

# **MIST – WAS HABE ICH MIR DABEI BLOSS GEDACHT**

**(METAKOGNITION IN MATHEMATICS AND SCIENCE  
TEACHING)**

**Rainer Schmid-Zartner**

**Philipp Freiler**

**Bundesbildungsanstalt für Kindergartenpädagogik Wien X**

Wien,2002

# INHALTSVERZEICHNIS

<b>1</b>	<b>MATHEMATIK UND BILDUNG – ODER: WOZU BRAUCHEN WIR DAS?....</b>	<b>1</b>
1.1	Krise des Mathematikunterrichtes .....	1
1.2	Warum Mathematik in der Oberstufe? .....	2
<b>2</b>	<b>METAKOGNITION .....</b>	<b>4</b>
2.1	Zum Begriff „Metakognition“ .....	5
2.2	Mathematisches Problemlösen und Metakognition .....	6
<b>3</b>	<b>DURCHFÜHRUNG DES PROJEKTES .....</b>	<b>9</b>
3.1	Geplanter Ablauf .....	9
3.2	Zielformulierung.....	9
3.3	Ablauf .....	10
3.3.1	Ein Vortest.....	10
3.3.2	Entwicklung eines strukturierten Metakognitionstrainings .....	10
3.3.3	Probleme während der Bearbeitungsphase in der Schule .....	12
3.3.4	Die ersten Ergebnisse .....	13
3.3.5	Rückmeldung der Schülerinnen zur Trainingsmethode.....	15
3.3.6	Geplante Weiterarbeit im nächsten Schuljahr .....	16
<b>4</b>	<b>LITERATUR .....</b>	<b>17</b>

## ABSTRACT

Ausgehend von bildungstheoretischen Überlegungen zum Mathematikunterricht und dessen „Krise“ und auf der Grundlage des (mathematischen) Metakognitionsbegriffs sowie theoretischer Modelle zum mathematischen Problemlösen wird eine konkrete Methode für ein metakognitives Training entwickelt und „getestet“. Die Entwicklung metakognitiver Kompetenzen beruht nicht unwesentlich auf verschiedenen Formen der Verbalisierung eigener Denkprozesse – eine Tatsache, auf der das hier entwickelte Metakognitionstraining aufbaut.

# 1 MATHEMATIK UND BILDUNG – ODER: WOZU BRAUCHEN WIR DAS?

Im Juni 2001 haben wir vom Projekt IMST<sup>2</sup> - Schwerpunkt Grundbildung - erfahren. Nachdem wir uns über die IMST<sup>2</sup>-Homepage über die Absichten und Ziele dieses Projektes informiert hatten, beschlossen wir, als Kooperationsschule teilzunehmen.

Das erste Treffen im Rahmen des Start up-Workshops im November 2001 gab für uns einerseits den Anstoss, uns allgemeine Gedanken zum Thema „Mathematische Grundbildung“ zu machen (s. Kap.1), andererseits stellten wir uns die Aufgabe im Laufe des Schuljahres 2001/02 eine Metakognitionstrainingmethode für Schülerinnen zu entwickeln (s. Kap. 2 und Kap. 3).

Unsere allgemeinen Überlegungen mündeten in einem Impulsreferat an der TU Wien Ende Mai 2002. Im Anschluss an unser Referat diskutierten wir unsere Überlegungen mit Kolleg/innen, Student/innen, Schüler/innen und Personen, die beruflich nicht direkt mit Mathematik zu tun haben.

Im Anschluss eine kurze schriftliche Zusammenfassung unserer Überlegungen:

## 1.1 Krise des Mathematikunterrichtes

Die derzeitige Krise des Mathematikunterrichtes basiert unserer Meinung nach darauf, dass man zu sehr die Inhalte ins Zentrum der Verbesserungsüberlegungen stellt. Die daraus folgenden Überlegungen gehen von der Frage aus: „Welche mathematischen Inhalte (Stoffgebiete) sind unverzichtbar?“ Dieser stoffzentrierte Ausgangspunkt aller Überlegungen muss unserer Meinung nach in eine Sackgasse führen, da man kaum Inhalte in der Oberstufe finden wird, die an sich von so allgemeiner Wichtigkeit sind, dass sie im späteren Leben jedes Oberstufenschülers einmal von Bedeutung sein werden. Wer wird später je einem Problem begegnen, das mit Hilfe der Extremwertmethode gelöst werden muss? Wann werden unsere Schüler/innen nach der Matura je wieder mit einer quadratischen Gleichung, einer Trigonometrieaufgabe, einer logarithmischen Gleichung in Berührung kommen? Sicher werden einige in technisch-naturwissenschaftlichen oder anderen Studien die obengenannten Inhalte und die entsprechenden mathematischen Techniken benötigen, aber rechtfertigt das allein schon, dass auch alle anderen mit diesen Inhalten konfrontiert werden?

Die grundlegende Frage darf daher nicht lauten „Was sollen wir unterrichten? Welche Inhalte werden nach der Matura benötigt?“ – denn dadurch würden wir den Mathematikunterricht schnell ad absurdum führen – sondern die Ausgangsfrage muss lauten: „**Warum** sollen wir **Mathematik** (oder irgendein anderes Fach) unterrichten? Was macht Mathematik für alle Schüler/innen so bedeutsam?“

Erst **nach** der Beantwortung dieser Frage, kann man daran gehen mathematische Inhalte (Stoffgebiete) auszuwählen und didaktisch aufzubereiten, die besonders geeignet sind den allgemeinbildenden Aspekt der Mathematik zu vermitteln.

## 1.2 Warum Mathematik in der Oberstufe?

Wenden wir unseren Blick einmal auf das SCHOG, in dem die Aufgaben der AHS festgelegt sind:

“Die allgemeinbildenden höheren Schulen haben den Schülern eine umfassende und vertiefte Allgemeinbildung zu vermitteln und sie zugleich zur Hochschulreife zu führen.“

Hier findet sich das nicht näher definierte Wort „Allgemeinbildung“. Ausgangspunkt unserer Überlegungen zum Mathematikunterricht muss also eine Definition des Begriffs „Allgemeinbildung“ sein.

Unsere Definition:

Ein gebildeter Mensch ist bereit und fähig, zu Fragen unserer Kultur und Gesellschaft Stellung zu nehmen und seine Positionen zu argumentieren. Ziel ist eine größtmögliche Selbstbestimmung. Bildungsprozesse müssen auf anthropologischen Grundgegebenheiten (z.B. Emotionalität) aufbauen.

Von dieser Definition ausgehend haben wir überlegt, welchen Beitrag der Mathematikunterricht zur Bildung eines Menschen liefern kann und dazu Diskussionsthesen formuliert.

These 1:

Mathematik ist ein wichtiger Teil unserer Kultur, dessen Bedeutung in der Gesellschaft ständig zunimmt. Daher ist Mathematik ein wichtiger Teil der Allgemeinbildung. Mathematikunterricht muss daher in einer Schule, die den Anspruch erhebt, allgemeinbildend zu sein, einen wichtigen Stellenwert einnehmen.

These 2:

Allgemeinbildung erfordert eine Auseinandersetzung mit den Möglichkeiten, aber auch mit den Grenzen der Mathematik.

Daher ist es notwendig, im Rahmen des Mathematikunterrichtes folgende Fragen zu erörtern:

Was ist Mathematik? Worauf baut sie auf? Wo hat sie ihre (inneren) Grenzen?

Mathematik passt auf viele Probleme unserer Welt (sonderbar!):

Auf welche passt sie, auf welche nicht? Wie geht die Mathematik dabei vor? Wo sind die Grenzen dieser Passung?

These 3:

Mathematikunterricht ist geeignet, anthropologische Grundgegebenheiten anzusprechen.

Wie Musik, Literatur, bildende Kunst,... besitzt auch Mathematik einen „l'art pour l'art“ Aspekt. Es ist für Menschen einfach interessant, sich mit (echter) Mathematik zu

beschäftigen – völlig zweckfrei! Mathematikunterricht muss daher so gestaltet sein, dass Schülerinnen auch diesen künstlerischen, ästhetischen Aspekt der Mathematik erfahren können.

These 4

Mathematik eignet sich besonders, um zum Argumentieren und Begründen anzuregen:

Da man sich von allen mathematischen Wahrheiten im Prinzip selbst überzeugen kann, ist man beim Argumentieren und Begründen nur auf seine eigenen Gedankengänge angewiesen. Durch diese Besonderheit der Mathematik ist man von Expertenmeinungen unabhängig, es zählt allein das beste Argument.

Mathematikunterricht muss daher Gelegenheit zum Begründen und Argumentieren bieten. Schülerinnen müssen im Mathematikunterricht erfahren können, dass alleine das beste Argument zählt, und dass sie selbst gute von schlechten Argumenten unterscheiden können.

Erst nach den vorangehenden Überlegungen stellt sich für uns die Frage nach den mathematischen Inhalten des Mathematikunterrichtes.

These 5

Inhalte sind im Prinzip austauschbar, aber unverzichtbar

Mathematische Stoffgebiete sind nicht an sich für die Bildung eines Menschen von Bedeutung (es gibt keine „Prestige-Stoffgebiete“). Die Eignung konkreter mathematischer Inhalte wird ausschließlich dadurch bestimmt, ob sie den oben genannten Ansprüchen an einen „bildenden“ Mathematikunterricht gerecht werden können.

## 2 METAKOGNITION

Ergebnisse jüngster, auf internationaler Ebene angelegter Vergleichsstudien wie TIMSS oder PISA haben eine breite Bildungsdiskussion ausgelöst. Solche Diskussionen haben nicht selten eine starke inhaltliche oder methodische Ausrichtung – Überlegungen, *welche* Inhalte *wie* vermittelt werden sollen, überlagern dann üblicherweise die *Warum*-Frage nach der Rechtfertigung gerade dieser Inhalte. Im nachhinein – „a posteriori“ – konstruierte Begründungen wie etwa die Brauchbarkeit im späteren Leben erscheinen eher fragwürdig angesichts starker empirischer Evidenz für eine extrem kurze „Halbwertszeit“ der vermittelten Wissensinhalte und auch angesichts der Frage, wie viele Schüler/innen im späteren Leben denn tatsächlich noch etwa mit Kegelschnittgleichungen konfrontiert werden.

Die erwähnte „Halbwertszeit“ von Wissen hängt aber nicht nur mit dem raschen Vergessen bzw. Verdrängen von Inhalten, zu denen das Individuum keinen persönlichen Bezug herstellen konnte, zusammen, sondern auch mit gesellschaftlichen Entwicklungen und Veränderungen, die es immer schwieriger machen, junge Menschen „inhaltlich“ auf ihr späteres berufliches oder privates Leben vorzubereiten. Bildungsbemühungen müssen sich daher immer mehr auf „strategische“ Aspekte des Erwerbs, der Organisation und der Bewertung von Bildungsinhalten konzentrieren und damit das Individuum befähigen, das eigene Wissen und Lernen autonom und eigenständig ein Leben lang den sich rasch verändernden gesellschaftlichen Anforderungen anzupassen.

Es wird hier also davon ausgegangen, dass es weder möglich noch sinnvoll ist, Bildung durch Angabe konkreter Inhalte zu definieren – sie manifestiert sich vielmehr einerseits in begründeter persönlicher Positionierung und Bewertung solcher Inhalte und andererseits in der Kompetenz zur Selbststeuerung eigener Wissenserwerbs- und Bildungsprozesse. In diesem Zusammenhang hat der Begriff „Metakognition“ in den letzten Jahren immer mehr an Bedeutung gewonnen.

Als Reflexion über das eigene Denken (s.u.) ist Metakognition unserer Ansicht nach ein wesentliches Element von Bildung im oben definierten Sinn (vgl. Seite 4). Die Fähigkeit und Bereitschaft zur Argumentation eigener Positionierungen der Kultur und Gesellschaft gegenüber erfordert ein hohes Maß an Kompetenz zur kritischen „Selbstthematization“ – wir meinen daher, daß jegliche Bildungsanstrengung letztlich daran zu messen ist, wieweit sie in der Lage und bereit ist, zur Entwicklung dieser „Metakompetenz“ beizutragen.

Über diesen allgemeinen Bildungsaspekt hinaus knüpft ein metakognitives Training aber auch direkt an den oben thesenhaft entwickelten Bildungsaufgaben von Mathematik (vgl. Seite 4 f.) an. Speziell wäre hier auf die Reflexion über Wesen und Möglichkeiten, aber auch Grenzen von Mathematik und mathematischer Modellierung der Welt einerseits, aber auch auf die besondere Eignung von Mathematik zur Entwicklung argumentativer Kompetenzen andererseits hinzuweisen. Derartige Begründungen für die Notwendigkeit und Sinnhaftigkeit von Mathematikunterricht sind unserer Ansicht nach ein wichtiger und wertvoller Beitrag

zu einer gerade in letzter Zeit an Schärfe und Vehemenz ständig zunehmenden Legitimationsdiskussion in bezug auf einzelne Unterrichtsfächer.

## 2.1 Zum Begriff „Metakognition“

„Metakognition“ ist ein Schlüsselbegriff im Zusammenhang mit (mathematischem) Problemlösen. In erster Näherung ist damit „Denken über eigenes Denken“ gemeint, also die Reflexion auf Methoden, Strategien, Motive und Ergebnisse eigener kognitiver Anstrengungen – primär unter prozeduralen Aspekten.

Mit KAISER / KAISER (1999) lassen sich zwei grundlegende Dimensionen von Metakognition unterscheiden, nämlich

- **metakognitives Wissen** (deklarativer Aspekt), also die Kenntnisse des Individuums über kognitive Gegebenheiten. Damit ist einerseits personenbezogenes Wissen gemeint, also alles das, was man über sich selbst, über andere Personen und ganz allgemein über Denkvorgänge weiß, andererseits aber auch das Wissen um Aufgabenvariable und Strategiewissen
- **metakognitive Kontrolle** als exekutiver Aspekt von Metakognition bezieht sich auf *metakognitive Steuerung* (Planung, Regulierung und Bewertung der Bearbeitungsaktivitäten) und auf die *Selbstkontrolle* beim Voranschreiten des Lösungsprozesses.

Für eine effektive Aufgabenbewältigung sind **Kontrollprozesse** besonders wichtig, da sich in ihnen alle metakognitiven Elemente verdichten. Darüber hinaus beruht erfolgreiches Problemlösen auf **strategischen Kompetenzen**, wobei zwei grundlegende Kategorien zu unterscheiden sind:

- **kognitive Strategien** umfassen Zugriffsweisen zur Bearbeitung einer konkreten Aufgabe und sind zur Bearbeitung unterschiedlicher Aufgaben in einem bestimmten Bereich geeignet; sie werden durch Einübung und Gewöhnung erworben und perfektioniert
- **metakognitive Strategien** sind universell einsetzbar, auf (eigene) Denkprozesse gerichtet und durch Bewußtmachen und Einüben optimierbar; sie unterstützen Auswahl, Einsatz und Kontrolle kognitiver Strategien und sind in diesem Sinne eine Ebene „über“ den kognitiven Strategien angesiedelt, die sie steuern und kontrollieren.

Auf didaktischer Ebene wäre es wichtig, das jeweils vorhandene **Strategierepertoire bewußt zu machen** (durch explizites Ansprechen der jeweils verwendeten Strategien), an zunächst **strukturell ähnlichen** Aufgaben spezifische neue **Strategien kennenzulernen** und deren Einsatz zu automatisieren. In weiterer Folge wäre der **Strategieeinsatz** durch geeignete Variation der Aufgabentypen zu **flexibilisieren**. Generell sollte die Fähigkeit entwickelt und trainiert werden, den Arbeitsprozess bewusst planen und kontrollieren zu können und



bereichsspezifisches Wissen auf seine Relevanz für die Bearbeitung einer konkreten Aufgabe einschätzen zu können.

Methoden zur **Erfassung** und zur **Optimierung metakognitiver Prozesse** wären etwa

- Fragebogen zur Identifikation metakognitiver Einstellungen
- Lerntagebuch
- Interview und lautes Denken
- Stimulierte Kommentierung
- Partnertraining
- kooperatives Problemlösen und ähnliche Methoden.

## 2.2 Mathematisches Problemlösen und Metakognition

An Ansätzen zur theoretischen Modellierung (mathematischen) Problemlösens in metakognitiven Kategorien besteht inzwischen kein Mangel mehr – hier seien nur die Pionierarbeiten von POLYA und die darauf aufbauenden Ideen von SCHOENFELD erwähnt.

POLYA (1945) gliedert den mathematischen Problemlösungsprozess in die Phasen

- **Verstehen der Aufgabe:**

Was ist gegeben? Was ist gesucht? Was sind die Bedingungen der Aufgabe? Es geht in dieser Phase um ein „Herumspielen“ mit dem Problem – unterstützt durch Strategien wie etwa das Zeichnen einer Figur, Einführung geeigneter Bezeichnungen und vieles mehr.

- **Ausdenken eines Planes:**

Hier geht es um die Anwendung zahlreicher heuristischer Suchstrategien, um einen konkreten Zugang zur Lösung zu finden. Beispiele dafür wären etwa das Betrachten von Spezialfällen, die Variation der Bedingungen, der Vergleich mit bereits gelösten, ähnlichen Aufgaben, die Arbeit von einer vermuteten Lösung rückwärts und sehr viele andere Methoden. Daraus sollte sich schließlich ein konkreter Plan zur Bearbeitung der Aufgabe ergeben.

- **Ausführen des Planes:**

Die bewusste Umsetzung des Planes sollte begleitet sein von ständigem „self-monitoring“, also von der Selbstkontrolle bezogen auf Voranschreiten des Lösungsprozesses, Verwaltung des Zeit- und Ressourcenbudgets usw.

- **Rückschau:**

In dieser besonders wichtigen Phase soll durch metakognitive Reflexion der Lösungsversuch eingeschätzt und für die Entwicklung der eigenen strategischen Fähigkeiten nutzbar gemacht werden. Fragen nach der Kontrolle des Resultats bzw. des Beweises, nach alternativen (vielleicht eleganteren oder kürzeren) Lösungswegen und nach Verallgemeinerungen von Methode oder Resultat erscheinen dazu besonders geeignet.

Metakognitives Denken setzt in der dritten Phase (ständige Kontrolle und Selbstmanagement der eigenen Lösungsaktivitäten) und speziell in der vierten Phase beim rückblickenden Nachdenken über die eigene Lösung und den entsprechenden Lösungsprozess ein.

SCHOENFELD (1985) diskutiert einen begrifflich-theoretischen Rahmen für mathematisches „Verhalten“ und Problemlösen auf der Grundlage der folgenden vier Kategorien:

- **Ressourcen** sind alle inhaltlichen mathematischen Kenntnisse, die ein Individuum beim Problemlösen zum Einsatz bringen kann, also das faktische, prozedurale und propositionale Wissen des Problemlösers. Beispiele wären etwa Formelwissen, bekannte Algorithmen oder Methoden oder auch bereits bekannte und bewährte Lösungsmuster wie etwa die Extremwertmethode.
- **Heuristiken** sind „Faustregeln“, also eher allgemeine Strategien, die bei unbekanntem Problemen zur Anwendung gebracht werden können, um Fortschritte zu erzielen. Beispiele sind etwa das Ausnutzen von Analogien oder „backward working“ von einer vermuteten Lösung. Es lassen sich Dutzende, wenn nicht Hunderte solcher Heuristiken identifizieren, die von routinierten Problemlösern oft gar nicht bewusst eingesetzt werden.
- **Kontrolle** meint das Ressourcenmanagement und die effektive Allokation vorhandener Mittel während eines Lösungsversuches.
- **Glaubenssysteme** sind „mathematische Weltbilder“, die mathematisches Verhalten ganz wesentlich beeinflussen und ausrichten können. Sie stellen die umfassende Perspektive dar, von der aus man sich mathematischen Zusammenhängen annähert, also den Kontext, in dem Ressourcen, Heuristiken und Kontrollprozesse vom Individuum gestellt werden. Wichtige Aspekte mathematischer Weltbilder beziehen sich auf wissenschafts- bzw. erkenntnistheoretische Vorentscheidungen über das Wesen der Mathematik (etwa die Meinung, dass mathematische Aussagen grundsätzlich eines nicht-empirischen Beweises bedürfen oder dass Mathematik ein ausschließlich rational strukturiertes Begriffssystem darstellt).

Auch im Ansatz von SCHOENFELD nimmt die Metakognition eine prominente Rolle ein als eine Art umgreifendes Bindeglied zwischen Heuristiken, Kontrolle und mathematischem Weltbild.

Die Entwicklung mathematischer Kompetenz, hier verstanden als kompetentes, retouriertes, ressourcenreiches und flexibles Lösen auch für das Individuum unbekannter mathematischer Probleme muss auf metakognitiven Basiskompetenzen aufbauen, die das Individuum befähigen, seine Lösungsstrategien selbstständig neuen Situationen anzupassen. Es sollen nun die ersten Schritte zur Entwicklung eines entsprechenden Trainings skizziert werden.

## **3 DURCHFÜHRUNG DES PROJEKTES**

### **3.1 Geplanter Ablauf**

Die Durchführung unseres Projektes umfasst einen Zeitraum von zwei Jahren. Das erste Jahr dient der Suche nach einer geeigneten Methode, um metakognitive Kompetenz im Schulunterricht zu entwickeln. Im zweiten Jahr wollen wir das in diesem Zusammenhang entwickelte Metakognitionstraining in zwei Klassen einsetzen und darauf überprüfen, ob es tatsächlich die metakognitiven Fähigkeiten der SchülerInnen erhöht.

### **3.2 Zielformulierung**

Zu Beginn unserer Arbeit steht eine Zielformulierung, mit deren Hilfe wir das Metakognitionstraining entwickeln und anschließend evaluieren werden.

Konkret verfolgen wir folgende Ziele:

Die entwickelten Methoden sollen für eine regelmäßige Durchführung im Schulalltag geeignet sein. Sie sollten also mit einem möglichst geringen Arbeits- und Zeitaufwand für Lehrer/innen und für die Schüler/innen verbunden sein. Weiters sollten sie auf eine möglichst große Klasse von mathematischen Inhalten passen, sodass sie in jeder Schulstufe anwendbar ist.

Die Methoden soll SchülerInnen anregen, sich eigener Denkprozesse und Lösungsstrategien bewusst zu werden, darüber zu reflektieren und sie mit anderen SchülerInnen auszutauschen. In einem ersten Schritt soll das Metakognitionstraining dazu führen, dass die Reflexion eigener und fremder Gedankengänge ein fixer und selbstverständlicher Bestandteil jedes Problemlöseprozesses wird und damit die Kompetenz entwickelt wird, erfolgversprechende Strategien identifizieren und weiterverfolgen zu können und Sackgassen im Problemlösungsprozess zu vermeiden.

Langfristig wollen wir allerdings Methoden entwickeln, die Schülerinnen dazu anhalten in einem metakognitiven Prozess über Mathematik an sich nachzudenken (s. auch Kap. 3.3.6), um einen mathematischen Bildungsprozess (nach unserer Bildungsdefinition s.Kap 1.2.) bei den Schülerinnen anzuregen.

## 3.3 Ablauf

### 3.3.1 Ein Vortest

In einem ersten Ansatz bekamen die Schülerinnen der 1.Klasse (9.Schulstufe) mehrere Problemlöseaufgaben (z.B.: „Wieviele Diagonalen besitzt ein n-Eck?“) schriftlich vorgelegt und hatten ca. 30 Minuten Zeit, diese Aufgaben in Einzelarbeit zu bearbeiten. Anschließend hatten sie 20 Minuten Zeit, folgende metakognitiv orientierte Fragen schriftlich zu beantworten:

- a) Welche Lösungs-Strategien waren bei der Bearbeitung der Aufgaben zielführend?
- b) Welche Irrwege hast du beschritten?

Diese erste Anregung, Schülerinnen zur metakognitiven Reflexion anzuregen, diente dazu, herauszufinden, wie weit SchülerInnen ohne eine eigens entwickelte Methode zur metakognitiven Reflexion des eigenen Lösungsprozesses fähig sind.

Die Auswertung der schriftlichen Rückmeldungen ergab folgendes Bild:

Der Großteil der SchülerInnen beschrieb in ihren Rückmeldungen die eigenen Lösungsversuche, ohne über den Lösungsprozess und die dabei angewendeten Strategien an sich zu reflektieren. z.B. „Ich habe herausgefunden, dass ein 4-Eck 2 Diagonalen, ein 5-Eck 5 Diagonalen und ein 6-Eck 9 Diagonalen hat.“

Nur einer Schülerin gelang es, bestimmte erfolgreiche Strategien anhand ihres Lösungsprozesses herauszuarbeiten.

Die herausgearbeiteten Strategien wurden von der Schülerinnen wie folgt beschrieben: „Ich habe mir zuerst konkrete Beispiele (3-, 4-, 5-Eck) angeschaut, diese aufgezeichnet und versucht eine Regelmäßigkeit in der Diagonalenanzahl zu erkennen.“

### 3.3.2 Entwicklung eines strukturierten Metakognitionstrainings

Um Schülerinnen eine sinnvolle Reflexion ihres Denkprozesses zu ermöglichen, sollte zunächst der Lösungsprozess selbst strukturiert ablaufen. Weiters ist es für eine Nachbetrachtung des Lösungsprozesses wichtig, diesen schriftlich zu dokumentieren. Schließlich ist bereits während des Lösungsprozesses das Augenmerk auf die Strategiefrage zu richten.

Das Ergebnis unserer Überlegungen war ein strukturiertes Metakognitionstraining, das folgendermaßen ablief.

Die Aufgabe:

Auf einer Party befinden sich  $x$  Personen. Jede Person begrüßt jede andere mit einem Handschlag. Wieviele Handschläge finden zur Begrüßung statt?

Um den Lösungsprozess zu strukturieren und für die Schülerinnen auch später nachvollziehbar zu machen, bekamen sie neben der eigentlichen Aufgabenstellung auch einen A3 Bogen mit Anweisungen.

Die erste Seite enthielt folgende Anleitung zum Metakognitionstraining:

Seite 1

Nachdem du das Arbeitsblatt ausgefüllt hast, tausche es mit deiner Partnerin aus. Lest euch beide die Gedanken (unter Punkt 1 bis 3) eurer Partnerin durch. Falls du die schriftlichen Ausführungen deiner Partnerin nicht verstehst, kannst du ihr anschließend mündlich Fragen stellen, bis du glaubst, ihre Gedankengänge nachvollziehen zu können.

Stelle nur Fragen, die dem besseren Verständnis der Aufzeichnungen dienen.

Gib deiner Partnerin **keine Tipps** und **keine Ratschläge**, die zur Lösung des Problems beitragen!

Anschließend kannst du versuchen, mündlich eine Antwort auf die unter Punkt 4 formulierte Frage deiner Partnerin zu geben.

Nehmt nun wieder eure eigene Arbeit und versucht noch einmal mit einem **neuen** Arbeitsblatt die gestellte Aufgabe zu lösen. Danach tauscht wieder eure neuen Arbeitsblätter aus u.s.w.

Auf den beiden inneren Seiten des Bogens standen nach der Aufgabenstellung folgende Anweisungen:

Seite 2

1.) Aufgabenstellung:

2.) Versuche dir das Problem **mit eigenen Worten** zu verdeutlichen.

3.) Hast du schon einen Lösungsplan? Formuliere die einzelnen Schritte deines Planes.

Fragen 1 und 2 soll Schülerinnen helfen zu erkennen, ob sie das Problem verstanden haben. Haben sie erkannt, wo das Problem der Aufgabenstellung liegt?

Frage 3 soll dazu anregen, sich schon vor dem eigentlichen Problemlöseprozess einer Taktik bewusst zu werden. Die Schülerinnen sollen sich ganz bewusst für eine bestimmte Vorgehensweise entschließen.

Seite 3

4.) Notiere hier deine Gedanken zur Problemlösung. Formuliere sie so, dass deine Partnerin deinen Gedankengängen möglichst gut folgen kann:

5.) Notiere hier eine Frage an deine Partnerin, deren Beantwortung dir bei der Lösung des Problems (vermutlich) weiterhelfen würde:

6.) Meiner Einschätzung nach habe ich bereits

10% 20% 30% 40% 50% 60% 70% 80% 90% 100%

des Beispiels gelöst (kreuze den entsprechenden Wert an).

Durch Punkt 4 sollen eigene Gedankengänge bewusst gemacht werden, indem man sie einer anderen Person darstellt.

Durch die Beschäftigung mit Frage 5 sollen die Schülerinnen ganz bewusst überlegen, was ihnen für eine erfolgreiche Bearbeitung der Aufgabe fehlt und was ihnen dabei behilflich sein könnte.

Die Schülerinnen hatten nun ca 15 min Zeit, die Aufgabe mit Hilfe des Bogens zu bearbeiten. Anschließend tauschten jeweils zwei Schülerinnen die Bögen untereinander aus (vgl. obige Anleitung zum Metakognitionstraining). Schließlich wurde noch eine zweite und dritte Runde des Trainings durchgeführt.

Als Hausübung bearbeiteten die Schülerinnen schriftlich anhand der drei A3 Bögen folgende Fragen im Sinne eines Rückblicks auf den eigenen Lösungsprozess:

- 1.) Gehe die einzelnen Blätter noch einmal durch und versuche folgende Fragen zum Lösungsprozess zu beantworten:
  - Wo gab es Richtungsänderungen in der Vorgangsweise?
  - Wo gab es eine Änderung der Taktik?
  - Wo gab es Knackpunkte?
  - Hast du Irrwege beschritten?
- 2.) a) Was hat dir an diesen Stellen geholfen weiterzukommen? (Welches Wissen? Welche Vorgangsweise? Ein Tipp? Welche Ideen?,....  
b) Was war hinderlich?
- 3.) Hat sich die Art, deine Gedanken schriftlich zu formulieren im Laufe der Arbeit geändert?
- 4.) Wie hat sich deine Selbsteinschätzung im Laufe der Arbeit entwickelt?
- 5.) Platz für weitere Bemerkungen zum Metakognitionstraining.

### **3.3.3 Probleme während der Bearbeitungsphase in der Schule**

Unsere Vortsetzung, dass die Schülerinnen bei der Partnerphase nur anhand der schriftlichen Aufzeichnungen der Partnerin deren Lösungsprozess nachvollziehen sollten, erfüllte sich nicht, da die Schülerinnen natürlich weniger am metakognitiven Prozess, als an der Lösung des Problems selbst interessiert waren. Sobald also zur Partnerarbeit übergegangen wurde, tauschten sie sofort die jeweiligen Strategien untereinander aus.

Um diesem Problem entgegenzuwirken, boten wir in einem modifizierten Training den Schülerinnen, die in der Partnerphase ein Paar bilden, jeweils verschiedene Aufgaben zur Bearbeitung an. Da die Schülerinnen das Problem der Partnerin (noch) nicht kennen, sind sie eher dazu angehalten, sich mit der Aufgabenbearbeitung der Partnerin und deren Lösungsansatz auseinanderzusetzen.

Doch auch beim modifizierten Training kam es während der Partnerphase sofort zu einem regen Ideenaustausch. Dies zeigte uns, dass die Arbeit an einem Problem und die gleichzeitige Verschriftlichung der Gedankengänge in ein und derselben Arbeitsphase nicht möglich ist. Wir werden daher nächstes Schuljahr die schriftliche

Aufbereitung des Problemlöseprozesses in eine eigene Arbeitsphase, im Anschluss an das Metakognitionstraining einbauen.

Ein weiteres Problem stellten Schülerinnenpaare dar, bei denen keine der beiden Partnerinnen in der ersten Einzelphase einen eigenständigen Lösungsansatz hervorbrachte. Diesen brachte die anschließende Partnerarbeit natürlich kaum neue Ideen für die Weiterarbeit. Um diesem Problem entgegenzuwirken, werden die Schülerinnen beim nächsten Metakognitionstraining dazu angehalten, sich für jede Partnerarbeit eine neue Partnerin zu suchen.

### 3.3.4 Die ersten Ergebnisse

Weil das Metakognitionstraining nur langfristig Veränderungen bewirken kann, gibt es noch keine Ergebnisse zur Wirkungsweise dieses Trainings.

Aufgrund der bisherigen Schülerarbeiten konnten wir jedoch herausfinden, ob Schülerinnen durch diese Methode überhaupt zur Metakognition angeregt werden können.

Im Mittelpunkt unserer Auswertung stand also nicht der Lösungsprozess an sich, sondern die nachträgliche Reflexion darüber im Rahmen der Hausübung. Die strukturierten Problemlösebögen dienten uns nur dazu, die schriftliche Reflexion der Schülerinnen auch richtig interpretieren zu können.

Dabei ergab sich folgendes Bild:

Wir haben von den Schülerinnen 19 Reflexionen zurückbekommen. Bei sieben Reflexionsblättern stellten wir fest, dass die Schülerinnen zwar teilweise ihre Lösungsgedanken noch einmal zusammenfassten, aber überhaupt nicht über den Lösungsprozess reflektierten. Bei diesen 7 Schülerinnen konnte also kein Metakognitionsprozess festgestellt werden. Trotzdem verfolgten sechs dieser Schülerinnen durchaus brauchbare Lösungsstrategien, wie wir aufgrund der jeweiligen Problemlöseblätter feststellen konnten: Die Lösungsstrategie bestand darin, anhand eines selbstgewählten, konkreten Beispiels eine Regelmäßigkeit zu entdecken und zusätzlich das Problem mit Hilfe einer Zeichnung zu veranschaulichen.

Bei 12 Schülerinnen konnten wir feststellen, dass sie durchaus in der Lage waren, ihren Lösungsprozess metakognitiv zu betrachten. Folgende Lösungsstrategien wurden durch diese Schülerinnen im Rahmen der Reflexion entdeckt:

Nachstellen einer konkreten Begrüßungssituation mit Hilfe von konkretem Material (z.B. Bleistifte) (2)

*„Ich hatte Stifte genommen und habe jeden Stift mit jedem einmal begrüßt. Dabei habe ich mitgezählt wie viele Male jeder begrüßt worden ist.“*

Konkretisierung der Begrüßungssituation durch eine bestimmte Personenanzahl (2)

*„Beim zweiten Durchgang änderte ich meine Taktik und konzentrierte mich auf ein konkretes Beispiel.“*

*„Ich hab es mit einem konkreten Beispiel versucht. Nur mit Sessel und nicht*



*mit Händen.“*

Veranschaulichung einer konkreten Begrüßungssituation durch eine Skizze. (6)

*„Ich habe eine Skizze mit „5 Leuten“ gezeichnet und die „Leute“ miteinander so verbunden, dass jeder jedem die Hand gibt. Als ich dann in meine Formel eingesetzt habe, habe ich bemerkt, dass sie nicht stimmt.“*

*„Mit Zeichnungen, denn dadurch habe ich es leichter verstanden.“*

*„Ich habe einfach versucht ein paar Skizzen zu machen und Gemeinsamkeiten zu finden.“*

Der intensive Austausch in der Partnerarbeit (7)

*„Am Anfang habe ich nichts gewusst. Aber dann habe ich mit meiner Nachbarin diskutiert und dann habe ich mehr gewusst“*

*„Meine Partnerin machte sich eine Skizze, die mir dann weiterhalf.“*

*„An diesen Stellen hat mir das Tauschen weitergeholfen.“*

Mehrere Konkretisierungen der Aufgabe mit ansteigender Personenzahl. (1)

*„Ich habe dann die verschiedenen Beispiele genau untereinander geschrieben. Sodass ich verschiedene Zusammenhänge gefunden habe.“*

*„Verschiedene Zahlen nacheinander ausprobieren und dann Regelmäßigkeit erkennen.“*

Klärung von Begriffen(2):

*„Als ich wusste, was man unter einer Diagonale versteht, war es einfacher.“*

Diese Ergebnisse wurden auch den Schülerinnen mitgeteilt, um ihnen die hinter dem Metakognitionstraining liegende Absicht zu verdeutlichen. Weiters wurden auch die erarbeiteten Lösungsstrategien von und für die Schülerinnen schriftlich zusammengefasst(s.u.) und anhand der Aufgabenstellung erläutert. Wir hoffen, dass diese Strategien beim nächsten Training vermehrt und vor allem bewusst eingesetzt werden.

**Lösungsstrategien der 1C  
(zur Weiteranwendung empfohlen!):**

- 1.) Ist die Bedeutung aller Begriffe in der Aufgabenstellung klar?
- 2.) Probier mal ein konkretes Beispiel aus.
- 3.) Mach dir ein Bild:  
Zeichne eine Skizze, die den Sachverhalt veranschaulicht.  
Nimm Gegenstände und stelle die Situation einfach nach.
- 4.) Versuche anhand mehrerer konkreter Beispiele eine Regelmäßigkeit zu entdecken.
- 5.) Überprüfe jede gefundene allgemeine Lösung anhand einiger konkreter Beispiele.

Der Vergleich mit dem Vortest ergibt also, dass die beschriebene Methode offensichtlich zu einem Metakognitionsprozess anregt.

### 3.3.5 Rückmeldung der Schülerinnen zur Trainingsmethode

Im Rahmen der Nachbearbeitung des Problemlöseprozesses nutzen viele Schülerinnen folgenden Punkt:

„5) Platz für weitere Bemerkungen zum Metakognitionstraining.“

um Rückmeldung über diese Trainingsmethode zu geben. Im Anschluss ein paar Zitate:

*„Ich finde es war eine gute Idee das zu machen. Ich habe mich wirklich das erste Mal angestrengt in Mathematik. Aber ich finde wir sollten das öfters machen, dann würde mich Mathematik auch mehr interessieren und ich kann mein Wissen auch erweitern.“*

*„Es ist eigentlich ganz gut, finde ich zumindest. Weil man doch ziemlich viel denken muss.“*

*„Ich fand es interessant, da es zum Nachdenken anregte.“*

*„Ich fand es prinzipiell recht gut, da man viel nachdenken musste. Es hat mich ein bisschen deprimiert, dass ich nicht ganz hinter die Lösung gekommen bin aber im Großen und Ganzen fand ich es gut.“*

*„Ehrlich gesagt ist das Metakognitionstraining nicht wirklich mein Ding. Ich rechne lieber andere Dinge wie z.B. Gleichungen, Terme,...Ab und zu ist so ein M. ja nicht schlecht aber längere Zeit möchte ich es derzeit nicht machen.“*

*„Teilweise verwirrend – anzweifeln des Sinns dieser Übung“*

*„Ich fand es eigentlich eine sehr gute Idee, obwohl ich gerne eine längere Besprechungszeit mit der Partnerin gehabt hätte.“*

*„Das sind nicht nur Rechnungen, die man stur rechnet.“*

*„Ich finde es wäre gut so etwas öfter zu machen, da man so etwas im Leben brauchen kann!“*

*„Könnte man öfters machen. Nur als Denktraining.“*

*„Es ist eigentlich sehr lustig, man muss sich einfach konzentrieren. Aber so etwas zur Schularbeit wäre nicht gut, weil man viel Zeit braucht und diese wohl bei einer SA nicht hat.“*

*„Es wäre interessant zu erfahren (nach so einem Durchgang), ob es Taktiken gibt oder nützliche Hilfen zum „Nachdenken übers Nachdenken““*

*„Ich finde es ist eine gute Übung einmal über das Nachdenken nachzudenken.“*

### **3.3.6 Geplante Weiterarbeit im nächsten Schuljahr**

Im Schuljahr 2002/03 werden wir dann dieses Training in zwei Klassen regelmäßig (einmal im Monat) einsetzen und die Entwicklung der Metakognitionsfähigkeit der Schülerinnen verfolgen. Weiters werden wir beobachten, ob die von den Schülerinnen erarbeiteten Lösungsstrategien im Laufe des Jahres vermehrt und bewusst eingesetzt werden. Bis sie auch ohne die strukturierte Anleitung fähig sind, ihren Arbeitsprozess in einer Rückschau metakognitiv zu betrachten und daraus Schlüsse für die weitere Arbeit zu ziehen.

Unser Metakognitionstraining wird aber nicht darin erschöpft sein, dass Schülerinnen Problemlösestrategien erkennen und danach bewusst einsetzen. Diese Form des Metakognitionstrainings kann nur ein erster Schritt sein. In weiterer Folge werden wir versuchen geeignete Themen zu finden und Methoden zu entwickeln, die Schülerinnen dazu anregen sollen, in einem metakognitiven Prozess über das Wesen, die Grenzen, die Voraussetzungen, den kulturgeschichtlichen Hintergrund und den Stellenwert der Mathematik nachzudenken.

## 4 LITERATUR

KAISER, A., KAISER, R.: Metakognition. Denken und Problemlösen optimieren. Luchterhand 1999

POLYA, G.: How to solve it. Princeton University Press. Princeton 1945

SCHOENFELD, A. H.: Mathematical Problem Solving. Academic Press. San Diego 1985