhaupt Mathematik?“ ist ad hoc nicht so einfach fundiert zu beantworten; natürlich findet man viele Argumente („Mathematik braucht man im täglichen Leben nicht“, „Mathematik ist überall“, „Mathematik gehört zur Allgemeinbildung“ usw.), aber gerade ein bildungstheoretisches Konzept als „Background“ relativiert bzw. festigt viele Ansichten. In diesem Sinn erachte ich Roland Fischers Ideen zur „Kommunikation mit Experten“[15] und zum Beitrag der Mathematik für die Gesellschaft als verfolgenswerte Vorschläge, die die Position gerade des AHS-Unterrichts stärken können. Aus diesem Grund ist eine Professionalisierung in diesem Bereich für mich besonders interessant und auch spannend.

3.3 Untersuchungsfragen

In der Planungsphase des Projekts habe ich folgende Untersuchungsfragen niedergeschrieben:

- Welche spezifischen modularen Arbeitsweisen werden von den Schülern bei ihrer Arbeit mit *Mathematica* häufig angewandt, welche eher selten?

[15] Siehe dazu [FisHA].

- Welcher Entwicklung unterliegen diese Arbeitsweisen im Lauf eines Schuljahres?
- Wird im Lauf der Zeit differenzierter mit den vorhandenen Möglichkeiten umgegangen?
- Gibt es eine Korrelation zur Schulnote?
- Wie kann man an konkreten Beispielen einen „emanzipierten Umgang mit Nichtwissen“ herausarbeiten?
- Gehen die Schüler anders mit bestimmten Prozeduren und Inhalten um, wenn sie als Black Box materialisiert sind?

Die Untersuchungsfragen sind zwar im konkreten Fall an bestimmte Unterrichtsinhalte gekoppelt, aber nicht an sie gebunden. Ich halte eine Reflexion auf allgemeinerer Ebene für sinnvoller, da auch die Ergebnisse sonst sehr eng an die gerade aktuellen Unterrichtsinhalte gebunden wären (und natürlich auch an die konkrete Schulklasse und Lehrperson). Ich bin nicht der Meinung, dass selbst entwickelte Unterrichtskonzepte ohne weitere Vermittlung auf andere Situationen übertragbar sind – Untersuchungen wären damit von relativ geringem allgemeinem Interesse.

Noch eine wichtige Bemerkung dazu: Der Entwicklungsstand bei den Kompetenzen im modularen Arbeiten fließt nicht mit in die Note ein. Ein entsprechender Ausbau der Arbeitstechniken ist aber zum Teil Voraussetzung für die jeweilige Mathematik im Unterricht, zum anderen Teil ergeben sich daraus aber auch gewisse Erleichterungen und Vorteile; insgesamt entsteht so etwas wie eine „natürliche“ Entwicklungsdynamik. Die Schüler können damit sehr frei umgehen und im konkreten Fall selbst entscheiden, wie sie arbeiten. Eine Korrelation des Entwicklungsstands zur Schulnote ist aber auf jeden Fall untersuchenswert.

Als begleitende Maßnahme habe ich die Erhebung von Einschätzungen und Resümee der Schüler zu affektiven und motivatorischen Aspekten

- zur eigenen Zufriedenheit im Unterricht
- zur Beurteilung des eigenen Fortschritts im Umgang mit Mathematik
- zur Arbeit mit dem Computer im Allgemeinen
- zum persönlichen mathematischen Verständnis im Besonderen

als Aufgabe für mich festgehalten.

4 PROJEKTVERLAUF

Da sich ein wesentlicher Projektteil auf das Verfolgen langfristiger Entwicklungen bezieht, erstreckte sich die Projektphase auf das gesamte Schuljahr. Insofern ist auch das gesamte Unterrichtsgeschehen Quelle für Beobachtungen. Eine wichtige Feedback-Quelle sind dabei – abgesehen natürlich von der direkten Kommunikation während der Unterrichtsstunden – die Arbeitsskripten und Übungsprogramme, die von den Schülern teils im Unterricht, teils zu Hause durchgearbeitet und von mir auch entsprechend durchgesehen und kommentiert werden. Es zeigen sich so die individuellen Arbeitsstile, und entsprechende Rückmeldungen auf konkrete Fragen sind recht leicht möglich.

Insgesamt hat sich das Arbeiten mit *Mathematica* bisher recht ansprechend entwickelt. Es gibt bisher keinen Fall in der Klasse, in dem eine höhere mathematische Kompetenz durch zu geringe „Rechnerkompetenz“ behindert würde. Einige weitere Einschätzungen: Der Entwicklungsstand beim modularen Arbeiten ist individuell sehr unterschiedlich. Vom zeilenweisen Input-Output-Arbeitsstil bis zum Arbeiten mit selbst gebastelten Modulen ist alles vertreten. Neue und zusätzliche Arten, eine bestimmte Aufgabe anzupacken, verbreiten sich oft über Mundpropaganda, nachdem einzelne Schüler „Insiderinformationen“ aus einem Lehrer-Schüler-Gespräch aufgenommen haben. Ich sehe es prinzipiell positiv, dass die einzelnen Schüler bereits ihre jeweils eigenen, charakteristischen Arbeitsweisen ausgebildet haben. Ein zu großer qualitativer Unterschied wäre hingegen kontraproduktiv; hier muss ich darauf achten, dass keine solchen Lücken entstehen.

Zum Inhaltlichen: Während des abgelaufenen Schuljahres haben die Schüler in den Bereichen Trigonometrie, analytische Geometrie im Raum, Grenzprozesse und reelle Zahlen, Potenzen-, Polynom- und Exponentialfunktionen sowie Statistik und explorative Datenanalyse gearbeitet. Ich möchte im folgenden Abschnitt einige Aufgaben aus den verschiedenen Themenbereichen analysieren und Zusammenhänge zu den Projektzielen aufzeigen.

5 EVALUATION UND REFLEXION

Ich möchte in diesem Kapitel einige charakteristische Aufgaben und zum Teil auch deren Ausarbeitungen zur Erläuterung des Projektthemas heranziehen. Bei den Ausarbeitungen handelt es sich um Ausschnitte aus abgegebenen Hausübungen- oder Schularbeiten. An wenigen Stellen, vor allem bei manchen **Table[…]**-Eingaben habe ich korrigiert, um den vertikalen Platz nicht zu sprengen; die Schüler verwenden fast immer eine **TableForm**-Darstellung, damit die Ausgabe auf dem Schirm in Form einer Tabelle und nicht in Form einer Liste erscheint.

5.1 Aufgabenanalyse zur analytischen Geometrie

Ich habe im November 2006 Aufgaben zur räumlichen Koordinatengeometrie analysiert und versucht, Arbeitsweisen der einzelnen Schüler genauer zu untersuchen. Einen taxativen Katalog von Arbeitsweisen zu erstellen erweist sich allerdings als schwierig, daher bin ich dazu übergegangen, wesentliche Unterschiede in den Ausarbeitungen aufzuzeigen. Eine flächendeckende Untersuchung der Hausübungen war möglich, da die Schüler im Regelfall ihre Arbeiten über die Lernplattform abgeben und ich daher praktisch alle *Mathematica*-Notebooks vergleichen kann.

Zu den Herbst-Kapiteln „Räumliche Koordinatengeometrie“ und „Grenzprozesse und reelle Zahlen“ kann ich noch anmerken, dass sich ein nicht-traditioneller Zugang als durchaus sinnvoll erwiesen hat: Ich habe weniger auf Formeln (und damit auf abgekürzte, komprimierte Verfahren), dafür aber mehr auf Grundbegriffe und Grundelemente eines Bereichs Wert gelegt. So können die Schüler etwa in der Koordinatengeometrie leicht ohne Hesse’sche Normalform auskommen – sie wissen, wie man mit Geraden, Ebenen und Punkten konstruktiv umgeht[16]. Das operative Nadelöhr (Gleichungslösen) entfällt bei der Arbeit mit *Mathematica*, die Schüler konzentrieren sich daher auf die Arbeit mit den Grundelementen und erfassen diese in verschiedenen Kontexten sicherer. Bei Folgen und Reihen verliert der Drill auf z. B. Summenformeln entsprechend an Wertigkeit (nicht aber die Bedeutung von Summenformeln, die oft implizit über den Computer in Aufgaben hineinspielen); der Computer kann mit endlichen wie auch unendlichen Summen umgehen, und die richtige Handhabung und Interpretation durch die Schüler muss im konkreten Fall immer wieder überlegt und durchgeführt werden.

Ich möchte an Hand zweier konkreter Ausarbeitungen einige Unterschiede erläutern. Die gestellte Aufgabe ist – auch im traditionellen Vergleich – nicht sehr schwierig und hat eher operativen Charakter. Trotzdem (oder gerade deswegen) lassen sich hier verschiedene Arbeitsweisen leichter erkennen:

Gegeben sind eine Ebene $\varepsilon[P(4, 1, 2), Q(10, 5, 1), R(4, 12, 8)]$ und eine Gerade $g[U(15, 4, 1), V(3, 8, 15)]$.

a) Stelle beide Objekte grafisch dar.

b) Berechne den Schnittpunkt von ε mit g.

c) Berechne einen Ebenennormalvektor $\vec{n}$.

d) Berechne den Schnittwinkel von ε und g.

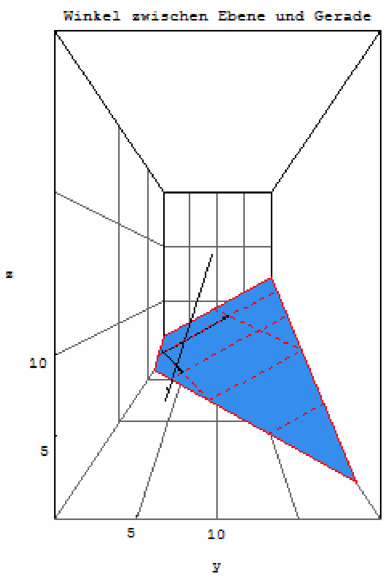
[16] Auch eine Abstandsformel Punkt-Gerade muss man nicht explizieren; die Schülerinnen wissen mit Projektionen umzugehen oder arbeiten im einfachsten Fall mit Hilfsebenen.

5.1.1 Ausarbeitung 1

```
pP := {4, 1, 2}
pQ := {10, 5, 1}
pR := {4, 12, 8}
pU := {15, 4, 1}
pV := {3, 8, 15}
ε[s_, t_] := pP + s (pQ - pP) + t (pR - pP)
g[t_] := pU + t (pV - pU)
```

Es erfolgt das Speichern der Punkte sowie die Darstellung der beiden Objekte in Parameterform. Die Entscheidung, keine Normalvektorform für die Ebene zu verwenden, erleichtert später den algebraischen und geometrischen Umgang.

```
ZeigeVP[
  Graphics3D[{Point[pP], Point[pQ], Point[pR],
    Point[pU], Point[pV], Ebene[pP, pQ, pR, rot],
    Line[{g[-10], g[10]}]}],
  "Winkel zwischen Ebene und Gerade", 30, 20, 30,
  {1, 0, 0}];
```



Die Funktionen **ZeigeVP[…]** und **Ebene[…]** kommen in einer allgemeinen Modulsammlung vor, die die Schüler von mir erhalten und großteils erweitert und adaptiert haben.

Point[…], **Graphics3D[…]** und **Line[…]** sind eingebaute *Mathematica*-Funktionen.

Hier ist die Wahl der Perspektive (des „Viewpoints“) interessant; möglicherweise dient die Grafik nur einer ersten Einschätzung der Lage; dafür würde auch die Darstellung der Punkte aus der Angabe sprechen.

Eine Grafik mit anderem Inhalt folgt dann am Schluss der Aufgabe.

b)

```
Solve[ε[s, t] == g[k], {s, t, k}]
ε[s, t] /. %
```

$$\left\{\left\{s \to \frac{541}{180},\ t \to -\frac{31}{30},\ k \to -\frac{211}{360}\right\}\right\}$$

$$\left\{\left\{\frac{661}{30},\ \frac{149}{90},\ -\frac{1297}{180}\right\}\right\}$$

$$pS := \left\{\frac{661}{30},\ \frac{149}{90},\ -\frac{1297}{180}\right\}$$

Der Schnittpunkt lautet $S\left(\frac{661}{30};\ \frac{149}{90};\ -\frac{1297}{180}\right)$.

Der mathematische Lösungsansatz; die Parameterwerte werden angezeigt.

Der Substitutionsoperator „/.“ erlaubt eine Weiterverarbeitung der Lösung ohne zusätzlichen Eingriff.

Die Doppelliste **{{…}}** wird aber hingegen nicht aufgelöst, sondern das Koordinatentripel händisch kopiert und für eine Definition verwendet; **pS** wird später auch für die grafische Darstellung nützlich sein.

c)

```
u = pQ - pP
v = pR - pP
{6, 4, -1}
{0, 11, 6}
n = u×v
{35, -36, 66}
```

Zwei Richtungsvektoren der Ebene werden definiert und angezeigt.

Man könnte den Normalvektor auch ohne eine explizite Definition von u und v berechnen:

$$n = (pQ - pP) \times (pR - pP)$$

d)

```
w = pV - pU
{-12, 4, 14}
```

$s := \frac{w.u}{\sqrt{w.w}\sqrt{u.u}}$; N[s]

```
NSolve[Cos[α] == s, α]
-0.509607
Solve::ifun : Inverse functions are being
   used by Solve, so some solutions may not be found;
   use Reduce for complete solution information. Mehr…
{{α → -2.10552}, {α → 2.10552}}
2.1055239148190372` / °
120.638
α := 120.63763398299348` °
```

$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$

```
-0.534728
-0.5347275880241407` / °
-30.6376
```

Der Schnittwinkel beträgt ≈31°.

Der Richtungsvektor der Geraden wird unter **w** gespeichert.

Hier passiert ein Fehler in der Ausarbeitung: Es wird der Winkel zwischen w und u statt zwischen w und n berechnet.

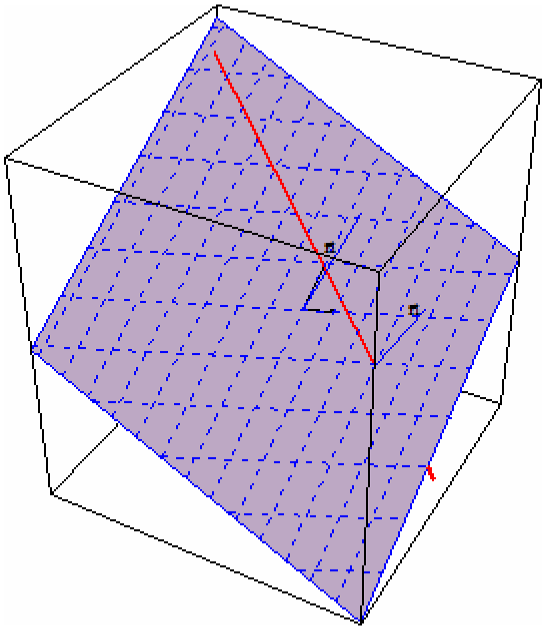
Interessant, dass das Skalarprodukt der Einheitsvektoren separat ausgegeben wird; dies könnte zur Kontrolle des Vorzeichens passiert sein. Mit **NSolve[…]** wird ein numerisches Lösen der Gleichung erzwungen.

Der Rest dieses Blocks enthält wieder „Copy-and-Paste"-Technik; Winkel im Bogenmaß werden zur Kontrolle ins Gradmaß transferiert.

Wiederum ein Beispiel für eine Operation mit Eingriff: Einfacher wäre z. B. „β/°", um zu einer Winkelgröße in Grad zu kommen.

```
Show[
 Graphics3D[
  {{Thickness[0.008], Gerade[g[-10], g[10], rot]},
   Ebene[pP, pQ, pR, blau], Vektor[pP, pP + n, blau],
   Vektor[pS, pS + n, blau], Point[pS],
   Text["n⃗", pS + 1/2 n, {1, 0}], Text["n⃗", pP + 1/2 n, {1, 0}]
  }], PlotRange → {{-40, 40}, {-40, 40}, {-40, 50}}];
```

Hier wird bewusst eine Darstellung mit Standardperspektive gewählt. Die Strichstärke der Geraden wird mit der eingebauten Funktion **Thickness[…]** angepasst, weiters wird ein Ebenennormalvektor eingezeichnet.



Ein weiterer Unterschied zur ersten Darstellung: Die Achsenausschnitte sind so gewählt, dass der Schnittpunkt von Gerade und Ebene zu sehen ist.

5.1.2 Ausarbeitung 2

a) Stelle beide Objekte grafisch dar.

```
In[28]:= pP := {4, 1, 2}; pQ := {10, 5, 1}; pR := {4, 12, 8};
         pU := {15, 4, 1}; pV := {3, 8, 15};
         v = (pQ - pP)
         w = (pR - pP)
         u = (pV - pU)
         ε[s_, t_] := pP + s * v + t * w
         g[t_] := pU + t * u

Out[29]= {6, 4, -1}

Out[30]= {0, 11, 6}

Out[31]= {-12, 4, 14}
```

Ein erster Unterschied: die Richtungsvektoren werden „auf Vorrat“ gespeichert – sie werden nachher noch teilweise gebraucht.

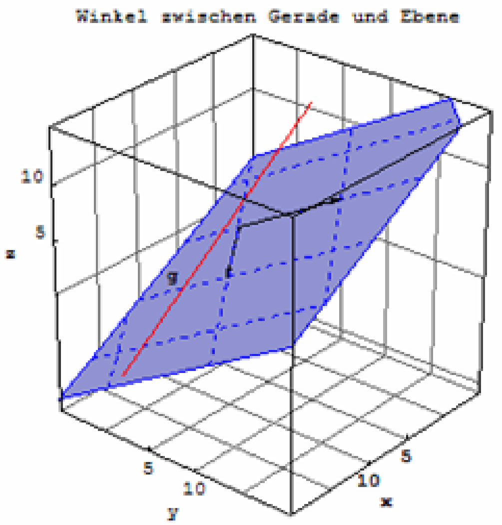
Ein Unterschied in der Dokumentation: Hier wurden die Zellen der Angabe so zertrennt, dass die Ausarbeitung zum entsprechenden Unterpunkt erkennbar ist.

```
In[27]:= ZeigeVP2[liste_, label_, xmax_, ymax_, zmax_, VP_] :=
           Show[liste, PlotLabel → label, ImageSize → 250,
            Boxed → True, Axes → True, AxesLabel → {"x", "y", "z"},
            AxesEdge → {{1, -1}, {1, -1}, {1, -1}},
            Ticks → {{5, 10}, {5, 10}, {5, 10}},
            PlotRange → {{-5, xmax}, {-5, ymax}, {-11, zmax}},
            ViewPoint → VP,
            FaceGrids → {{0, 0, -1}, {0, -1, 0}, {-1, 0, 0}}];
```

Die erste Eingabe definiert eine neue Funktion **ZeigeVP2[…]**, die auf einer Funktion aus dem Modulpool basiert.

Der Schüler hat allerdings den Zeichenbereich angepasst (**PlotRange[…]**), offenbar ist ihm bei den ersten Darstellungen von Gerade und Ebene aufgefallen, dass ein wesentlicher Teil der Grafik mit dem Standardachsenausschnitt abgeschnitten wird.

```
In[35]:= ZeigeVP2[
  Graphics3D[{Ebene[pP, pP + v, pP + w, blau],
    Gerade[g[-10], g[10], rot],
    Text["g", pU, {0.5, -1.5}]}],
  "Winkel zwischen Gerade und Ebene", 20, 20, 15,
  {6, 5, 4}];
```



b) Berechne den Schnittpunkt von ε mit g.

```
In[37]:= loes = Solve[ε[s, t] == g[r], {s, t, r}]
```

Out[37]= $\left\{\left\{s \to \frac{541}{180},\ t \to -\frac{31}{30},\ r \to -\frac{211}{360}\right\}\right\}$

```
In[38]:= pS = g[r] /. loes[[1]]
```

Out[38]= $\left\{\frac{661}{30},\ \frac{149}{90},\ -\frac{1297}{180}\right\}$

Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $S\left(\frac{661}{30};\ \frac{149}{90};\ -\frac{1297}{180}\right)$

Im Gegensatz zur ersten Ausarbeitung ist hier kein händischer Eingriff in den Rechengang notwendig. Der Ausdruck „**loes[[1]]**" greift auf den ersten Eintrag in der Liste „**loes**" zu (das ist „**s→ 541/180**"). Damit wird eine konforme Liste erzeugt, die später sowohl zum Operieren, als auch zum Darstellen verwendbar ist.

c) Berechne einen Ebenennormalvektor $\vec{n}$.

```
In[39]:= n = v × w
Out[39]= {35, -36, 66}
```

Hier genügt nach den Vorbereitungen zu Beginn eine einzige Zeile.

d) Berechne den Schnittwinkel von ε und g.

In[40]:= NSolve$\left[\mathrm{Cos}[\varphi] == \frac{u.n}{\sqrt{u.u}\ \sqrt{n.n}},\ \varphi\right]$

```
α = %[[2, 1, 2]]
α / °

Solve::ifun : Inverse functions are being
   used by Solve, so some solutions may not be found;
   use Reduce for complete solution information. Mehr…

Out[40]= {{φ → -1.33864}, {φ → 1.33864}}
```

Wiederum ist ein Unterschied zur ersten Ausarbeitung zu bemerken: Ein Eingriff in den Rechengang ist nicht notwendig: Die (passende) Lösung der Gleichung wird mittels Zugriff extrahiert:

„**%**" verweist auf die letzte Ausgabe (hier ist das eine Liste – die Lösung der Gleichung nach φ), „**[[2,1,2]]**" zieht nur die positive Lösung 1.33864 als Zahl (nicht

```
Out[41]= 1.33864

Out[42]= 76.6982

In[43]:= β = π/2 - α
         β / °

Out[43]= 0.232159

Out[44]= 13.3018
```

Der Schnittwinkel beträgt ca. 13°.

als Ersetzungsregel „$\varphi \to$ **1.33864**“) heraus.

Die Gradangabe für β ist durch nur eine weitere Zeile realisiert.

Der Vergleich dieser beiden Ausarbeitungen zeigt bereits einige Unterschiede in der Planung und Durchführung. An den Nummerierungen der Eingaben („**In[…]**“) kann man erkennen, dass in den Endversionen nicht alle Eingaben vorkommen, sondern Zellen mehrfach (nach entsprechender Änderung) ausgeführt wurden.

Die Schüler haben weiters das Kriterium des händischen Eingriffs in einen Lösungsweg unterschiedlich gehandhabt. Dies könnte man auf zwei Arten deuten: Da keine ähnlichen Operationen notwendig sind (es geht nur um einen einzigen Winkel und nur um einen einzigen Normalvektor), muss man keine Eingaben kopieren und wiederverwerten; damit entfällt die Notwendigkeit, die Stellen händischen Eingriffs zu eliminieren und man kann getrost Ergebnisse mit der Maus kopieren und weiterarbeiten. Andererseits können Schüler aber mit einer Arbeitsweise, die von vornherein auf solche Probleme Bedacht nimmt, ganz anders planen und ausführen. Möglicherweise kann der erste Schüler zwischen erster und zweiter Technik umschalten, möglicherweise auch nicht (letzteres wäre eher meine Vermutung).

5.2 Aufgabenanalyse zum Kapitel „Grenzprozesse“

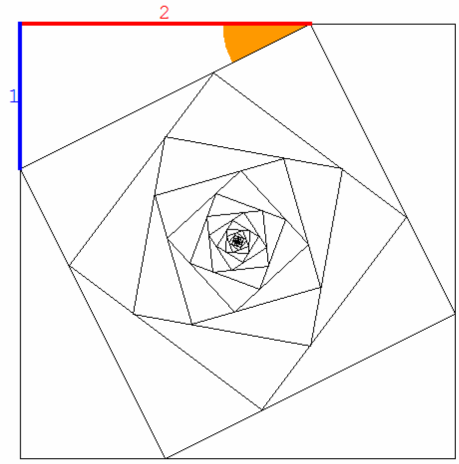
Im traditionellen Unterricht erfolgen Beschreibungen für Folgen und Reihen vorrangig in algebraischer Form, sei es nun durch explizite oder rekursive Darstellungen. Eher schwierig ist eine Beschreibung grafischer Art, zum Beispiel durch Verlaufs- oder Cobweb-Diagramme. Hier bietet meist der Computer durch fertige Grafikmodule zusätzliche Möglichkeiten.

Abgesehen von diesen prinzipiellen Vorteilen ist aber z. B. die Frage zu stellen, in welcher Form der zentrale Begriff des Grenzwerts transportiert werden könnte. Einerseits haftet Folgen ein gewisser dynamischer Aspekt an (man kann in linearer Weise immer wieder das nächste Glied berechnen), andererseits ist der Grenzwertbegriff mit einer Abstraktion des Sehens des ganzen Prozesses verbunden. Die Dynamik kann man relativ einfach sichtbar machen (im Unterricht finden hier – und das ist interessant zu beobachten – unter den Schülern regelrechte Wettbewerbe statt), in dem man für eine konvergente Folge die ersten 1.000, 10.000, 1.000.000 usw. Glieder berechnet, oder für eine vorgegebene Schranke einen passenden Index findet.

Ich habe im Verlauf des Kapitels versucht, einige Schwerpunkte zu setzen: Einerseits gibt es einen Zusammenhang zwischen algebraischer und grafischer Darstellung einer Folge; man kann hier versuchen, von einer der Darstellung ausgehend das Aussehen der jeweils anderen vorauszusagen (dies ist auch für andere Folgentypen als „nur“ arithmetische und geometrische möglich). Andererseits kann man, von der algebraischen Seite kommend, versuchen, ein gewisses Gefühl für Konvergenz zu entwickeln; Schüler können vermuten, wie sich Terme für große Indizes verhalten werden, sie müssen dabei zum Beispiel Kenntnisse über Potenzen und Brüche einbringen. Die folgende Aufgabe beleuchtet auch diesen Teilaspekt.

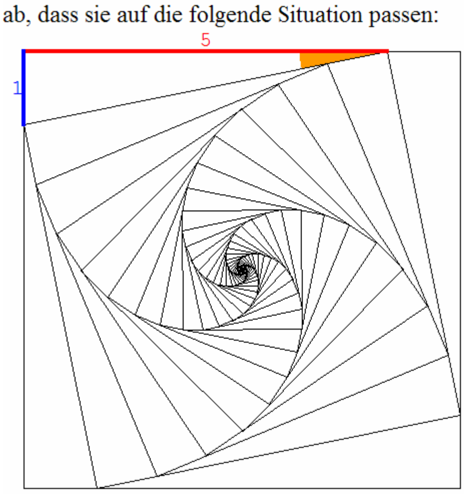
5.2.1 Aufgabenstellung

a) Einem Quadrat Q_0 wird ein Quadrat Q_1 eingeschrieben, diesem wiederum ein weiteres Quadrat Q_2 usw.:



Einige Fragen:
1) Welche Längen haben die Seiten der Quadrate (a_0, a_1, a_2, ...)?
2) Wie groß ist der markierte Winkel?
3) Wie groß ist der Flächeninhalt des 0., 1., 2., ... *n*. Quadrats?
4) Wie groß sind die Flächeninhalte aller unendlich vielen Quadrate zusammen?
5) Wie groß ist der Umfang des 0., 1., 2., ... *n*. Quadrats?
6) Wie groß sind alle unendlich vielen Umfänge zusammen?

b) Wie oben. Ändere deine Berechnungen für 1)-6) so ab, dass sie auf die folgende Situation passen:



Die Aufgabe ist wieder recht konventionell, erhält aber durch den zweiten Teil eine modulare Anforderung. Die folgende Ausarbeitung ist ein Beispiel, wie ein Schüler auf diese Anforderung reagiert hat. Es fällt sicherlich auf, dass die Aufgabe mit Hilfe einer Summenformel für geometrische Reihen in knapperer Form zu lösen wäre; eine solche Formel stand zu diesem Zeitpunkt allerdings nicht zur Verfügung und kam im Lauf des Kapitels erstens spät und zweitens an nicht so zentraler Stelle.

5.2.2 Ausarbeitung

■ **a)**

```
(* 1 *)
Solve[√(2² + 1²) == x]
{{x → √5}}
```

Wie lang ist eine Seite des zweitgrößten Quadrats? Hier könnte man zwei Schlussfolgerungen aus der Ausarbeitung ziehen: 1) Der Schüler kann die Länge der Seite nicht im Kopf berechnen und braucht daher den Computer. 2) Der Schüler will, falls er seine Ausarbeitung später wieder durchsieht, festhalten, wie man die Länge berechnen kann (dass es ein eigentlich recht trivialer Schritt ist, tut hier nichts zur Sache).

Ich vermute in diesem konkreten Fall, dass der zweite Aspekt ebenso vorkommt, da sich immer wieder beobachten lässt, wie Schüler ihre Ausarbeitungen kommentieren und für sich selbst (und auch für die Diskussion mit anderen) klarer und nachvollziehbarer machen.

```
l[n_] := 3 * (√5/3)^n
Table[{n, l[n]}, {n, 0, 10}]
```

$\{\{0, 3\}, \{1, \sqrt{5}\}, \{2, \frac{5}{3}\}, \{3, \frac{5\sqrt{5}}{9}\}, \{4, \frac{25}{27}\}, \{5, \frac{25\sqrt{5}}{81}\}, \{6, \frac{125}{243}\}, \{7, \frac{125\sqrt{5}}{729}\}, \{8, \frac{625}{2187}\}, \{9, \frac{625\sqrt{5}}{6561}\}, \{10, \frac{3125}{19683}\}\}$

Die algebraische Beschreibung für die n. Seitenlänge erfolgt funktional. Dies eröffnet später Vorteile.

```
(* 2 *)
N[ArcTan[1/2]]
0.463648
%/°
26.5651
```

Der markierte Winkel hat ca. 26.57 °.

Ein Rückgriff auf trigonometrisches Wissen.

Interessant die Eingabe „**%/°**“; man könnte den Winkel in einer einzigen Eingabe berechnen, ich denke aber, dass die Auftrennung in zwei Eingaben die Berechnung nachvollziehbarer macht. Zusätzlich ist das Ergebnis im Bogenmaß wenig aussagekräftig, die Schüler haben wenig Gefühl dafür, wie groß ein Winkel „tatsächlich“ ist. Damit ist das Umrechnen ins Gradmaß fast schon ein „automatischer Reflex“.

```
(* 3 *)
f[n_] := l[n]^2
Table[{n, f[n]}, {n, 0, 10}]
```

$\{\{0, 9\}, \{1, 5\}, \{2, \frac{25}{9}\}, \{3, \frac{125}{81}\}, \{4, \frac{625}{729}\}, \{5, \frac{3125}{6561}\}, \{6, \frac{15625}{59049}\}, \{7, \frac{78125}{531441}\}, \{8, \frac{390625}{4782969}\}, \{9, \frac{1953125}{43046721}\}, \{10, \frac{9765625}{387420489}\}\}$

Die funktionale Darstellung der Flächeninhalte ist durch die funktionale Darstellung der Quadratlängen „geschenkt“.

Die **Table[…]**-Zeile ist sehr wahrscheinlich von oben kopiert und entsprechend korrigiert worden. Diese Technik spart Zeit und Tipparbeit.

```
(* 4 *)
s[n_] := Sum[f[i], {i, 0, n}]
Table[{n, s[n]}, {n, 0, 10}]
```

$\{\{0, 9\}, \{1, 14\}, \{2, \frac{151}{9}\}, \{3, \frac{1484}{81}\}, \{4, \frac{13981}{729}\}, \{5, \frac{128954}{6561}\}, \{6, \frac{1176211}{59049}\}, \{7, \frac{10664024}{531441}\}, \{8, \frac{96366841}{4782969}\}, \{9, \frac{869254694}{43046721}\}, \{10, \frac{7833057871}{387420489}\}\}$

Wie oben; die Schüler vermögen nach einiger Zeit auch mit Summenausdrücken, und vor allem mit Ausdrücken, die eine unabhängige Variable in den Summationsgrenzen enthalten, umzugehen. Im traditionellen Teil ist eine solche Arbeitsweise praktisch nicht möglich.

```
N[s[1000]]
Expand[s[n]]
20.25
```

$\frac{81}{4} - \frac{1}{4}\, 5^{1+n}\, 9^{1-n}$

Der Flächeninhalt aller Quadrate zusammen beträgt $\frac{81}{4} E^2$.

Eine weitere interessante Vorgehensweise: Man testet ein Glied mit einem relativ großen Index auf seinen Wert (unter der Voraussetzung, dass Konvergenz vorliegt). Der eigentliche „Test“ erfolgt durch Untersuchen des Terms: Hier kann man leicht nachweisen (*5n* wächst langsamer als *9n*), welche Terme für große n sehr klein werden; der Grenzwert von **s[n]** muss damit 81/4 sein. Der Computer kann natürlich den Grenzwert durch **Limit[s[n],n→∞]** ausgeben; ich denke aber, dass diese Vorgehensweise weniger zur Begriffsentwicklung beiträgt.

`(* 5 *)`
`u[n_] := 4*l[n]`
`Table[{n, u[n]}, {n, 0, 10}]`
$k[n\_] := \sum_{i=0}^{n} u[i]$
`Table[{n, k[n]}, {n, 0, 10}]`
	Diese Teile stelle ich abgekürzt dar.

`N[k[1000]]`
`Expand[k[n]]`
`47.1246`
$-\frac{36}{-3+\sqrt{5}} + \frac{4\,3^{1-n}\,5^{\frac{1}{2}+\frac{n}{2}}}{-3+\sqrt{5}}$
$N[-\frac{36}{-3+\sqrt{5}}]$
`47.1246`
Alle Umfänge zusammen haben einen Wert von ca. $47.1246E$ ($-\frac{36}{-3+\sqrt{5}}$ E).
	Wie oben; der Computer kann auch hier die Summe in einem einzigen kurzen Term darstellen, den es zu bewerten gilt. Wiederum kann man Aussagen über das Verhalten des Zählers des zweiten Summanden machen und damit den Grenzwert von **k[n]** (der Summe aller Quadrat-umfänge) angeben; über die Angabe mit vier Ziffern nach dem Komma würde ich noch diskutieren.

▪ **b)**
`Quit[]`
`(* 1 *)`
$\text{Solve}[\sqrt{1^2+5^2} == x]$
$\{\{x \to \sqrt{26}\}\}$
$a[n\_] := 6 * \left(\frac{\sqrt{26}}{6}\right)^n$
`Table[{n, a[n]}, {n, 0, 10}]`
…………………………………………………………
$N[\text{ArcTan}[\frac{1}{5}]] / °$
`11.3099`
Der Winkel hat ca. 11.31°.
	Eine kleine Änderung, und der restliche Teil der Ausarbeitung verläuft analog zum ersten Teil.
	
	Mögliche Anschlussaufgaben könnten Untersuchungen zur Verallgemeinerung der Längen der Dreiecksseiten, zur Abhängigkeit des Grenzwerts von diesen Dreiecksseiten usw. beinhalten.

Hier zeigt sich eine häufig angewandte Arbeitsweise der Schüler: Wenn eine Wiederverwendung eingegebener Zellen in Notebooks möglich ist, wird auf eine Art formuliert, die eine Wiederverwendung und Adaption begünstigt. Überhaupt ist zu beobachten, dass mit *Mathematica* das Kopieren und Anpassen früherer Eingaben eine gängige Methode ist. Sobald im Vorhinein eine Tippersparnis erkennbar wird, planen Schüler die Eingaben so, dass sie wieder verwertbar werden.

5.3 Aufgabenanalyse zur Statistik und Datenanalyse

In diesem Kapitel können Schüler vor allem sehr kreativ mit Darstellungen von Daten, sie es in Listen oder in Diagrammen, umgehen. Eine wichtige Frage dabei ist stets, welche Informationen bestimmte Darstellungen transportieren und welchen manipulativen Gehalt manche Diagrammformen und –darstellungen haben; Veränderungen ergeben sich schnell durch unterschiedliche Sortierung von Daten, veränderte Skalierung, Wahl eines anderen Skalenausschnitts usw. Auch relative und absolute Angaben verändern eine Darstellung oft drastisch. Als notwendige Grundlage haben sich die Schüler einerseits Wissen über Zentral- und Streuungsmaße, andererseits über den Umgang mit Daten in Form von Listen und indizierten Größen angeeignet.

Das rechts angeführte Beispiel hat als Datengrundlage die Schulergebnisse des Känguru-Wettbewerbs 2007, in *Mathematica* eine Liste mit über 550 Einträgen. Für die Beantwortung der angegebenen Fragen müssen verschiedene Überlegungen durchgeführt werden: Welche Darstellung ist sinnvoll? In welcher Form sollen die Daten neu strukturiert werden? Welche Diagrammarten sollen überhaupt eingesetzt werden?

▲ Ein Exkurs zum Känguru-Wettbewerb 2007

● Daten

Hier die anonymisierten Daten des Känguru-Wettbewerbs im Schuljahr 06/07:

```
In[7]:= känguru := {{"Centipunkte", "Antworten", "ID", "Klasse"},
        {5500, "EADCDABCDCDCEACEDEECAEBA", "AABICKTTU", 1},
        {4375, "EBACDEDB0E0E000D000000AE", "AAMKOBRKD", 1},
        {4975, "E0BCE0DBCCDC00CD0AB0A0AB", "AEWINERDR", 1}
        ⋮
        {5725, "AAA0CBBAECBB00CDCA0000A0000000", "ÜABGENRRU", 8},
        {8300, "AA0ECCBAE0C00E0D0EADD000000000", "UUHKASRKB", 8},
        {6875, "CA00CBBAE0AD000DCE0DDDC0000EB0", "YARSADDAB", 8}}
```

Kommentiere die folgenden Aussagen:

(1) "50% der Zweitklassler (ZK) sind besser als 75% der Erstklassler (EK)."

(2) "Der durchschnittliche ZK ist besser als als drei Viertel der EK."

(3) "Nur zwei ZK sind besser als der beste EK."

(4) "Drei Viertel der ZK sind besser als der durchschnittliche EK."

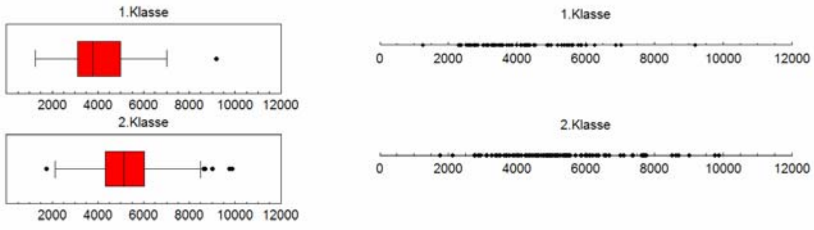
(5) "Der schlechteste ZK ist nicht viel besser als der schlechteste EK."

```
In[147]:= anz1 = Count[klasse, 1]
          centipunkte1 = Take[centipunkte, anz1]

Out[147]= 85

Out[148]= {5500, 4375, 4975, 2725, 3100, 5875, 5500, 3150, 3975, 4900, 43
           2600, 4200, 3975, 5450, 3450, 4125, 5175, 4100, 5575, 3125, 53
           2325, 4250, 3775, 3850, 2850, 4225, 3500, 5300, 2575, 3575, 49
           2525, 7025, 3325, 4475, 5375, 3300, 4125, 3375, 4525, 2300, 26
           2600, 4500, 1250, 5450, 5850, 3125, 5175, 4300, 4875, 3450, 33
           5625, 4125, 2650, 3000, 3450, 2350, 5175, 2375, 3550, 4200,
           9175, 2575, 2650, 3700, 2350, 3700, 3025, 6000, 5775, 6875,
           4325, 2750, 3250, 2800, 6250, 3450, 3375, 3325, 2850, 3150}
```

```
In[397]:=
    BW[daten_, titel_] :=
      BoxWhiskerPlot[daten, BoxOrientation → Horizontal,
       AspectRatio → 1 / 4, BoxOutliers → All, PlotLabel → titel,
       PlotRange → {{0, 12000}, {-1.5, -0.5}},
       BoxOutlierShapes →
        MakeSymbol[{AbsolutePointSize[3.5], Point[{0, 0}]}]];

In[399]:=
    Vert[daten_, titel_] :=
     Show[Graphics[Map[{PointSize[0.01], Point[{#, 0}]} &,
        daten]], PlotRange → {{0, 12000}, {-0.8, 0.2}},
      Axes → {True, False}, AspectRatio → 1 / 5, PlotLabel → titel]
```

Die Liste kann mit relativ einfachen Mitteln zerlegt werden. Funktionen wie **Count[…]** und **Take[…]** sorgen hier dafür, dass die richtige Anzahl an Elementen aus den Gesamtdaten herausgezogen wird. *Mathematica* stellt neben anderen grundlegenden Darstellungen wie Säulen- und Kreisdiagrammen auch Kastenschaubilder zur Verfügung. Die Schüler haben im Unterricht eine angepasste Version (**BW[…,…]**) erhalten, die nach Notwendigkeit adaptiert wird (man kann etwa die Ausreißer verbergen, die Skalierung verändern etc.). Die Funktion **Vert[…,…]** stellt eine Datenverteilung dar. Beide Funktionen sind gute Beispiele für „offene Black Boxen“. Man kann sie so verwenden wie sie sind oder die Inhalte gegebenenfalls anpassen. Dabei kann und muss man immer nur so tief einsteigen, wie es notwendig ist bzw. wie es die eigenen Kenntnisse erlauben.

```
In[405]:=
Show[GraphicsArray[{{boxwhi1, vert1}, {boxwhi2, vert2}}], ImageSize → 700, GraphicsSpacing → 0];
```



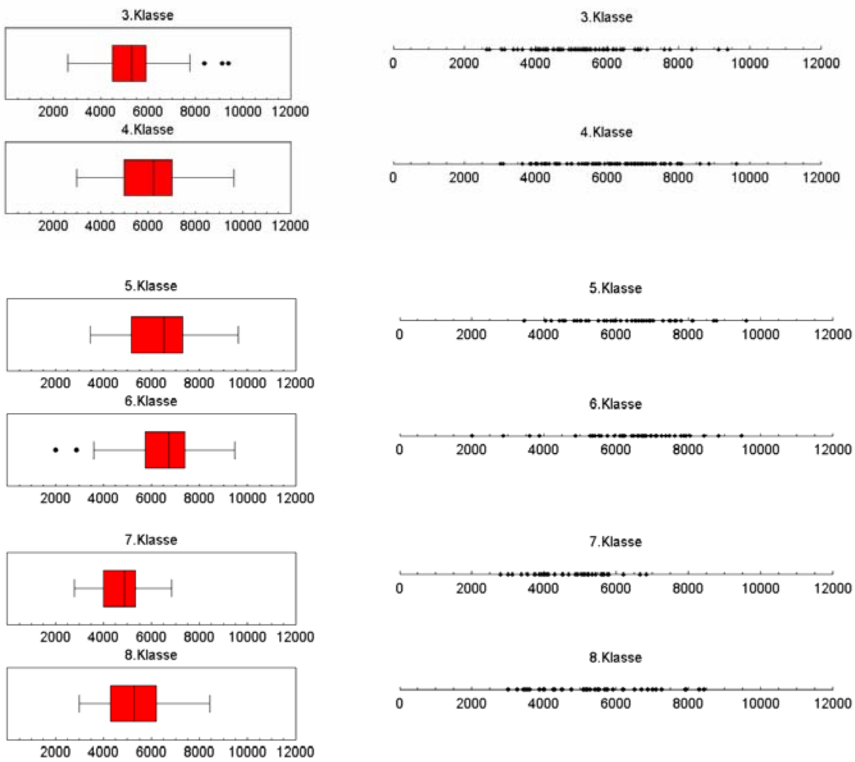
Zum Vergleich hier beide Darstellungen; die eingangs angeführten Fragen lassen sich mit einiger Kenntnis von Maßen und Datendarstellungen leicht beantworten.

```
anz3 = Count[klasse, 3]
centipunkte3 = Take[Drop[centipunkte, anz1 + anz2], anz3]

93

{5900, 4100, 6850, 3050, 5350, 4250, 5000, 3125, 5175, 4075, 5500, 5225,
 6025, 4625, 2625, 6175, 5000, 9125, 5675, 6000, 8375, 9375, 7125, 5425,
 6425, 5125, 5175, 5300, 4925, 4600, 5450, 5225, 5425, 6150, 5900, 5450,
 4200, 4925, 2625, 5525, 4750, 5400, 3975, 8375, 4050, 7125, 3875, 4475,
 5325, 5875, 3375, 5550, 7750, 5000, 6925, 6775, 4975, 5775, 4325, 4300,
 5125, 3475, 5075, 4250, 4625, 3625, 6875, 5350, 5350, 4125, 6250,
 3625, 5425, 4650, 6875, 5300, 6375, 4250, 7600, 2700, 5400, 5650,
 6450, 4700, 4500, 4250, 5775, 5375, 6375, 4925, 4750, 5975, 5375}

anz4 = Count[klasse, 4]
centipunkte4 = Take[Drop[centipunkte, anz1 + anz2 + anz3], anz4]

86

{4575, 6575, 6950, 5625, 4875, 5375, 7975, 6125, 6350, 6800,
 3825, 4000, 5575, 6675, 6300, 5000, 5600, 7775, 7175, 5575,
 5575, 5425, 7975, 6575, 7075, 7300, 4050, 6200, 8050, 6775, 7100,
 6500, 7625, 4600, 5925, 6075, 5450, 7175, 5200, 4875, 3625, 4650,
 6975, 4300, 6650, 6850, 7250, 7350, 6550, 5300, 6875, 4375, 7300,
 6725, 6925, 3000, 9625, 6050, 5700, 8075, 4225, 6250, 4275, 4975,
 6500, 3075, 6775, 7175, 5675, 4150, 5750, 6550, 8850, 3975, 7000,
 7500, 5425, 4550, 4050, 6800, 8600, 7750, 5800, 4275, 3875, 7575}
```

Hier die Ausarbeitung eines Schülers für die restlichen Klassen, die beim Känguru-Wettbewerb gleiche Aufgabenstellungen hatten. Während die Vorgangsweise für die Diagrammerstellung gleich geblieben ist, muss bei der Datenzerlegung auf die Anzahl der Schülerinnen und Schüler der Acht gegeben werden. In diesem Beispiel kommt als weitere Funktion **Drop[...]** zum Einsatz, die aus einer Liste eine vorgegebene Anzahl von führenden Elementen verwirft, insgesamt können mit wenigen Grundfunktionen in der richtigen Kombination Daten recht schnell zerlegt und neu gruppiert werden.

Diese Darstellung der Daten lässt umfangreiche Interpretationstätigkeiten zu, etwa: Welche Klassen mit gleichen Aufgabenstellungen unterscheiden sich in ihren Ergebnissen am meisten bzw. am wenigsten? Bei welchen Klassen liegen die meisten Schülerinnen und Schüler am dichtesten? Wo tritt die größte Streuung auf? Aus welchem Diagrammtyp kann man diese Informationen am ehesten ablesen?

```
Show[GraphicsArray[{{boxwhi3, vert3}, {boxwhi4, vert4}}], ImageSize → 700, GraphicsSpacing → 0];
```



5.4 Ein weiteres Beispiel für Auslagerung

Die Frage, wie sich eine Folge für wachsenden Folgenindex verhält, steht in auch in Zusammenhang mit Lokalitäts- und Globalitätseigenschaften reeller Funktionen. Bei der Untersuchung solcher Eigenschaften kann man an einigen Stellen meiner Ansicht nach sinnvolle Auslagerungen durchführen. Ich möchte das am Beispiel der Partialbruchdarstellung erläutern; hier die entsprechende Stelle aus dem *Mathematica*-Notebook, mit dem die Schüler gearbeitet haben:

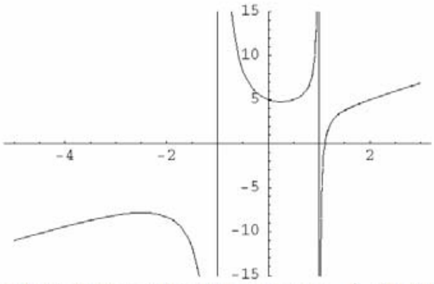
▲ Lokales und globales Verhalten

Gehen wir von der Funktion

In[88]:= $f[x\_] := \frac{2x^3 + 2x - 5}{x^2 - 1}$

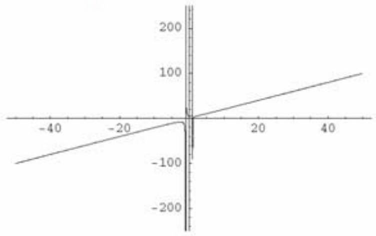
aus. Der Graph von f gibt einige der Eigenschaften wieder:

```
In[89]:= Plot[f[x], {x, -5, 3}, PlotRange → {-15, 15}];
```



Anscheinend hat f ein lokales Minimum irgendwo bei $x = \frac{1}{4}$, ein lokales Maximum bei etwa $x = -3$ und zwei Stellen, bei denen die Funktion undefiniert ist (laut Nenner muss das bei $x = \pm 1$ sein). Wie aber verhält sich die Funktion "im Großen? Welchen Eigenschaften hat f, wenn man einmal von dem kleinen Bereich, den wir oben dargestellt haben, absieht?

```
In[90]:= Plot[f[x], {x, -50, 50}, PlotPoints → 500];
```



Offenbar ist der Graph, abgesehen von der "kleinen Störung in der Mitte", recht linear. Wir können sogar nachweisen, dass der Verlauf, global gesehen, linear ist. Dazu müssen wir allerdings den Funktionsterm (einen Bruch) anders darstellen.

[...]

Wenn wir eine **Partialbruchdarstellung** erzeugen, dann sehen wir sofort das globale lineare Verhalten:

```
In[97]:= Apart[f[x]]
```

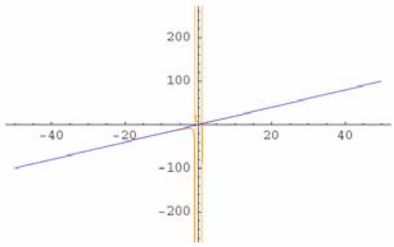
Out[97]= $-\frac{1}{2(-1+x)} + 2x + \frac{9}{2(1+x)}$

Wir erhalten eine Summe von drei Termen, von denen zwei für sehr größer werdende Werte von x immer kleiner werdende Beiträge liefern. Der "dominante" Terme ist also global der Term $2x$.

Man sagt, dass sich f im Großen (oder auch: "asymptotisch") wie die Funktion $a_f(x) = 2x$ verhält.

Die Stellen, an denen f nicht definiert ist, ersehen wir auch aus den beiden Bruchtermen: Die Nenner werden bei $x = 1$ bzw. $x = -1$ Null, damit die Terme undefiniert.

```
In[128]:=
    af[x_] := 2 x
    Plot[{f[x], af[x]}, {x, -50, 50}, PlotPoints → 2000,
      PlotStyle → {Hue[0.1], Hue[0.7]}];
```



[...]

● **Aufgabe 8.31**

Warum ergibt sich bei einer Partialbruchdarstellung von $\frac{x^2-4}{x+2}$ kein Bruchterm?

Welche Rolle spielt dabei der faktorisierte Nenner des Terms? (Teste das auch mit Hilfe der Funktionen `Factor[]` und `Denominator[]`).

Unter welchen Bedingungen ergibt ganz allgemein die Partialbruchdarstellung eines Bruchterms keinen Bruchterm?

Ich halte den Einsatz von **Apart[]** an dieser Stelle für sinnvoll, obwohl die Schüler keine Kenntnis des eigentlichen Verfahrens haben (weder des händischen Algorithmus', schon gar nicht des Verfahrens, das der Compuer intern verwendet). Trotzdem liefert die **Apart[]** einen nützlichen Beitrag:

- Schüler können erkennen, dass die Begriffe „gleichwertig“ und „gleich“ mathematisch unterschiedliche Bedeutungen haben.
- Unterschiedliche (in diesem Fall algebraische) Darstellungen liefern unterschiedliche Informationen. Die Wahl der richtigen Darstellung ist eine mathematisch relevante Tätigkeit.
- Das Verfahren zum Auffinden der Partialbruchdarstellung ist zwar nicht bekannt, die Rückführung auf den ursprünglichen Term ist aber mit einfachen algebraischen Umformungen aus der Unterstufe durchführbar.

In diesem Sinn sehe ich die Möglichkeit, einen Term in Partialbruchform darzustellen, als Gewinn, und im Unterricht gehen die Schüler ganz natürlich mit dieser zusätzlichen Möglichkeit um. Prinzipiell ist die Fähigkeit zu sagen, „was der Computer“ mittels **Factor[]**, **Expand[]**, **Apart[]** usw. „gemacht hat“, nur graduell gegeben: Beim Expandieren eines Produkts von polynomischen Faktoren wird man das noch sagen können, hingegen ist es beim Faktorisieren komplizierterer Terme oft schwierig[17], wenn man die entsprechenden händischen Verfahren nicht kennt und trainiert hat – trotzdem kann man aber mit diesem Nichtwissen emanzipiert umgehen. Hier halte ich also einen offenen Umgang mit dem Computer für durchaus positiv für den Unterricht.

5.5 Zwei Untersuchungen zur langfristigen Entwicklung

Ich habe gegen Ende Juni zwei Unterrichtsstunden darauf verwendet, die Schüler ohne vorige Ankündigung auf mögliche langfristige Kompetenzen zu testen.

5.5.1 Stunde 1

Als Vorgabe hatten die Schüler das blanke Skriptum aus dem Kapitel „Ebene Koordinatengeometrie“, so wie sie es in der 5. Klasse von mir erhalten haben. Die Schüler hatten in etwa 30 Minuten drei Aufgaben zu bearbeiten:

- **Aufgabe 4.7**

Gegeben ist ein Dreieck ABC [$A(-5; -7)$, $B(-1; -4)$, $C(-6; 0)$] und die beiden Vektoren $\vec{v} = (8; 2)$ und $\vec{w} = (-4; 7)$.
a) Verschiebe das Dreieck ABC zunächst um den Vektor $\vec{v}$, und das verschobene Dreieck dann um den Vektor $\vec{w}$. Stelle die beiden Dreiecke grafisch dar und berechne jeweils die Koordinaten ihrer Eckpunkte. Zeichne in der Grafik auch die entsprechenden Verschiebungsvektoren ein.
b) Vertausche nun – in einer zweiten Grafik – die Reihenfolge der Verschiebung: Verschiebe das gegebene Dreieck zuerst um den Vektor $\vec{w}$ und das so verschobene Dreieck um den Vektor $\vec{v}$. Vergleich die Ergebnisse von a) und b).
c) Führe nun – in einer dritten Grafik – beide Verschiebungen in einem Schritt aus und überspringe so die "Zwischenstufe". Wie lautet der Verschiebungsvektor $\vec{z}$?

- **Aufgabe 4.15**

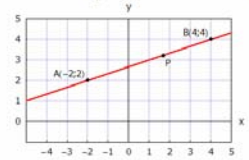
Ist das Dreieck PQR mit $P(-2; 0)$, $Q(0; -1)$, $R(3; 4)$ rechtwinklig? Arbeite zuerst grafisch, dann rechnerisch.

- **Aufgabe 4.31**

(1) Welchen Betrag hat der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$?

(2) Finde Parameterdarstellungen für die folgenden Geraden und berechne anschließend den Schnittpunkt:

(3) Liegt der Punkt $P(\frac{5}{3}; \frac{16}{5})$ auf der Geraden $g[A; B]$? Begründe deine Antwort.



Was ergibt $|\overline{AP}| + |\overline{PB}|$?

Ich gebe hier eine kurze Zusammenfassung der Ergebnisse der Ausarbeitungen:

- Aufgabe 4.7 war in praktisch allen Ausarbeitungen richtig durchgeführt. Die notwendigen grafischen Darstellungen erfordern ein eher hohes Maß an Modularität; ich werte das Ergebnis als entsprechende Entwicklung des routinierten Umgangs mit solchen Elementen.

[17] Was tatsächlich im Ablauf des Computerprogramms passiert, ist ohnehin eine andere Frage; die händischen Verfahren ergeben sich oft aus gewissen Notwendigkeiten und Einschränkungen heraus, insoferne gehen Voraussagen, was im Inneren des Computers passiert, meistens von falschen Voraussetzungen aus.

- In Aufgabe 4.15 war der grafische Teil ebenfalls meist vollständig, eine rechnerische Überprüfung (etwa mittels Skalarprodukt) gab es allerdings nur mehr in etwa der Hälfte der Fälle.
- Zu Aufgabe 4.31: Den Betrag des angegebenen Vektors berechneten viele Schüler mit einer damals gemeinsam definierten Betragsfunktion; im Nachhinein wäre es vielleicht aufschlussreicher gewesen, die Frage in zweiter Version anders zu stellen (z. B. „Erkläre, warum der Vektor den Betrag 5 hat.“). Hier zeigt sich also ein klassischer Umgang mit einer Black Box: Der Betrag ist zu berechnen, es gibt eine Funktion hierfür, damit ist die Aufgabe auch gelöst.
- Zu Aufgabe 4.31: Die Parameterdarstellungen machten einem Teil der Schüler Schwierigkeiten; manche Schüler gaben eine funktionale Darstellung der Form $f(x) = k \cdot x + d$ an. Das Skriptum war hier, möglicherweise wegen des großen Umfangs, für einige Schüler keine Hilfe.
- Zu Aufgabe 4.31: Eine interessante, aber nicht-repräsentative Ausarbeitung ist die folgende, die sehr linear ausgeführt ist, aber ein falsches Ergebnis liefert, weil der Schüler unsachgemäß mit der Rechengenauigkeit umgegangen ist:

```
In[164]:=
pA := {-2, 2}
pB := {4, 4}
pP := {5/3, 16/5}

In[168]:=
pA - pP
Out[168]= {-11/3, -6/5}

In[169]:=
Betrag[%]
Out[169]= Sqrt[3349]/15

In[174]:=
a = Sqrt[3349]/15 // N
Out[174]= 3.85804

Der Betrag des Vektors AP ist :   3.85

In[171]:=
pB - pP
Out[171]= {7/3, 4/5}

In[172]:=
Betrag[%]
Out[172]= 37/15
```

```
In[175]:=
b = 37/15 // N
Out[175]= 2.46667

Der Betrag des Vektors BP ist :  2.46

In[176]:=
a + b
Out[176]= 6.3247

In[177]:=
Abstand[pA, pB]
Out[177]= 2 Sqrt[10]

In[178]:=
N[%, 10]
Out[178]= 6.324555320

Es ergibt den Abstand zwischen den
 beiden Punkten pA,
pB. (Kontrolle :  siehe oben).
```

Zum Vergleich rechts eine „klassische“ Auswertung mittels Parameterdarstellung und Gleichungssystem; sie ist sehr lesbar ausgeführt und entspricht einem gängigen Stil: Punkte werden separat definiert, man könnte sie eventuell für eine grafische Darstellung brauchen. Kopfrechnungen finden praktisch nicht statt (ein Richtungsvektor der Geraden wäre z. B. einfach zu ermitteln). Die Ausarbeitung könnte kürzer sein, wäre aber dadurch weniger lesbar.

```
In[47]:= pA = {-2, 2}; pB = {4, 4}; AB = pB - pA;
         pP = {5/3, 16/5};
         g[t_] = pA + t * AB
Out[48]= {-2 + 6 t, 2 + 2 t}

In[49]:= Solve[g[t] == pP]
Out[49]= {}
```

5.5.2 Stunde 2

Hier hatten die Schüler keine Unterlagen zur Verfügung und etwa 50 Minuten Zeit für die folgenden Aufgaben:

A

Die Punkte $A(1;4;9)$, $B(5;9;2)$, $C(10;2;8)$ legen eine Ebene ε fest.
(i) Weise rechnerisch nach, dass der Punkt $D(7, 1, 8)$ nicht in ε liegt.

(ii) Wie muss man die y-Koordinate von D ändern, sodass $D \in \varepsilon$?

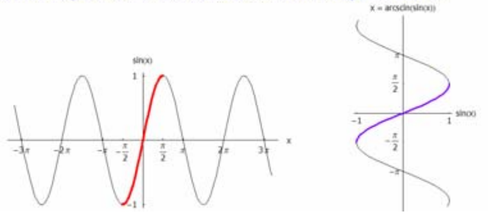
B

(i) Wie viele Gleichungen in wie vielen Variablen ergeben sich beim Schneiden zweier Geraden im $\mathbb{R}^3$?

(ii) Unter welchen Umständen legen ein Punkt und zwei Vektoren keine eindeutige Ebene fest?

(iii) Gib alle Winkel α an, für die $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$ ist.

(iv) Erkläre möglichst ausführlich, welchen Sachverhalt die beiden Diagramme darstellen:



C

Gegeben ist die Folge $\langle x_n \rangle$ mit

```
x[n_] = n - (n^2 - 4)/(n + 1)
```

(i) Erstelle eine grafische Darstellung für die ersten 40 Folgenglieder.

(ii) Die Folge hat ein bestimmtes Monotonieverhalten. Weise dieses nach.

(iii) Welchen Grenzwert könnte die Folge haben? Beweise deine Vermutung.

In kurzer Form die Ergebnisse:

- Aufgabe A wurde in der Mehrzahl der Fälle richtig gelöst, meist in der folgenden Form:

```
In[1]:= pA := {1, 4, 9}; pB := {5, 9, 2};
        pC := {10, 2, 8}; pD := {7, 1, 8};
        ε[s_, t_] := pA + (pB - pA) * s + (pA - pC) * t
        Solve[ε[s, t] == pD]
Out[4]= {}
In[5]:= pD1 := {7, y, 8}
        Solve[ε[s, t] == pD1]
Out[6]= {{s → 3/59, t → -38/59, y → 175/59}}
```

Man müsste die y-Koordinate auf $\frac{175}{59}$ umformen.

Auch hier zeigt sich eine Art „Standard-Arbeitsweise“: wenig externe Rechnung, die Möglichkeit für grafische Darstellung offen lassend, nicht zu kurz.

- Aufgabe B war anscheinend am schwierigsten, Teil (ii) und (iii) wiesen noch die besten Ergebnisse auf. Dass (i) die unterschiedlichsten Antworten ergeben hat, kann man eventuell so erklären: **Solve[]** löst das entsprechende Gleichungssystem, wenn die Objekte richtig definiert sind; man kann an Hand der Lösung erkennen, ob das Ergebnis brauchbar ist. Ich hätte hier etwas bessere Ergebnisse erwartet, da wir verschiedenes Lösungsverhalten von linearen Gleichungssystemen sehr ausführlich besprochen haben. Möglicherweise lag das Kapitel aber schon zu lange zurück, und das Wissen war nicht mehr abrufbar. Es müsste überprüft werden, wie lange ein entsprechendes „Rückholen“ dauern würde.
- Aufgabe C war bis auf Teil (iii) recht zufrieden stellend, aber auch von der Aufgabenstellung eher einfach. Das Umgehen mit grafischen Darstellungen erfolgte recht sicher, das Nachweisen der Monotonie erforderte die richtige Darstellung der Terme und war für manche Schüler nur heuristisch über die grafische Darstellung zu erklären. Ein passender Nachweis einer Schülerin:

```
In[8]:= x[n + Δx] - x[n]
        Simplify[%]
Out[8]= (-4 + n^2)/(1 + n) + Δx - (-4 + (n + Δx)^2)/(1 + n + Δx)
Out[9]= -(3 Δx)/((1 + n) (1 + n + Δx))
```

Monoton fallend weil Δx nach rechts größer wird und die Werte somit kleiner.

5.6 Resümee

Insgesamt denke ich – und Rückmeldungen aus der Klasse bestätigen dies –, dass die Arbeit mit *Mathematica* recht gut voranschreitet. In meinen bisherigen Oberstufenjahrgängen hat sich gezeigt, dass in der 5. und 6. Klasse noch eine gewisse Unruhe und Unsicherheit hinsichtlich des Umgangs mit dem Computer herrscht; die Schüler sind nicht immer ganz sattelfest in ihren Lösungsansätzen und -methoden und brauchen häufig Bestätigung von Lehrer oder Mitschülern. Dieser Zustand verbessert sich meinen Beobachtungen zufolge Ende der 6. bzw. Anfang der 7. Klasse; als Lehrer wird man also etwas Geduld aufbringen, die sich bis zur Reifeprüfung hin als gut investiert erweist. Unter diesen Gesichtspunkten liegt die Projektklasse im Moment ganz gut, im Bezug auf Sicherheit im Umgang mit mathematischen Begriffen und Konzepten muss ich allerdings noch investieren, dies haben – neben Beobachtungen im laufenden Unterricht – auch die beiden punktuellen Teststunden gezeigt.

Welcher Entwicklung unterliegen modulare Arbeitsweisen im Lauf eines Schuljahres? Ich denke, die Schüler arbeiten routinierter und ökonomischer, sie „verlaufen“ sich weniger. Zusätzlich reagieren die Schüler flexibler auf Hinweise von außen und setzen Verbesserungsvorschläge besser um. Einer vermuteten Korrelation zur Schulnote würde ich zustimmen, auch wenn die Arbeitsweisen schwer quantifizierbar sind; es gibt in jedem Fall einen Zusammenhang, der auf der Anzahl der möglichen Lösungswege basiert – je eingeschränkter die Möglichkeiten, desto weniger wahrscheinlich eine richtige Ausarbeitung einer Aufgabe. Zusätzlich sind einige Arbeitsweisen Voraussetzung für mathematische Tätigkeiten: Schüler, die keine Datenliste zerlegen können, werden es schwer mit der Antwort auf eine Frage zu einem zu erstellenden Kastenschaubild haben.

Beobachtungen zum Umgang mit Black Boxen wie etwa bei der Partialbruchzerlegung lassen vermuten, dass die Schüler eher unverkrampft mit fehlender Information umgehen. Sobald sie wissen, in welchem Rahmen sie eine bestimmte Funktion einsetzen können, verwenden sie diese wie jede andere Funktion auch. Hier wären noch weitere, fundiertere Untersuchungen interessant, vor allem auf Basis direkter Rückmeldungen der Schüler. Dies habe ich aus Zeitgründen (der „normale“ Unterricht musste auch noch stattfinden) nicht geschafft.

Zum Schluss noch kurz zu den motivatorischen Aspekten: Es hat sich in der Klasse eine recht intesive Kommunikation über Mathematik entwickelt. Die Schüler tauschen sich vor allem über Aufgaben aus, arbeiten in Stunden zusammen (oft in wechselnder Konstellation) und nehmen Anregungen und Hilfe aus Lehrer-Schüler-Gesprächen mit. Diese Entwicklung sehen die Schüler laut eigenen Aussagen als sehr positiv an. Dass die Klasse einen eher Non-Standard-Unterricht erfährt, wird einerseits positiv gewertet („man sieht, was man alles machen kann“, „man muss auch nachdenken, nicht nur herunterrechnen“), andererseits allerdings auch als problematisch gesehen, weil Hilfe von außerhalb der Klasse eher schwer möglich ist. Insgesamt nehme ich eine positive Stimmung und gewisse Zufriedenheit der Schüler mit der mathematischen Tätigkeit wahr und führe dies auch zum Teil auf die freiere Arbeit mit dem Computer zurück.

6 LITERATUR

[Buc89] BUCHBERGER, Bruno (1989): *Should Students Learn Integration Rules?* RISC-Linz Series no. 89 07.1.

[Coh03] COHEN, Joel S. (2003): *Computer Algebra and Symbolic Computation*. AK Peters.

[DaB06] DANGL, Martin; BINDER, Markus (2006): *Der Einsatz von Mathematica im Mathematikunterricht der AHS-Oberstufe*. http://imst.uni-klu.ac.at/materialien/2006/1167_327_Langfassung_Dangl_Binder.pdf (1.7.2007).

[Fis06] FISCHER, Roland (2006): *Materialisierung und Organisation. Zur kulturellen Bedeutung der Mathematik*. München/Wien: Profil.

[FisHA] FISCHER, Roland (o. J.): *Höhere Allgemeinbildung*. Universität Klagenfurt, unveröffentlichtes Typoskript.

[His03] HISCHER, Horst (2003): *Neue Medien und (Allgemein-)Bildung – dargestellt am Beispiel des Mathematikunterrichts*. In: Schwill, Andreas (Hrsg.): Grundfragen multimedialer Lehre, S. 67-85.

[HKL96] HEUGL, Helmut; KLINGER, Walter; LECHNER, Josef (1996): *Mathematikunterricht mit Computeralgebra-Systemen*. Bonn: Addison Wesley.

[Krä98] KRÄMER, Sybille (1998): *Das Medium als Spur und als Apparat*. In: Krämer, Sybille (Hrsg.): Medien, Computer, Realität. Wirklichkeitsvorstellungen und Neue Medien. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

[KuK00] KUTZLER, Bernhard; KOKOL-VOLJC, Vlasta (2000): *Introduction to Derive 5*.

[Leh02] LEHMANN, Eberhard (2002): *Mathematiklehren mit Computeralgebra-system-Bausteinen*. Hildesheim: Franzbecker.

[NN06] N. N. (2006): *Fachdidaktische Analyse von Maturaaufgaben*. Pädagogisches Institut Niederösterreich, unveröffentlicht.

[Pes99] PESCHEK, Werner (1999): *Mathematische Bildung meint auch Verzicht auf Wissen*. In: Kadunz, Gert et al (Hrsg.), Mathematische Bildung und Neue Technologien, S. 263-270 Stuttgart: Teubner.

[Sch02] SCHNEIDER, Edith (2002): *Computeralgebrasysteme in einem allgemeinbildenden Mathematikunterricht. Didaktische Orientierungen – Praktische Erfahrungen*. München/Wien: Profil.

[Wol03] WOLFRAM, Stephen (2003): *The Mathematica Book, Fifth Edition*. Wolfram Media, 5. Auflage.