

Michael Sablatschan

Sinnhaftigkeit von Herleitungen

PFL-Mathematik, Nr. 15

IFF: Klagenfurt 1994

Redaktion:

Bernhard Kröpfl

Die Hochschullehrgänge "Pädagogik und Fachdidaktik für LehrerInnen" (PFL) sind interdisziplinäre Lehrerfortbildungsprogramme der Abteilung "Schule und gesellschaftliches Lernen" des IFF. Die Durchführung der Lehrgänge erfolgt mit Unterstützung von BMUK, BMWF und den Pädagogischen Instituten des Bundes in Kärnten und Wien.

Reihe "Pädagogik und Fachdidaktik für LehrerInnen"

Herausgegeben von der

Abteilung "Schule und gesellschaftliches Lernen"

des Interuniversitären Instituts für interdisziplinäre Forschung und Fortbildung

In dieser Reihe veröffentlicht die Abteilung "Schule und gesellschaftliches Lernen" des Interuniversitären Instituts für interdisziplinäre Forschung und Fortbildung (IFF) Dokumentations-, Forschungs- und Entwicklungsarbeiten von TeilnehmerInnen der PFL-Lehrgänge, um sie einer breiteren Öffentlichkeit zugänglich zu machen.

Der Nachdruck, auch auszugsweise, ist nur mit Zustimmung des Instituts gestattet.

Exemplare können gegen Ersatz der Kopierkosten bei folgender Adresse angefordert werden:

IFF/Schule und gesellschaftliches Lernen
Reihe "PFL"
Sterneckstraße 15
A-9020 Klagenfurt

Sinnhaftigkeit von Herleitungen

Inhaltsverzeichnis:

1. Ausgangspunkt und Methodenwahl	2
2. Interview mit dem Lehrer	3
3. Die Unterrichtsstunde	4
4. Analyse der erhobenen Daten	7
4.1 Auswertung des Fragebogens 1	
4.2 Auswertung des Arbeitsblattes	
4.3 Gegenüberstellung von Fragebogen 1 und Fragebogen 2	
5. Interviews nach der Stunde	12
5.1 Interview mit den Schülern	
5.2 Interview mit dem Lehrer nach der Befragung der Schüler	
5.3 Resümee der Interviews	
6. Konsequenzen für meinen Unterricht	18

1. Ausgangspunkt und Methodenwahl

Beim Versuch, die Schüler Mathematik möglichst verständlich und einprägsam zu lehren, stellte sich immer wieder eine gewisse Unzufriedenheit bezüglich der Vorgangsweise ein. Ich hatte oft das Gefühl, daß Herleitungen gewisser Sätze oder Begriffe zu viel Zeit in Anspruch nahmen, daß es vielleicht sinnvoller wäre, stattdessen mehr Beispiele zu rechnen.

Durch den PFL-Lehrgang hatte ich die Möglichkeit, den Wert, den solche Herleitungen für Lehrer und Schüler darstellen, zu erforschen.

Die größte Schwierigkeit ergab sich bei der Auswahl des richtigen Analyseverfahrens und der entsprechenden Vorgangsweise.

Der erste Schritt war, die Vermutungen über die Vor- und Nachteile von Herleitungen klar zu formulieren und zu Papier zu bringen.

Was könnte für *Herleitungen* sprechen?

Den leistungsmäßig besseren Schülern bringen die Herleitungen *Sicherheit*.

Sie fördern das *Denken* (Suchen nach neuen Strategien).

Sie erfordern die Anwendung des *vorher Gelernten* (Gleichungssysteme, Anwendung von Winkelfunktionen in rechtwinkligen Dreiecken, ...).

Sie ermöglichen einen Einblick und liefern *Hintergrundwissen* (was steckt dahinter?).

Sie ermöglichen die Entdeckung von *Zusammenhängen*.

Was könnte *gegen Herleitungen* sprechen?

Für schwächere Schüler ist die Herleitung gleich Freizeit ("wird ja nicht geprüft").

Für spätere Anwendungen sind sie nicht direkt notwendig.

Es schien wenig sinnvoll, nur mit einem Fragebogen die Antwort auf obige Vermutungen zu bekommen, denn ein Fragebogen alleine bietet nicht die Möglichkeit, entsprechend "in die Tiefe" zu gehen.

Ich entschied mich daher für folgende *Vorgangsweise*:

- *Interview mit dem Lehrer (Vorschau)*
Dieses Interview (durchgeführt von einem Lehrerkollegen einer anderen Schule) sollte die Ausgangssituation beschreiben, um einen etwaigen Meinungswandel meinerseits nach der Auswertung der Unterlagen besser dokumentieren zu können.
- *Fragebogen (Meinungen über Herleitungen vor der Bearbeitung des Arbeitsblattes)*
Der Fragebogen wurde erarbeitet, um von möglichst allen Schülern die Meinung zu diesem Thema zu erfahren. Der Fragebogen hat den Vorteil, daß die Schüler anonym bleiben und so eher bereit sind, ehrliche Antworten zu geben.
- *Arbeitsblatt*
Dieses Arbeitsblatt gibt dem Schüler zunächst eine Anleitung zum Herleiten des Sinussatzes für ein spitzwinkeliges Dreieck. Im nächsten Schritt wird die Allgemeingültigkeit des Sinussatzes angezweifelt. Die Schüler haben die Aufgabe, die Gültigkeit auch

für stumpfwinkelige Dreiecke nachzuweisen. Mein Ziel ist, den Schülern mit einer solchen Fragestellung den Wert von Herleitungen, bzw. den Wert des selbständigen Erarbeitens von häufig verwendeten Formeln, vor Augen zu führen.

Mit der Aufgabe, den Kosinussatz herzuleiten, soll überprüft werden, ob das vorher Behandelte bei anderen Fragestellungen umgesetzt bzw. ergänzt werden kann.

- *Noch einmal Fragebogen*
Derselbe Fragebogen soll *nach* der Bearbeitung des Arbeitsblattes noch einmal ausgefüllt werden. Damit beabsichtige ich, zu überprüfen, ob und wie sich die Einstellung zu Herleitungen geändert hat.
- *Interview mit den Schülern*
Interviews ermöglichen einen direkteren Zugang zu den Schülern als Fragebögen. Sie haben zudem auch den Vorteil, daß bei Unklarheiten auch nachgefragt werden kann.
- *Abschlußinterview mit dem Lehrer*
Für die Untersuchung habe ich die 2 CHM (Abteilung für Maschinenbau der HTL Lastenstraße, Klagenfurt) gewählt, in der ich auch Klassenvorstand bin. In dieser Klasse wurde der Sinussatz (mittels Zerlegung des allgemeinen Dreiecks in zwei rechtwinkelige) hergeleitet. Der Kosinussatz wurde ohne besondere Herleitung bzw. nachfolgenden Beweis präsentiert. Von 32 Schülern der Klasse waren 23 anwesend (letzte Schulwoche!). Für die Bearbeitung des Fragebogens und des Arbeitsblattes hatten die Schüler eine Unterrichtsstunde Zeit.

2. Interview mit dem Lehrer

Im folgenden Interview beschreibe ich (Lehrer) meine Planung für die Unterrichtsstunde einem Kollegen einer anderen Schule (Interviewer).

Interviewer: Warum gibt es diese heutige Stunde und was willst Du in dieser Stunde von Deinen Schülern erfahren?

Lehrer: Weil ich Unsicherheiten bezüglich Herleitungen von mathematischen Sätzen loswerden will.

(. . .)

Interviewer: Welches Ergebnis vermutest Du?

Lehrer: Für die Arbeit in Gruppen erwarte ich mir, daß sie den Sinussatz schon herleiten können. Beim Kosinussatz erwarte ich mir, daß ihn lediglich die besten Schüler annähernd herleiten können. Eine vollständige Lösung erwarte ich nicht.

Interviewer: Hast Du eine Vermutung zu den allgemeinen Fragen zu den Herleitungen?

Lehrer: Ich vermute, daß die Einstellung der meisten Schüler dazu eher negativ ist.

Interviewer: Ist diese vermutete Einstellung Dein Problem?

Lehrer: Ja, ich möchte auch Hintergrundwissen vermitteln und nicht nur Rezepte für

- diverse Berechnungen liefern, sondern auch auf Querverbindungen hinweisen.
- Interviewer: Wie müßte die Untersuchung ausgehen, damit Du mehr Mut dazu hättest, das zu tun, was Du jetzt gesagt hast? Versprichst Du Dir eine Hilfe in dieser Richtung?
- Lehrer: Ja, schon. Damit ich den Stellenwert eindeutig feststellen kann, wieviel positiv, wieviel negativ dazu eingestellt sind und vielleicht welche Schüler das sind, ob es die besseren oder die schlechteren Schüler sind.
Ich vermute, daß die besseren Schüler diesbezüglich mehr Information verlangen.

3. Die Unterrichtsstunde

Die Schüler werden zunächst über die Untersuchung informiert, dann werden die Fragebögen zur Bearbeitung ausgeteilt. Sie erhalten für die Beantwortung der Fragen 10 Minuten Zeit.

FRAGEBOGEN

- a) Herleitungen sind für den Mathematiker wichtig, aber nicht für den Techniker.

stimmt gar nicht 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 stimmt absolut

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

- b) Die sichere Anwendung von mathematischen Sätzen fällt mir leichter, wenn ich weiß, wie man zu solchen Sätzen kommt.

stimmt gar nicht 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 stimmt absolut

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

- c) Herleitungen verunsichern mich.

stimmt gar nicht 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 stimmt absolut

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

- d) Das Erkennen mathematischer Zusammenhänge wird Durch Herleitungen oder Beweise geschult.

stimmt gar nicht 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 stimmt absolut

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

- e) Ich kann mich noch an die Herleitung, oder den Beweis weiterer mathem. Sachverhalte erinnern (Beispiele aus dem 1. u. 2. Jahrgang).

ja nein

- f) Um Beweise oder Herleitungen durchführen zu können, muß man die Grundlagen besser beherrschen als beim Rechnen von Beispielen.

stimmt gar nicht 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 stimmt absolut

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

- g) Ich finde es unsinnig, bereits gefundene Sätze noch einmal herzuleiten, bzw. zu beweisen.

stimmt gar nicht 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 stimmt absolut

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

- h) Bloßes Beispielrechnen ist mir zu wenig.

stimmt gar nicht 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 stimmt absolut

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Kurzaufsatz: Wozu braucht man Sinus- und Kosinussatz?

Nachdem der Fragebogen ausgefüllt war, wurde ein Arbeitsblatt ausgeteilt (siehe folgende Seite!).

Die Schüler hatten dafür einen Zeitrahmen von 20 Minuten zur Verfügung.

Um Informationen über das Arbeiten in den Gruppen zu gewinnen, wurde noch zusätzlich ein Mikrofon aufgestellt.

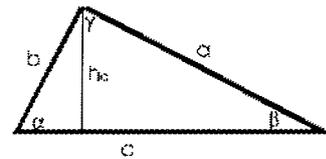
ARBEITSBLATT

Herleitung von Sinus- und Kosinussatz

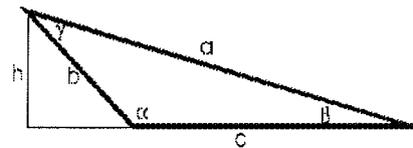
Der Sinussatz wurde durch die Zerlegung eines allgemeinen Dreiecks in zwei rechtwinkelige gefunden (hergeleitet).

$$\begin{aligned} h_c &= b \sin \alpha \\ h_c &= a \sin \beta \quad \implies b \sin \alpha = a \sin \beta \end{aligned}$$

$$\implies \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \dots$$



1. Gilt der Sinussatz auch bei Dreiecken nebenstehender Form? Versuchen Sie die Gültigkeit nachzuweisen.



2. Formulieren Sie den Kosinussatz und versuchen Sie auch, die allgemeine Gültigkeit dieses Satzes nachzuweisen.

Nach 20 Minuten intensiver Arbeit wurde das Arbeitsblatt abgesammelt und es konnte der Fragebogen, diesmal unter dem Eindruck des Arbeitsblattes bearbeitet werden.

4. Analyse der erhobenen Daten

4.1 Auswertung des Fragebogens 1

a) *Herleitungen sind für den Mathematiker wichtig, aber nicht für den Techniker.*

stimmt gar nicht	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	stimmt absolut
Median: 2	10	2	2	1	3	1	2	0	0	2	

Die Antworten auf die *Frage a)* zeigen, daß für ungefähr die Hälfte der Schüler der 2 CHM, die ja Techniker werden wollen, Herleitungen von Bedeutung sind. Lediglich für zwei Schüler sind sie unwichtig.

b) *Die sichere Anwendung von mathematischen Sätzen fällt mir leichter, wenn ich weiß, wie man zu solchen Sätzen kommt.*

stimmt gar nicht	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	stimmt absolut
Median: 8	1	1	1	4	2	0	1	3	1	9	

Die Antworten auf b) zeigen, daß auch für die sichere Anwendung mathematischer Sätze für ungefähr die Hälfte der Schüler Herleitungen nützlich sind.

Bemerkung eines Schülers dazu: "Wenn man etwas selber herleitet, fällt es einem viel leichter, damit zu rechnen, weil man weiß, wie man dazu gekommen ist."

c) *Herleitungen verunsichern mich.*

stimmt gar nicht	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	stimmt absolut
Median: 5	7	0	2	1	3	3	2	3	1	1	

Auf die Frage, ob Herleitungen verunsichern, antworteten 7 von 23 Schülern mit Nein. Ein Schüler antwortete mit Ja, die restlichen Schüler wählten die anderen Werte der Skala (relativ gleichmäßig verteilt).

d) *Das Erkennen mathematischer Zusammenhänge wird durch Herleitungen oder Beweise geschult.*

stimmt gar nicht	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	stimmt absolut
Median: 9	0	1	0	1	1	1	2	4	5	8	vor Frageb. 2

Die hier abgegebenen Antworten zeigen, daß die meisten Schüler den Wert für das Erkennen von Zusammenhängen hoch einschätzen. Die Erarbeitung von diversen Zusammenhängen ist meist erwünscht.

e) *Ich kann mich noch an die Herleitung, oder den Beweis weiterer mathem. Sachverhalte erinnern (Beispiele aus dem 1. u. 2. Jahrgang).*

JA: 13 Schüler NEIN: 8 Schüler ENTHALTUNGEN: 2 Schüler

Von den dreizehn Schülern, die Herleitungen angeben konnten, wurden die verschiedensten Bereiche angegeben. Einige konnten Beispiele aus der Mechanik bzw. Physik nennen.

Folgende Herleitungen wurden angegeben:

Pythagoräischer Lehrsatz, Sinussatz, Flächenberechnungen,
Winkelfunktionen, Lösungsformel der quadratischen Gleichung,
Logarithmus, Lösung einer Exponentialgleichung.

Bemerkung eines Schülers: "Bei Prof. Sablatschan haben wir viele Herleitungen gemacht, aber an die Herleitung selbst, wie sie geht, kann ich mich nicht mehr erinnern. Ich halte sie nicht für zweckmäßig. Ich kann mich an keine Herleitung erinnern."

f) *Um Beweise oder Herleitungen durchführen zu können, muß man die Grundlagen besser beherrschen als beim Rechnen von Beispielen.*

stimmt gar nicht 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 stimmt absolut
Median: 7

1	0	2	1	4	0	5	0	3	7
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Die Antworten bestätigen meine Vermutung.

g) *Ich finde es unsinnig, bereits gefundene Sätze noch einmal herzuleiten bzw. zu beweisen.*

stimmt gar nicht 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 stimmt absolut
Median: 3

6	2	5	0	6	0	1	2	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Mit dieser Frage wollte ich überprüfen, inwieweit die Schüler bereit sind, eine gewisse "Forschungsaufgabe" zu übernehmen. Die Antworten weisen darauf hin, daß ein großer Teil dazu bereit wäre, nur wenige nicht.

h) *Bloßes Beispielrechnen ist mir zu wenig.*

stimmt gar nicht 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 stimmt absolut
Median: 7

2	1	2	1	5	0	3	1	2	6
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Punkt h) sollte Aufschluß über die Wertigkeit von Beispielrechnen einerseits und Erarbeitung von Herleitungen bzw. Beweisen andererseits geben.

Das Ergebnis kam für mich nicht unerwartet, denn die Schüler, die bei Schularbeiten nur vereinzelt Beweise durchführen müssen, haben verständlicherweise mehr Interesse an konkreten Beispielen.

Beim Kurzaufsatz "Wozu braucht man Sinus- und Kosinussatz?" konnten alle Schüler die Anwendung bei der Berechnung von schiefwinkligen Dreiecken angeben. Einige gaben auch

Hinweise zu diversen Anwendungen in der Technik.

4.2 Auswertung des Arbeitsblattes

Die Herleitung des Sinussatzes wurde auf einem Arbeitsblatt für ein spitzwinkeliges Dreieck vorgegeben.

Die Schüler hatten als erste Aufgabe die Gültigkeit des Sinussatzes auch für stumpfwinkelige Dreiecke herzuleiten.

Es wurde ihnen freigestellt, in kleinen Gruppen, oder alleine zu arbeiten.

Von den 23 Schülern hatten bis auf drei alle zumindest einen richtigen Lösungsansatz gefunden. Von sieben Schülern wurde der Satz richtig bewiesen, wobei einer noch den Hinweis auf Mehrfachlösungen machte.

Die restlichen Schüler scheiterten erst am Sinus des Supplementwinkels.

Eine Gruppe hat eine elegante Lösung gefunden, indem die *Höhe* h_a eingezeichnet und der restliche Beweis wie oben durchgeführt wurde.

Sechs Schüler konnten die Zerlegung richtig durchführen. Sie erkannten aber nicht, daß der $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ ist.

Sieben Schüler konnten auch diese Hürde nehmen und damit den Satz beweisen. Einer berücksichtigte auch die Möglichkeit von *Mehrfachlösungen*.

Von einer Gruppe wurde die Arbeit mit dem Sinussatz auf Band aufgezeichnet.

Einige Auszüge daraus zeigen Gedanken und Arbeitsweisen der Schüler.

Michael : Was tust Du denn da? Du gehst ja nicht davon aus, daß Du den Winkel gegeben hast! Es geht nicht darum, daß Du die Seite ausrechnen sollst, es geht nur darum, daß Du beweisen sollst, daß Du $h_c = b \sin \alpha$ und $h_c = a \sin \beta$ gleichsetzen kannst.

Harald : Jetzt werde ich Dir etwas mit dem Taschenrechner zeigen.
(Er zeigt mit dem Taschenrechner anhand eines konkreten Winkels, daß $\sin 30^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ)$ ist.)
Daraufhin bemerkt er: "der $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, sagt der Taschenrechner."

Dieter : Na gut, aber wie willst Du das jetzt mit h_c machen?
(Er weist damit darauf hin, daß der dritte Teil des Satzes noch nicht bewiesen ist.)

Harald : Das mit h_c ist eine ganz eigene Sache.

(. . .)

Die Tonaufzeichnungen bei der Herleitung des Kosinussatzes zeigten weitere Aspekte auf, die bei der Untersuchung gar nicht eingeplant waren. Das Mikrofon wurde bei einer anderen Gruppe aufgestellt.

Herwig : h_c ist $\sin \alpha$ mal b
 h_c ist $\sin \beta$ mal a
weiß man, das ist vom Pythagoras

Herwig : Christian, arbeite selbst, schreib nicht immer von uns ab!
 $c =$ im Pythagoras - das ist das c in dem Dreieck ... und dem eingeschlosse-

- nen Winkel, warum?
 Herwig : Vom Pythagoras wird das abgezogen, warum?
 Im rechtwinkligen Dreieck ist c größer als im anderen. Es wird vom anderen eine Strecke abgezogen; diese Strecke müßte man kennen, das wäre $a \cdot \cos \gamma$. Wo ist das? γ ist oben, das wäre $a \cdot b$, warum $a \cdot b$? - \cos ist Ankathete durch Hypotenuse.
 Martin : Das kannst Du nicht so machen!
 Herwig : Christian, was ist der Kosinus von 90° ? Weißt Du nicht! Ich habe gleich gewußt, daß er 0 ist. Reiter, Du bist schwach!
 Christian : Herwig, Du hast ein "Sehr gut" in Mathematik und bringst das nicht einmal zusammen.

Herwig ist der beste Mathematiker in der Klasse und eigentlich recht hilfsbereit. Er trat in dieser Gruppe sehr dominant auf. Überrascht hat mich auch, daß er seinen Kollegen, der in Mathematik immer Schwierigkeiten hatte, bloßgestellt hat.

Diese Aufzeichnung zeigt, daß auch die soziale Komponente stark hineinspielt, daß schwächere Schüler oft Schwierigkeiten haben, auch nur einen kleinen Lösungsansatz zu präsentieren. Bei der Herleitung des Sinussatzes hatte Herwig keine Schwierigkeiten, aber beim Kosinussatz blieb er mit seiner ganzen Gruppe stecken. Mit dem Beweis des Kosinussatzes war die ganze Klasse überfordert, denn niemand vermochte, diesen Beweis zu erbringen, auch nicht Herwig.

4.3 Gegenüberstellung von Fragebogen 1 und Fragebogen 2

Hier werden die Ergebnisse der Fragebögen vor, bzw. nach dem Bearbeiten des Arbeitsblattes, miteinander verglichen. Mit der Beantwortung der Fragen vorher und nachher wollte ich erkunden, ob sich bei den Schülern eine gewisse Bewußtseinsänderung einstellt, wenn sie mit den Problemen direkt konfrontiert werden.

Die Ergebnisse wurden zum besseren Vergleich direkt übereinander geschrieben. Wenn zu Fragebogen 1 keine gravierenden Abweichungen ersichtlich waren, wurde auf einen zusätzlichen Kommentar verzichtet.

Es bleibt dem Leser überlassen, noch weitere Schlußfolgerungen aus der Zusammenstellung zu ziehen.

a) Herleitungen sind für den Mathematiker wichtig, aber nicht für den Techniker.

stimmt gar nicht	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	stimmt absolut
Median: 2	10	2	2	1	3	1	2	0	0	2	vor Arbeitsblatt
Median: 2	10	3	3	2	1	2	1	0	0	1	nach Arbeitsblatt

b) Die sichere Anwendung von mathematischen Sätzen fällt mir leichter, wenn ich weiß, wie man zu solchen Sätzen kommt.

stimmt gar nicht	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	stimmt absolut
Median: 8	1	1	1	4	2	0	1	3	1	9	vor
Median: 9	1	1	3	0	1	1	1	2	2	11	nach

Interessant sind die Antworten nach der Bearbeitung des Arbeitsblattes, denn hier gibt es keinen Schüler mehr, der Herleitungen für die sichere Anwendung absolut nicht mehr benötigt, dafür messen zusätzlich zwei Schüler mehr den Herleitungen größere Bedeutung zu.

Bemerkung eines Schülers dazu: "Wenn man etwas selber herleitet, fällt es einem viel leichter, damit zu rechnen, weil man weiß, wie man dazu gekommen ist."

c) Herleitungen verunsichern mich.

stimmt gar nicht	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	stimmt absolut
Median: 5	7	0	2	1	3	3	2	3	1	1	vor Arbeitsblatt
Median: 5	4	3	2	2	3	3	1	0	3	2	nach Arbeitsblatt

Vor der Bearbeitung des Arbeitsblattes antworteten 7 Schüler mit Nein, danach nur mehr 4. Vielleicht hatte das Arbeitsblatt doch eine verunsichernde Wirkung.

d) Das Erkennen mathematischer Zusammenhänge wird durch Herleitungen oder Beweise geschult.

stimmt gar nicht	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	stimmt absolut
Median: 9	0	1	0	1	1	1	2	4	5	8	vor Arbeitsblatt
Median: 9	0	1	2	1	3	0	1	1	5	9	nach Arbeitsblatt

f) Um Beweise oder Herleitungen durchführen zu können, muß man die Grundlagen besser beherrschen als beim Rechnen von Beispielen.

stimmt gar nicht	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	stimmt absolut
Median: 7	1	0	2	1	4	0	5	0	3	7	vor Arbeitsblatt
Median: 9	2	0	2	1	0	0	4	2	2	10	nach Arbeitsblatt

Interessant ist die Tatsache, daß nach der Bearbeitung von Fragebogen 2 wesentlich mehr Schüler die Bedeutung des Grundlagenwissens höher eingeschätzt haben (Medianwerte von 7 auf 9).

g) Ich finde es unsinnig, bereits gefundene Sätze noch einmal herzuleiten bzw. zu beweisen.

stimmt gar nicht	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	stimmt absolut
Median: 3	6	2	5	0	6	0	1	2	1	0	vor Arbeitsblatt
Median: 4	5	3	3	2	6	1	0	1	1	1	nach Arbeitsblatt

h) Bloßes Beispielrechnen ist mir zu wenig.

stimmt gar nicht	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	stimmt absolut
Median: 7	2	1	2	1	5	0	3	1	2	6	vor Arbeitsblatt
Median: 7	2	0	2	0	7	0	3	1	4	4	nach Arbeitsblatt

Abschließend kann man zur Arbeit mit dem Fragebogen und Arbeitsblatt sagen, daß der Eifer mit dem gearbeitet wurde, überrascht hat. Bis auf ein paar Schüler hatten alle mit Begeisterung mitgemacht.

5. Interviews nach der Stunde

5.1 Interview mit den Schülern

Die Fragebögen, Arbeitsblätter und Tonaufzeichnungen von den Gruppen konnten einige Erkenntnisse über die Akzeptanz von Herleitungen bringen. Im Fall Herwig konnte ich erkennen, daß auch unter den Schülern gewisse Rivalitäten herrschen, die im gewöhnlichen Unterricht nicht bemerkt wurden.

Dennoch können diese Hilfsmittel keine so tiefgreifenden Informationen liefern, wie Interviews. Aus diesem Grunde wurden nach der Unterrichtsstunde noch drei Schüler interviewt. Solche Interviews können einen Einblick in die Denkweise und die Gefühlswelt der Schüler - hier mit Hauptaugenmerk auf Herleitungen - geben.

Um möglichst ehrliche Antworten zu erhalten, wurden die Interviews nicht vom Klassenlehrer selbst, sondern von einem Lehrerkollegen durchgeführt.

Interview mit Gerold, einem guten Schüler

Interviewer : Zuerst möchte ich Dir erklären, warum es dieses Interview überhaupt gibt: Eine generelle Erhebung der Schülermeinungen zum Herleiten und auch der Fähigkeiten, wie gut Schüler schon herleiten können, ist jetzt schriftlich gemacht worden. Damit ergibt sich ein Bild für die ganze Klasse. Natürlich können dabei nicht spezielle Fragen in die Tiefe gehend beantwortet werden, sondern es gibt eher einen generellen Überblick über die Klassensituation. Ergänzend dazu möchte Dein Lehrer auch Informationen von einzelnen Schülern haben. Nicht, um zu wissen, welcher Schüler jetzt wieviel weiß, oder was er denkt. Es geht dem Lehrer nicht darum, zu wissen, was Du speziell über

- die Sache denkst, sondern was einzelne Schüler denken. Erste Frage zu meiner Orientierung: Bist Du ein guter Mathematiker oder ein eher schlechter?
- Gerold : Ich habe eigentlich nie Probleme in Mathematik gehabt.
- Interviewer : Was glaubst Du, das der Lehrer in dieser ersten Stunde herausfinden wollte?
- Gerold : Eigentlich nur einen Überblick über das allgemeine Bild in der Klasse, als Zusammenfassung über die letzten zwei Jahre, was wir in Mathematik gehabt haben, was da ungefähr hängengeblieben ist und wie sich das entwickelt hat, ob die Schüler mehr aufnehmen oder ob sie ihr eigenes Wissen abbauen. Das ist eigentlich alles.
- Interviewer : Speziell zum Sinus- und Kosinussatz. Warum glaubst Du, hat er gerade dieses Beispiel ausgesucht?
- Gerold : Ja, weil das war heuer in der zweiten Klasse eines der Hauptthemen im Mathematikunterricht.
- Interviewer : Wie schaut es bei Dir aus, was ist bei Dir hängengeblieben?
- Gerold : Wichtige Grundlagen, die man wieder benötigt und die immer wieder in die Mathematik eingebaut werden, bleiben eigentlich schon im Hinterkopf irgendwo hängen, aber Herleitungen und so, die wir speziell jetzt bei dieser Befragung ausgearbeitet haben, eigentlich weniger.

Auf die Frage, warum Herleitungen nicht so gut hängenbleiben, antwortete er, daß sie meistens kompliziert seien. Zur Wichtigkeit von Herleitungen meinte er, wenn nicht nur bloße Formeln verwendet würden, daß man dann "... weiß, wie man das bekommt und wofür man das eigentlich braucht."

- Interviewer : Habe ich Dich richtig verstanden, wenn Du meinst, daß solche Herleitungen ein Hintergrundwissen liefern, das zusätzlich interessant ist?
- Gerold : Ja, sicher, weil es wird auch in der Technik oft gebraucht.
- Interviewer : Was würde Dir persönlich abgehen, wenn man mit Sinus- und Kosinussatz, um bei dem Beispiel zu bleiben, arbeitet und rechnet, aber die Herleitung nicht weiß?
- Gerold : Ja, zum Beispiel hätte ich eine Formel, die ich einfach vorgesetzt bekomme, mit der ich zum Beispiel ein Dreieck berechnen kann, aber ich weiß eigentlich nicht warum und woher das kommt.
Ich könnte später, wenn mich irgendjemand einmal frägt, warum und wozu, ich könnte das niemandem erklären.
- (. . .)
- Interviewer : Und wenn man als Schüler die Herleitung nicht kennt, ändert sich dann die Situation für den Schüler?
- Gerold : Nein, das eigentlich nicht, weil zum Rechnen hat man immer das gleiche, es kommt auf das persönliche Interesse des Schülers an, ob man das wissen will, oder ob man sich einfach die Formel einprägt und dann immer damit rechnet.
- (. . .)
- Interviewer : Sind Herleitungen Deiner Meinung nach ein wichtiger Bestandteil des Mathematikunterrichts überhaupt, oder ist es nur für Dich persönlich wichtig?

- Gerold : Ich kann jetzt nur von mir sprechen, aber ich glaube schon, daß es wichtig ist, denn wenn ich die Herleitung nicht weiß und einfach so vorgeschmissen bekomme, dann ist es ungefähr so, wie im Computer, dann gebe ich Daten ein und dann spuckt er mir die Daten wieder aus und im Prinzip weiß ich eigentlich nicht, was er da getan hat.
- Interviewer : Kannst Du Dich an gewisse Situationen im Mathematikunterricht erinnern, wo es Dir der Herleitung zu viel war, oder kannst Du Dich umgekehrt an Situationen erinnern, wo Du eine Herleitung gerne gehabt hättest und sie nicht gekommen ist?
- Gerold : Spezielle Beispiele weiß ich jetzt eigentlich keine. Wir haben schon Herleitungen gemacht, wo ich eigentlich erst hinterher draufgekommen bin, wie das überhaupt funktioniert.
- Interviewer : Möchtest Du zu diesem Fragenkomplex noch etwas sagen was Dir wichtig ist?
- Gerold : Eigentlich nicht, danke.

Interview mit Gernot, einem mathematisch eher schwachen Schüler

- Interviewer : Was glaubst Du, worum ist es dem Lehrer in den letzten eineinhalb Stunden gegangen, warum macht er das jetzt, was er mit Euch gemacht hat?
- Gernot : Ja, vielleicht wollte er damit bezwecken, daß er einen Test macht in einem Projekt, oder was das sein soll, daß die Schüler dann doch daran denken, mehr zu lernen, daß sie sehen, wenn es um so etwas geht, ob sie wirklich etwas gelernt haben und ob sie die Grundlagen kennen.
- (. . .)
- Interviewer : Habt ihr im Mathematikunterricht öfter Gruppenarbeit?
- Gernot : Eher selten.
- Interviewer : Hättest Du gerne mehr?
- Gernot : Ja es wäre vielleicht schon leichter ...
- Interviewer : Ein Thema der heutigen Stunde war für Deinen Lehrer: Wie wichtig ist das Herleiten von Sätzen? Da war in diesem Beispiel, das vorgezeigt war, zunächst der Sinussatz hergeleitet.
Dein Lehrer möchte jetzt wissen, was ihr von solchen Herleitungen haltet, ob ihr glaubt, daß sie für Euch im Unterricht wichtig sind. Wie stehst Du generell dazu?
- Gernot : Ich finde, die Herleitungen sind dafür da, wenn man eine Formel so hergeklatscht bekommt, dann lernt man sie halt auswendig und weiß vielleicht auch, wo man es verwenden kann, aber was man eigentlich rechnet, das weiß man nicht, und wenn man es herleitet, dann weiß man vielleicht auch, worum es geht.

Auf die Frage, nach der Häufigkeit von Herleitungen antwortete er: "Mir persönlich ist es eigentlich egal, zu oft, würde ich nicht sagen."

Auf die Frage, ob es für ihn nicht leichter wäre, keine Herleitungen zu machen, antwortete er: "Ja, leichter wäre es schon, ... aber ob man es dann versteht ist eine andere Frage."

Teile von Herleitungen erscheinen ihm ohne Tips sehr oft als zu schwierig.

(. . .)

- Interviewer : Es ist also ein bißchen frustrierend. Könnte man sich diesen Frust ab und zu ersparen?
- Gernot : Ja, das finde ich schon.
- Interviewer : Wie ist es mit der Anzahl dieser Herleitungen? Hast Du das Gefühl, daß das zu wenig oft, zu oft passiert? Kannst Du Dich an Situationen erinnern, wo Du Dir gedacht hast, die hätten wir jetzt aber wirklich nicht gebraucht, oder kannst Du Dich an eine umgekehrte Situation erinnern?
- Gernot : An solche Situationen kann ich mich nicht erinnern, aber ich finde, so macht es der Lehrer schon passend.

Interview mit Herwig, dem besten Mathematiker dieser Klasse

- Interviewer : (Einleitung, siehe Interview mit Gerold)
Was, glaubst Du, wollte Euer Lehrer heute von Euch?
- Herwig : Das hat ein bißchen mit dem Allgemeinwissen zu tun gehabt. Er wollte feststellen, ob die Herleitung dieser Formel für uns eher positiv oder negativ ist, ob wir das wünschen oder nicht. Ich glaube, wenn einer eine Formel herleiten kann, der versteht die Formel dann viel besser, weil er weiß, woher die einzelnen Faktoren kommen. Er kann damit auch leichter umgehen.
- Interviewer : Ist das für Dich so?
- Herwig : Ja!
- Interviewer : Wie ist die Meinung deiner Klassenkameraden?
- Herwig : Es gibt welche, die interessiert es gar nicht, die sagen: "Ich lerne das lieber auswendig!", und es gibt sicher ein paar, die wissen wollen, warum das so ist.
- (. . .)
- Interviewer : Spürt man in solchen Momenten, wo der Lehrer wieder mit einer Herleitung loslegt, Unmut in der Klasse?
- Herwig : Ja, sie sagen: "Schon wieder so eine Herleitung, das verstehen wir sowieso nicht."
- (. . .)
- Interviewer : Gibt es Herleitungen, wo Du Dich nicht fragst, wozu war sie gut, und wann ist denn das der Fall?
- Herwig : Ja, in den technischen Gegenständen, wie EMFU ist es von Vorteil, wenn man Formeln, wie Gewindereibung usw. ausrechnen muß, und da ist jede Formel doch anders. Wenn man hier die Herleitung nicht weiß, dann kann man keine fixe Formel dafür nehmen, da muß man sich immer die Formel herleiten, mit der man dann weiterrechnen kann. Das ist sicher wichtig.
- (. . .)
- Herwig hebt noch einmal die Bedeutung der Herleitungen für ihn hervor.
- Interviewer : Sind die Leute, die keine Herleitungen wollen, eher die schlechten Mathematiker, oder geht das Interesse und Desinteresse quer durch

- die Bank?
- Herwig : Die Herleitungen sind ja oft kompliziert. Ein schwächerer Schüler, der oft überhaupt nicht weiß, worum es geht, der schon die Grundlagen nicht kann, der kommt hier nicht zurecht. Wenn man sich irgendwo nicht auskennt, dann macht man es auch nicht so gerne. Von 10 Schülern sind sicher 5 dabei, die das nicht mögen.
- Interviewer : Wie, glaubst Du, haben Gerold (guter Mathematiker) und Gernot (schlechterer Mathematiker) auf die Frage geantwortet, ob sie die Herleitungen mögen oder nicht mögen?
- Herwig : Gerold wird gesagt haben, daß er nicht uninteressiert ist, beim Gernot weiß ich es nicht.

5.2 Interview mit dem Lehrer nach der Befragung der Schüler

- Interviewer : Wie war in bezug auf Deine Ziele und auf Deine ausgedachten Methoden die Stunde? Kannst Du den Verlauf des Unterrichts beschreiben?
- Lehrer : Bei der Erarbeitung des Sinussatzes ist mir aufgefallen, daß einige besondere Lösungen aufgetreten sind, die ich nicht erwartet hätte. Zum Beispiel, daß ein Schüler einfach eine andere Höhe eingezeichnet hat, und dann gesagt hat: "Damit hat das Dreieck für mich die gleiche Lage wie oben, also kann ich den Beweis wie oben weiterführen."
Bei der Herleitung des Kosinussatzes haben die meisten Schüler Schwierigkeiten gehabt und ich glaube, daß es niemand geschafft hat, den Satz herzuleiten.
- Interviewer : Ausgenommen diesen einen Beweis oder diese eine Idee, waren andere Ergebnisse für Dich überraschend, beispielsweise daß niemand den Kosinussatz bewiesen hat, oder war das eher erwartet?
- Lehrer : Das mit dem Kosinussatz habe ich eher erwartet, denn es sind einige Schritte durchzuführen, die den Schülern nicht so ohne weiteres einfallen können, außerdem waren die meisten Schüler mit dem Sinussatz recht lange und teilweise auch sehr intensiv beschäftigt. Einige leistungsschwache Schüler haben das gar nicht lange versucht und es schon nach ein paar Minuten aufgegeben. Für den Kosinussatz blieb ein bißchen zu wenig Zeit, aber es hat bei den meisten Schülern auch die Idee gefehlt.
- Interviewer : Wie leicht ist es Dir gefallen, als Forscher den Schülern weiter Zeit zu lassen, ohne Ihnen mit Tips weiterzuhelfen, wie es gewöhnlich im Unterricht die Reaktion des Lehrers wäre?
- Lehrer : Ich mußte mich schon beherrschen.
- Interviewer : In bezug auf die Akzeptanz der Schüler von Herleitungen hast Du im Vorinterview eher pessimistische Aussagen gemacht: Du hast gesagt, daß die meisten Schüler die Herleitung nicht als sinnvoll erachten. Hast Du Anhaltspunkte für eine Revision dieser Meinung, dieses Urteils, in dieser Stunde gewonnen?

Lehrer : Ich habe danach in einem Gespräch mit einem Schüler darüber gesprochen und überraschenderweise hat er gesagt, daß es schon notwendig ist, wenn man z.B. zu Hause ist und ein Nicht-Standard-Problem lösen muß, dann ist es günstig, wenn man das Verständnis hat, daß man auch neue Probleme mit der Methode angehen kann. Ein anderer Schüler sagte mir, er braucht die Formel, dann kann er sie einsetzen. Wie es mit der Herleitung ist, ist ihm egal. Er verwendet nur fertige Formeln.

(. . .)

Interviewer : Nach welchen Kriterien hast Du die drei Schüler ausgewählt, die ich interviewt habe?

Lehrer : Gerold habe ich ausgewählt, weil er ein guter bis durchschnittlicher Schüler ist. Ich wollte feststellen, wie es in dieser Leistungsklasse aussieht. Gerald ist ein Schüler, der in Mathematik ein "Nicht genügend" hat und sonst auch nicht so gut ist. Er wird die Klasse wiederholen und die Wahl war vielleicht nicht schlecht, so erhält man auch Eindrücke, wie ein solcher Schüler den Mathematikunterricht sieht. Herwig habe ich deshalb gewählt, weil er der Klassenbeste ist. Ich habe gesehen, daß er den Kosinussatz nicht geschafft hat. Es hat mich seine Äußerung interessiert. Er hat, nachdem der Kosinussatz nicht geschafft wurde, gesagt: "Ich habe zwar ein 'Sehr gut', aber das habe ich trotzdem nicht geschafft, also ist es doch nicht gerechtfertigt."

Interviewer : Ich habe nicht gewußt, daß Gernot ein potentieller Repetent ist. Ich möchte wissen, wie Du seine Position Dir gegenüber, seine Beziehung zu Dir einschätzt.

Lehrer : Die persönliche Beziehung ist von meiner Warte aus sehr gut, von der mathematischen Seite gibt es eigentlich wenig Gemeinsamkeiten, von der Mitarbeit her gibt es kaum richtige Meldungen.

5.3 Resümee der Interviews

Die Interviews mit den Schülern konnten einen wesentlich *tieferen Einblick* geben als die Fragebögen.

Ich gehe jetzt kurz auf die wesentlichen Teile dieser Interviews ein.

Für mich überraschend war, daß keiner der drei Schüler Herleitungen ablehnte. Die besseren Schüler wünschen solche sogar. Gerold geben sie einen gewissen Hintergrund, auf den er auch später noch aufbauen kann. Herwig, der beste Schüler sagt, daß er gewisse *Formeln besser versteht* oder anwenden könnte, wenn er wüßte, woher sie kämen. Auch für Gernot haben die Herleitungen eine gewisse Bedeutung für das Verständnis, nur ist er oft überfordert, wenn er keine Hilfe bekommt.

Die Bedeutung der Herleitung für die spätere Anwendung darf aber auch nicht überbewertet werden, denn so sagt Gerold z. B.: "Zum Rechnen hat man immer das gleiche, ob man das wissen will, oder ob man sich einfach die Formel einprägt und dann immer damit rechnet".

Interessant sind auch die Querverbindungen zu anderen technischen

Gegenständen, die zeigen, daß auch dort Herleitungen für ein besseres Verständnis gewünscht werden.

Daß Herleitungen auch *nicht zu jedem Thema* durchgeführt werden müssen, geht aus dem Interview mit Herwig hervor: "...wozu? Darauf kommt man selbst ohnehin nie."

Bei komplizierteren Dingen wird es also notwendig sein, gewisse Hilfen bzw. *Werkzeuge für die Bewältigung* bereitzustellen, um Frustrationen zu vermeiden. Nach Ansicht der Schüler ist die Anzahl der Herleitungen in meinem Unterricht angemessen.

6. Konsequenzen für meinen Unterricht

Vor dieser Untersuchung hatte ich oft ein Gefühl der Unsicherheit beim Präsentieren oder beim gemeinsamen Erarbeiten von Herleitungen mit den Schülern. Die Antworten der Schüler in den Fragebögen und Interviews, die im großen und ganzen die Notwendigkeit der Herleitungen unterstreichen, haben mir diesbezüglich geholfen. Ich werde in Zukunft mit ruhigerem Gewissen Herleitungen mit den Schülern durchführen können, ohne immer wieder über die Sinnhaftigkeit derselben nachzudenken.

Eine Erkenntnis für meinen weiteren Unterricht ist, daß für gewisse Herleitungen auch *andere Unterrichtsformen*, wie Gruppen- oder Partnerarbeit, zur Anwendung kommen sollten. Das scheint ein besonderes Anliegen von Gernot zu sein, der im Unterricht Hilfe benötigt, um weiterzukommen; Herwig wünscht sich ebenfalls Partnerarbeit, um gesteckte Ziele schneller erreichen zu können. Auch der Eifer, mit dem die Schüler die Arbeitsblätter bearbeitet haben, zeigt, daß die Schüler mit dieser Unterrichtsform schon recht gut zurechtkommen.

Ich persönlich bin der Ansicht, daß Gruppen- oder Partnerarbeit vielen Schülern die Chance gibt, Herleitungen zu verstehen, weil Probieren und Experimentieren eher möglich ist, weil man auch Irrwege beschreiten darf, weil man vor allem das individuelle Tempo selbst bestimmen kann. Durch die Vertrautheit untereinander ist die Scheu, besonders für schwächere Schüler, kleiner als wenn man vor der ganzen Klasse Fragen stellen, mitreden, auch Verständnisschwierigkeiten eingestehen soll. Bleibt die Verantwortung für das Erreichen des Zieles beim traditionellen Unterricht letztlich immer beim Lehrer, so wollen die Schüler als Gruppe selbst erfolgreich sein. Erst wenn es mir als Lehrer gelingt, meine Ziele offenzulegen, können meine Schüler einen Teil der Verantwortung übernehmen. Beim Formulieren von Arbeitsaufträgen will ich mir dafür Zeit nehmen.

All das wird für mich ein Ansporn sein, solche Unterrichtsformen vermehrt in meinem Mathematikunterricht einzusetzen.

Der Kritik, daß ich für die Herleitungen, die von den Schülern zu Hause gemacht werden sollen, oft zu wenig Anleitungen gegeben habe, werde ich Rechnung tragen.

Abschließend kann ich sagen, daß mir der PFL-Kurs Werkzeuge in die Hand gelegt hat, Probleme, die in meiner Unterrichtspraxis immer wieder auftreten können, gezielt zu beleuchten und eventuell auch zu lösen.

Mag. Michael Sablatschan
HTBL Klagenfurt
Lastenstraße 1
9020 Klagenfurt