EIN UNTERRICHTSVERSUCH ZU LINEAREN FUNKTIONEN UND EXPONENTIALFUNKTIONEN

Fritz Kaplan, Sonja Malle, Helge Woschitz
BG/BRG St. Veit an der Glan

St. Veit an der Glan, 2004

INHALTSVERZEICHNIS

ABSTRACT

In diesem Projekt ging es um die Planung, Realisierung und Evaluation eines Unterrichts zum Thema „Lineare Funktionen“, der speziell auf die Entwicklung von Grundvorstellungen zu diesem Thema angelegt war. Das hauptsächliche Ziel war dabei, festzustellen, inwiefern die Entwicklung solcher Grundvorstellungen in einer fünften Klasse möglich ist. Eine Besonderheit des Vorgehens bestand darin, dass zwei Lehrer (S.Malle, H.Woschitz) gleichzeitig in der Klasse unterrichteten.

Ausgangspunkte waren eine Liste von Grundvorstellungen sowie ein Lehrgangsmanuskript, welche uns von G. Malle zur Verfügung gestellt wurden. Nach einer langen Phase der intensiven Auseinandersetzung mit dem Grundvorstellungskonzept wurde der Unterricht gemeinsam konzipiert und durchgeführt. Die Evaluation erfolgte durch eigene Beobachtungen sowie einen vom S1-Leitungsteam erstellten und ausgewerteten Test. Ein Nachdenken über die (zufrieden stellenden) Testergebnisse erbrachte einige erwähnenswerte Einsichten in die Effizienz von Unterricht.

Ein analoges Vorgehen zum Thema „Exponentialfunktionen“ durch F. Kaplan ist noch im Laufen. Ein ergänzender Bericht wird nach Abschluss nachgereicht.

1 BESCHREIBUNG DES UNTERRICHTSVERSUCHS

1.1 Ziele des Unterrichtsversuchs

Der Unterrichtsversuch diente dazu, zu erkunden, inwiefern es durch einen geeigneten Unterricht möglich ist, den Schülerinnen und Schülern zu helfen, Grundvorstellungen zu bestimmten Inhalten des Mathematikunterrichts zu entwickeln. Wir haben uns dazu entschlossen, dies an den Beispielen der linearen Funktionen und Exponentialfunktionen durchzuführen. Dazu wurden uns vom S1-Leitungsteam zwei Unterlagen zur Verfügung gestellt. Die Liste von Grundvorstellungen zu linearen Funktionen findet man u.a. in MALLE 2002, das Lehrgangsmanuskript entspricht weitgehend dem Vorgehen in MALLE et al. (2004). Vom wissenschaftlichen Leiter erhielten wir auch verschiedene Informationen über vorangegangene empirische Untersuchungen, die zeigten, dass die nötigen Grundvorstellungen bei Schülerinnen und Schülern im Allgemeinen nicht bzw. nicht ausreichend vorhanden sind.

1.2 Vorarbeiten

In ausführlichen gemeinsamen Gesprächen, die insgesamt ca. 20 Stunden in Anspruch nahmen, haben wir folgende Leistungen erbracht:

- Wir haben uns ausführlich mit den Grundvorstellungslisten auseinandergesetzt. Dies führte im Wesentlichen zu einer Identifikation mit diesen Listen, wir versahen jedoch die einzelnen Grundvorstellungen mit unterschiedlichen Wichtigkeiten.

- Wir haben alle Aufgaben durchgerechnet und gemeinsam besprochen. Einige Aufgaben haben wir auch geändert. Bei dieser Arbeit haben wir uns gründlich überlegt, welche Beiträge zu Grundvorstellungen die jeweiligen Aufgaben leisten.
- Wir haben gemeinsam den zeitlichen Umfang festgelegt und eine grobe Aufteilung der Unterrichtszeit vorgenommen.
- Wir haben uns entschlossen, dass Fritz Kaplan das Thema „Exponentialfunktionen“ in einer sechsten Klasse unterrichtet und Sonja Malle und Helge Woschitz gemeinsam das Thema „Lineare Funktionen“ in einer fünften Klasse unterrichten.

Da Fritz Kaplan mit seinem Unterricht noch nicht zu Ende ist, beziehen sich die folgenden Ausführungen nur auf den Unterricht von Sonja Malle und Helge Woschitz.

1.3 Zwei Lehrer in einer Klasse

Eine Besonderheit unseres Vorgehens bestand im Entschluss, in der fünften Klasse zu zweit zu unterrichten. In jeder Stunde waren Sonja Malle und Helge Woschitz in der Klasse. Wir einigten uns auf folgende Stoffaufteilung: Sonja Malle sollte den eher theoretischen Teil des Themas behandeln (direkte Proportionalitätsfunktionen, lineare Funktionen und ihre Eigenschaften, Deutungen der Steigung usw.), Helge Woschitz sollte den eher anwendungsorientierten Teil übernehmen (Zeit-Ort-Funktionen, Kostenfunktionen, rekursive Darstellungen in Anwendungssituationen usw.). Der jeweils nicht unterrichtende Lehrer saß im Hintergrund und beobachtete die Schülerinnen und Schüler sowie den Unterrichtsverlauf. Er ging auch in der Klasse herum, beantwortete Fragen und gab individuelle Hilfestellungen. Er führte auch ein Protokoll.

1.4 Der Unterrichtsverlauf

Die von uns ausgewählten bzw. entworfenen Aufgaben wurden den Schülerinnen und Schülern in Form von Kopien zur Verfügung gestellt. Für den Unterricht wurden 16 Folien angefertigt.

Der erste, von Sonja Malle gestaltete Teil, umfasste 9 Unterrichtsstunden. Es ging uns dabei vor allem um die Vermittlung der folgenden Grundvorstellungen bzw. des folgenden Grundwissens:

- Lineares Wachsen (Abnehmen) bedeutet: Gleiche Zunahme der Argumente bewirkt gleiche Zunahme (Abnahme) der Funktionswerte.
- Eine lineare Funktion besitzt die Termdarstellung $f(x) = k\,x + d$ (mit $k,d \in R$). Die Konstante k heißt Steigung der linearen Funktion.
- Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade.
- Die Konstante d ist der Funktionswert an der Stelle 0.
- Die Steigung k ist gleich dem Verhältnis der Änderung der Funktionswerte zur Änderung der Argumente.
- Die Steigung k ist gleich der Änderung der Funktionswerte bei Erhöhung des Arguments um 1.

- Die Steigung k ist gleich dem Faktor, mit dem man die Änderung der Argumente multiplizieren muss, um die Änderung der Funktionswerte zu erhalten. (Der Betrag der Steigung k gibt also an, wievielmal stärker sich die Funktionswerte ändern als die Argumente.)
- $k > 0 \;\Rightarrow\;$ f ist streng monoton wachsend
  $k < 0 \;\Rightarrow\;$ f ist streng monoton fallend
  $k = 0 \;\Rightarrow\;$ f ist konstant

Mit wenigen Ausnahmen wurden alle Aufgaben aus dem Manuskript im Unterricht behandelt bzw. zur Hausübung gegeben.

Der zweite, von Helge Woschitz gestaltete Teil, umfasste 8 Unterrichtsstunden, wobei in zwei dieser Stunden Anwendungsaufgaben mit dem Computer (EXCEL) behandelt wurden. Dabei ging es uns vor allem um die Entwicklung der folgenden Grundfähigkeiten:

Die Schülerinnen und Schüler sollen
- möglichst viele Anwendungen linearer Funktionen nennen und genauer beschreiben können,
- die Zahlen k und d in der Termdarstellung $f(x) = kx + d$ in verschiedenen Anwendungssituationen deuten können,
- imstande sein, Graphen von linearen Funktionen in Anwendungssituationen zu zeichnen und aus vorgegeben Graphen Verschiedenes herauszulesen,
- die im ersten Teil erworbenen Grundvorstellungen in Anwendungssituationen einsetzen können,
- imstande sein, lineare Prozesse rekursiv zu beschreiben,
- Probleme erläutern können, die sich beim Anwenden linearer Funktionen ergeben. (Warum linearer Ansatz ? Welche Annahmen liegen zugrunde? Was wird vernachlässigt? usw.)

Mit wenigen Ausnahmen wurden auch hier alle Aufgaben aus dem Manuskript im Unterricht behandelt bzw. zur Hausübung gegeben.

2 EVALUATION

2.1 Testevaluation

Zur Evaluation wurde uns ein Test vorgelegt, der vom S1-Leitungsteam zusammengestellt wurde. Dieser bestand aus zwölf, zum Teil untergliederten Aufgaben, in denen die zu linearen Funktionen gehörigen Grundvorstellungen und Grundfähigkeiten ziemlich lückenlos abgeprüft wurden (siehe Anhang). Die Testaufgaben waren uns vorher nicht bekannt. Die Auswertung des Tests erfolgte durch das Leitungsteam.

Wie man aus der beigelegten Auswertung (siehe Anhang) entnehmen kann, fiel der Test – zu unserer eigenen Überraschung – außerordentlich gut aus. Wir können also von der Annahme ausgehen, dass es uns gelungen ist, die geforderten Grundvorstellungen und Grundfähigkeiten zu linearen Funktionen bei unseren Schülerinnen und Schülern zu entwickeln. Wir können also sagen: Es lohnt sich, einen Unterricht zu planen und durchzuführen, der gezielt auf die Entwicklung von Grundvorstellungen und Grundfähigkeiten hin angelegt ist. Es ist mit vertretbarem

Aufwand möglich, dieses Ziel zu erreichen. Wie stabil das Erlernte ist, können wir natürlich nicht sagen, weil wir keine Langzeituntersuchung durchgeführt haben. Wenn es irgendwie möglich ist, werden wir aber nach einem Jahr oder nach mehreren Jahren einen analogen Test durchführen.

2.2 Beobachtung von Detailproblemen im Unterricht

Eine Aufgabe des gerade nicht unterrichtenden Lehrers bestand darin, Probleme bzw. Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler zu notieren, die sich während des Unterrichts ergaben. Wir führen im Folgenden von diesen Beobachtungen nur einige wenige an, die für uns lehrreich waren. Hinterher betrachtet kann man erkennen, dass die meisten Probleme, die die Schülerinnen und Schüler hatten, ihre Wurzeln im Mathematikunterricht der Unterstufe haben.

a) Obwohl die direkte Proportionalität ein Schwerpunktthema des Unterstufenunterrichts ist, zeigte sich, dass die Schülerinnen und Schüler wenig Vorverständnis zu diesem Begriff mitbrachten. Auf die Frage, wann zwei Größen direkt proportional seien, wurde vielfach im Prinzip geantwortet: Steigt die eine, steigt die andere. (Dies ist eine häufig zu beobachtende Verwechslung von direkter Proportionalität mit Monotonie). Nur zwei Schüler antworteten so: Wenn doppelte Warenmenge, dann doppelter Preis. Als Assoziation tauchte übrigens der Strahlensatz auf. Am Ende unseres Unterrichts konnten fast alle eine richtige Antwort geben. Wir können aber nur bestätigen, dass die Entwicklung dieser Sprechweisen Zeit braucht. Wenn man sich ihnen aber ernsthaft widmet, sind sie ohne weiteres machbar.

b) Die Schüler zeigten Unsicherheiten in Bezug auf Bezeichnungen für Zahlenmengen, was wir ebenfalls als Defizit aus der Unterstufe ansehen. Ein Problem bereitete zum Beispiel die Bezeichnung R_{o}^{+}. Diese Menge wurde öfters als Menge der positiven ganzen Zahlen bezeichnet.

c) Der Umgang mit der Funktionensprache und Funktionensymbolik bereitete unterschiedliche Schwierigkeiten. So war es etwa für viele sehr schwierig, Schreibweisen wie f(a·x) = a·f(x) oder f(x+y) = f(x) + f(y) in der Umgangssprache wiederzugeben. Schwierigkeiten traten auch auf, wenn in einem Funktionsterm f(x) das Argument x beispielsweise durch 3x substituiert werden sollte. Dabei spielen auch Defizite aus der Bruchrechnung mit. Zum Beispiel war das Hinschreiben von $s(\frac{t}{a}) = \frac{1}{a}\cdot s(t)$ schwieriger als $s(\frac{1}{a}\cdot t) = \frac{1}{a}\cdot s(t)$.

Manche Aufgaben, in denen nur Buchstaben vorkommen, waren nur schwer zu bewältigen. Zum Beispiel: Der Preis P(x) von x Kilogramm einer Ware sei zur Warenmenge x direkt proportional. Es gilt P(c) = d. Berechne P(1), P(c+1) und P(c-1).

Die Bedeutung von symbolisch hingeschriebenen Aussagen wurde nicht immer sofort erfasst. Nachdem beispielsweise v = s(t+1) – s(t) hergeleitet wurde, fragte eine Schülerin: Ist v immer der in einer Stunde zurückgelegte Weg?

d) Es zeigten sich auch Defizite im Prozentrechnen, z.B. bei der Berechnung von Zinsen. So konnten viele die Aussage K(x) = x + 2% von x nicht in eine Gleichung übersetzen. Auch das hätte schon in der Unterstufe gelernt werden sollen.

e) Die Aufgabe, eine Termdarstellung der linearen Funktion zu finden, von der zwei Werte gegeben sind, machte einigen Schülerinnen und Schülern Schwierigkeiten.
Die Probleme lagen jedoch hauptsächlich im Lösen des Gleichungssystems.

f) Steigungsdreiecke einzuzeichnen ist nicht so leicht wie man zunächst annimmt, besonders dann, wenn die Steigung k eine ganze Zahl ist.

g) Beim Beweis, dass der Graph einer linearen Funktion eine Gerade ist, stellten wir fest, dass einige Schüler die Pfeile bei der Parallelverschiebung der Geraden nicht parallel zu zweiten Achse bzw. in unterschiedlichen Richtungen einzeichneten. Damit haben wir nicht gerechnet.

h) Beim Vergleich von zwei Zeit-Ort-Funktionen wurde gefragt: Warum schreibt man nicht A(t) und B(t) für Anton und Berta statt s(t) und $\bar{s}(t)$? Probleme gab es auch beim Umrechnen von km/h in m/s o.ä.

i) Die Behandlung von Kostenfunktionen verlief relativ reibungslos, lediglich die verschiedenen Deutungen von k in Anwendungssituationen führten zu sprachlichen Problemen.

j) Bei den Achsenbeschriftungen konnten wir zunächst bei einigen Schülern und Schülerinnen eine starre Fixierung auf x und y beobachten. Dies ist bei Anwendungsaufgaben oft sehr störend und auch ein Defizit aus der Unterstufe. Oft fanden die Schülerinnen und Schüler keine passenden Buchstaben für die Beschriftung der Achsen. Beim Zeichnen der Graphen machte gelegentlich die Wahl passender Einheiten Schwierigkeiten.

2.3 Schülermeinungen zum Unterrichtsversuch

Nach Beendigung des Unterrichts haben wir die Schülerinnen und Schüler gebeten, ihre Meinung zu diesem Unterrichtsversuch schriftlich festzuhalten. Dabei haben sich schwerpunktmäßig folgende Meinungen ergeben:

- Etliche haben dieses Projekt als interessant und motivierend empfunden und meinten, dass dieses Experiment durchaus hätte länger dauern können.
- Etliche haben erkannt, dass der Unterricht gezielt auf ein Verständnis des Stoffes angelegt war. Manche allerdings sahen keinen großen Unterschied zum sonstigen Unterricht der betreffenden Lehrperson.
- Einige haben das Stoffgebiet als leicht empfunden.
- Viele behaupteten, einen guten Einblick in das Stoffgebiet erworben zu haben.
- Einige meinten, jetzt mehr über die Anwendungen dieses Stoffes zu wissen.

Zur Illustration führen wir einige Originalzitate der Schülerinnen und Schüler (mit allen Rechtschreibfehlern) an:

- *Es hat auch Spaß gemacht.*
- *Das Projekt war einfach nur cool.*

- *Ich glaube, dass es keine negativen Seiten bei diesem Projekt gegeben hat.*
- *Die Lehrer haben sich wirklich Mühe gegeben.*
- *Ich finde, man sollte solche Projekte öfter machen, dann würden sich viele Schüler leichter tun.*
- *Durch das genau Lernen vergisst man den Stoff nicht.*
- *lernt mehr.*
- *leichter, weiteren Stoff zu verstehen.*
- *alles genau besprochen.*
- *Auf diese Art kann man wirklich gut lernen.*
- *Überhaupt wurde der Stoff gut rüber gebracht.*
- *Der Stoff wurde sehr genau und sehr verständlich durchgenommen.*
- *Ich habe den Stoff wirklich verstanden.*
- *Der Unterricht war während dieser Zeit aber auch sonst sehr gut, da alles gut erklärt wird und auch viele Beispiele durchgerechnet werden, viel besser kann man den Unterricht, meiner Meinung nach nicht gestalten.*
- *Die linearen Funktionen wurden lange und ausführlich geübt. Ich könnte sie wahrscheinlich immer noch.*
- *Funktionen, egal welcher Art, finde ich leicht.*
- *Wir wissen nun, wie man Funktionen in der Wirtschaft gebrauchen kann.*

2.4 Bringt ein Unterricht durch zwei Lehrer Vorteile?

Zu dieser Frage haben wir vor Beginn des Unterrichts die folgenden Hypothesen aufgestellt. Diese haben sich aus unserer Sicht bewahrheitet:

- Probleme von Schülerinnen und Schülern werden durch die Anwesenheit zweier Lehrer leichter erkannt.
- Konzentriertes Arbeiten wird gefördert, da die Schülerinnen und Schüler sich durch zwei Lehrpersonen mehr beobachtet fühlen als durch eine.
- Fehler bei Hausübungen können individueller und intensiver besprochen werden.
- Nette Abwechslung, motivierend für die Lehrenden.

In der oben erwähnten schriftlichen Befragung nahmen die Schülerinnen und Schüler auch zur Frage Stellung, ob die Anwesenheit zweier Lehrpersonen Vorteile gebracht hätte. Ihre Urteile deckten sich weitgehend mit den unseren. Darüber hinaus wurden noch folgende Punkte angesprochen:

- Die Anwesenheit beider Lehrpersonen wurde nicht als störend empfunden. Die Schülerinnen und Schüler fühlten sich zwar durch den Zweitlehrer im Hintergrund beobachtet, behaupteten aber gleichzeitig, dass sie sich an diese Situation schnell gewöhnt hatten.
- Die (zum Teil durch den Stoff bedingten) unterschiedlichen Unterrichtsstile der beiden Lehrpersonen wurden wahrgenommen, jedoch nicht bewertend gegeneinander ausgespielt.
- Zwei Lehrpersonen ergänzen einander. Versteht man etwas bei der einen nicht so gut, kann man die andere fragen. Unterschiedliche Arten der Erklärung wurden als hilfreich empfunden. Schwächeren Schülerinnen und Schülern kann dadurch geholfen werden.

Auch dazu einige Originalzitate:

- *Der Unterricht mit zwei Lehrern war eine neue, wertvolle Erfahrung.*
- *Jeder Lehrer hat seine eigene Technik beim Erklären von Dingen, vor allem in der Mathematik.*
- *Abwechslung, man lernt verschiedene Arbeits- bzw. Unterrichtsweisen der Lehrer kennen.*
- *Es können die Lehrer die Schüler während der Stunde beobachten … keine Unterhaltungen möglich → Aufmerksamkeit der Schüler.*
- *Man lernt die Dinge aus zwei Perspektiven kennen.*
- *Hat Möglichkeit so oft zu fragen wie man will.*
- *Meiner Meinung nach war durch die Anwesenheit der beiden Lehrer das Arbeitsverhältnis sehr gut. Ich denke aber dass dies Hauptsächlich mit dem Respekt gegenüber diesen Lehrern zu tun hat und dadurch hat sich die ganze Klasse wirklich voll und ganz auf den Unterricht konzentriert / konzentrieren müssen.*
- *Im Endeffekt war es gar nicht so ungewöhnlich oder anders, wenn zwei Lehrer in der Klasse sind, für uns Schüler gab es keine Unterschiede.*
- *Es war jedoch auch interessant zu sehen wie zwei Lehrer die das gleiche unterrichten, doch so unterschiedlich ihren Unterricht gestalten.*
- *Zwei Lehrer ergänzen sich gegenseitig.*
- *Die Lehrer konnten sich auch ein Bild machen, ob wir es gut verstanden oder nicht oder wie schnell oder wie langsam.*
- *Alles wurde von beiden Lehrern auf sehr gute Weise erklärt aber auf verschiedene Arten. Z.B.: lustig aber genau & genau und den Schülern gegenüber sehr aufmerksam.*
- *Man hat zwei Personen, die man zu Hilfe rufen kann, falls etwas unverständlich ist.*
- *Ein Lehrer kann sich auf den einzelnen Schüler einlassen, der andere macht mit dem Stoff weiter. → ist mit einem Lehrer pro Klasse nicht möglich.*

Hinterher sind uns noch einige Punkte klar geworden, die das Verhältnis der beiden unterrichtenden Lehrpersonen zueinander betreffen:

- Wir haben in einem Ausmaß über den Stoff gesprochen, wie es sonst an der Schule nicht üblich ist, und haben uns in einem ungewöhnlich hohen Ausmaß mit dem Stoff auseinandergesetzt.
- Wir haben erfahren, dass unsere Grundansichten ähnlich sind, was für den Unterrichtsversuch günstig war. Es ist eine angenehme Vertrauensbasis vorhanden, die eine offene Kommunikation ermöglicht hat.
- Wir sind uns aber auch gewisser Stilunterschiede beim Unterrichten bewusst geworden. Jeder von uns hat seine Eigenarten. Wir haben voneinander gelernt und unser Stilrepertoire erweitert. Wir haben aber auch gelernt, dass Unterrichtsstile nicht unabhängig vom jeweiligen Stoffgebiet sind.

3 WAS MACHT UNTERRICHT IN DEN AUGEN DER SCHÜLER EFFIZIENT?

Aus den schriftlichen Äußerungen der Schülerinnen und Schüler gehen ziemlich klar einige Punkte hervor, die sie am Unterricht besonders schätzen. Im Vordergrund stehen dabei ein durchschaubarer Aufbau des Stoffes, eine gute Gliederung der Darbietung und eine verständliche Behandlung. Auch wenn sich die Schülerinnen und Schüler nicht so ausdrücken, geben sie sehr deutlich zu erkennen, dass der Stoff für sie Sinn ergeben muss. Es gab keinerlei Äußerung der Art, dass man etwas Unsinniges oder Unbrauchbares gelernt hätte (ein Vorwurf, der sonst aus Schülermund häufig kommt). Auch die vielfach zu hörende Forderung nach mehr Spaß im Unterricht fand sich in diesen Schüleräußerungen so gut wie nicht (lediglich ein einziger Schüler meinte, dass der Unterricht ein wenig lustiger hätte sein können). Auch gab es keinerlei Hinweise auf lernpsychologische oder pädagogische Stärken bzw. Defizite. Es ist – salopp gesagt - den Schülerinnen und Schülern anscheinend mehr oder weniger egal, nach welchen Methoden vorgegangen wird, die Hauptsache bilden für sie Sinn, Verstehen und Einsicht. Als Grund für den Erfolg des Unterrichts wurde auch ziemlich oft der Respekt genannt, den die Schülerinnen und Schüler den Lehrpersonen und damit indirekt dem Fach zuerkennen.

4 WARUM GEHÖREN DIE BEHANDELTEN GRUNDVORSTELLUNGEN ZUR GRUNDBILDUNG?

Wir versuchen diese Frage anhand der S1-Leitlinien zu beantworten, wobei wir auch die noch ausständigen Exponentialfunktionen einbeziehen:

Alltagsbewältigung: Linearität und exponentielles Wachsen (Fallen) sind Grundmuster von Prozessen, mit denen man im Alltag durchaus konfrontiert werden kann. Beispiele: Lineare Gehaltserhöhungen, lineare Steuerabschreibungen, exponentiell ansteigende Zinseszinsen, exponentielle Wertabnahme von Autos, Alkoholabbau im Blut.

Weltverständnis: Dieses erfolgt via Physik und andere Naturwissenschaften. Lineare und exponentielle Zusammenhänge sind grundlegend für physikalisches Verständnis. Auch wenn Zusammenhänge nicht linear sind, beschreibt man sie häufig näherungsweise durch lineare Funktionen, weil dies einfacher ist. Mehr noch: Sehr viele physikalische Formeln drücken direkte Proportionalitäten aus.

Kulturelles Erbe: Linearität und prozentuelles Wachsen (Fallen) sind mathematische Grundideen, die sich schon in der Antike vorfinden und die Entwicklung der Mathematik grundlegend beeinflusst haben.

Einblick in die Mathematik als Wissenschaft: Die Themen werden einerseits auf einer formalen Ebene behandelt, andererseits wird herausgearbeitet, dass es zum Verständnis von Mathematik auch gewisser intuitiv-anschaulicher Vorstellungen bedarf. Die linearen Funktionen und Exponentialfunktionen eignen sich besonders gut dazu, diese beiden Ebenen bewusst zu machen.

Gesellschaftsrelevanz: Lineare oder exponentielle Wachstums- oder Abnahmevorgänge sind häufig normativer Natur (siehe etwa die obigen Beispiele zur linearen Gehaltserhöhung oder zur exponentiellen Abnahme der Gebrauchtwagenpreise). Solche Festsetzungen müssen kritisch hinterfragt werden, z.B. in Hinblick auf Gerechtigkeit. Dazu ein aktuelles Beispiel: In der Kärntner Ausgabe der Kleinen Zeitung vom 19. November 2003 erschien folgende Schlagzeile auf der Titelseite. Wie viele Leser werden diese wohl richtig interpretieren? Ist das, was hier ausgesagt wird, gerecht? Wie ist das Wörtchen „linear“ hier zu verstehen? Wie würde der Graph einer zugehörigen Funktion aussehen? Wir glauben, dass unsere Schülerinnen und Schüler nach dem erfolgten Unterricht Fragen dieser Art beantworten können.


KLAGENFURT, MITTWOCH, 19. NOVEMBER 2003 www.kleinezeitung.at

KLEINE ZEITUNG

POLITIK

Schlechte Nerven

Karl-Heinz Grasser wieder unter Beschuss: Der Staatsanwalt ermittelt wegen seines Sozialfonds, der Minister zeigt sich nervös.
SEITEN 4/5

Gleicher Prozentsatz für Portier und Hofrat

Die Gehaltserhöhung um 1,85 Prozent gilt linear für alle Beamten. SEITE 5

5 KOMMUNIKATION NACH AUSSEN

Der Unterrichtsversuch wurde in einer Konferenz dem Lehrkörper vorgestellt. Eine ausführlichere Darstellung im Lehrkörper wird es demnächst geben.

6 LITERATUR

MALLE,G.(1997): Ein Lehrgang über lineare Funktionen. Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Höheren Schulen (Österreichische Mathematische Gesellschaft), Heft 27, 221-233.

MALLE, G.(2004): Lineare Funktionen. Skriptum, Universität Wien.

MALLE,G. (2002): Grundbildung entlang von Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. In KrainerK./Dörfler,W./Jungwirth,H./ Kühnelt,H./Rauch,F./Stern,Th. (Hrsg.): Lernen im Aufbruch: Mathematik und Naturwissenschaften. Pilotprojekt IMST[2]

MALLE,G./RAMHARTER,E./ULOVEC,A./KANDL,S.(2004): Mathematik verstehen 1. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien.

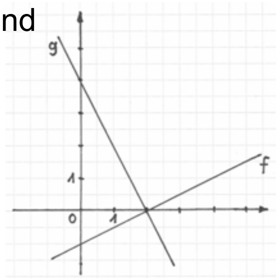
ANHANG: TESTAUSWERUNG

Testfragen

1 Eine Größe wächst linear. Was bedeutet das?

2 Eine der folgenden drei Funktionen ist linear. Zeichne ihren Graphen.
$f(x) = x^2 – 1$ $g(x) = 2x – 1$ $h(x) = 2x^3 – 1$

3 Gib jeweils eine Termdarstellung der nebenstehend abgebildeten linearen Funktionen f und g an.



4 Skizziere den Graphen einer linearen Funktion f mit f(x) = kx + d, wobei
a) k > 0, d > 0 b) k < 0, d < 0

5 Es sei f eine lineare Funktion mit f(x) = kx + d. Kreuze an, welche der folgenden Aussagen richtig sind.

□ k = f(0) □ k = f(1) □ k = $\frac{f(x)}{x}$ (für $x \neq 0$) □ d = f(0)

□ k = f(x+1) – f(x) □ k = f(x+h) – f(x) □ k = $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (für $h \neq 0$)

6 Es sei f(x) = 10x + 9. Beantworte ohne zu rechnen: Um wie viel nehmen die Funktionswerte zu, wenn x um 1 erhöht wird?

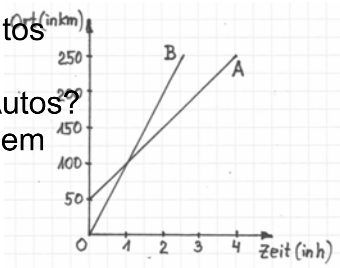
7 Gib zwei Anwendungssituationen an, die durch eine Funktion f mit f(x) = k·x + d beschrieben werden können. Gib in jedem Fall an, was k und d bedeuten.

8 Eine Wanne wird gleichmäßig mit Wasser gefüllt. Pro Minute fließen 20 Liter zu.
a) Stelle eine Formel für das Wasservolumen V(t) in der Wanne zum Zeitpunkt t auf
(t in Minuten, V(t) in Liter).
b) Ist V(t) zu t direkt proportional? Wenn ja, gib den Proportionalitätsfaktor an.
c) Zeige: In der doppelten Zeit fließt die doppelte Wassermenge zu.
d) Wie groß ist V(1)? Was bedeutet V(1)?
e) Was lässt sich über den Quotienten $\frac{V(t)}{t}$ aussagen?

9 Eine Wanne wird gleichmäßig mit Wasser gefüllt. Für das Wasservolumen V(t) in der
Wanne zum Zeitpunkt t gilt V(t) = 20t +150 (t in Minuten, V(t) in Liter).
a) Was bedeuten die Zahlen 20 und 150?
b) Fließt in der doppelten Zeit die doppelte Wassermenge zu? Begründe deine Antwort.
c) Wie viel mal schneller wächst das Wasservolumen in der Wanne als die Zeit?

10 Die Produktionskosten für x Kilogramm eines Pulvers seien K(x) = 2·x + 25.
a) Was bedeuten die Zahlen 2 und 25?
b) Es wird mehr Pulver produziert. In welchem Verhältnis steht dabei die Erhöhung der Produktionskosten zur Erhöhung der produzierten Pulvermenge?
c) Sind die Produktionskosten zur produzierten Pulvermenge direkt proportional? Wenn ja, gib den Proportionalitätsfaktor an.

11 Nebenstehend sind die Zeit-Ort-Diagramme zweier Autos dargestellt. Lies aus dem Diagramm ab:
a) Mit welchen Geschwindigkeiten fahren die beiden Autos?
b) Welchen Vorsprung hat das Auto A zu Beginn vor dem Auto B?
c) Wann und wo holt das Auto B das Auto A ein?



12 Anna hat 30 € im Sparschwein und legt einen Monat lang wöchentlich 5 € dazu. Es sei G die Funktion, die jedem Zeitpunkt t (in Wochen) den Geldbetrag G(t) (in €) im Sparschwein zuordnet. Gib eine rekursive Darstellung und eine Termdarstellung der Funktion G an.

Auswertungskategorien:

A = richtige Antwort
B = teilweise richtige Antwort
C = richtige Antwort, aber nicht Antwort auf die gestellte Frage
D = falsche Antwort
E = keine Antwort

Frage 1

A	B	C	D	E
10	3	2	9	1

Beispiele zu A: 5 Schüler schrieben singngemäß: Wenn das Argument um h wächst, wächsen der Funktionswert um k·h. Ein Schüler schrieb: Wenn das Argument um 1 wächst, wächst der Funktionswert um 1. Vier Schüler schrieben singngemäß: Gleiche Zunahme der Argumente bewirkt gleiche Zunahme der Funktionswerte.

Beispiele zu B: Ein Schüler schrieb sprachlich mangelhaft:
- *Lineares Wachsen bedeutet gleiche Zunahme bzw. Abnahme der Funktionswerte bei gleicher Zunahme bzw. Abnahme.*

Zwei Schüler argumentierten mit der Gleichmäßigkeit der Zu- bzw. Abnahme:
- *Die Größe steigt oder fällt gleichmäßig, d.h. sie nimmt gleichmäßig zu oder gleichmäßig ab.*
- *Sie nimmt gleichmäßig an Größe zu. Die Steigung ist eine Konstante k. Wenn man das Argument um 1 erhöht, steigt die Gerade immer gleichmäßig an.*

Beispiele zu C:
Zwei Schüler schrieben sinngemäß:
- *Eine Größe nimmt zu, wenn k > 0. Ist k < 0, nimmt sie ab. Funktionswerte nehmen zu, wenn sich Argument um 1 vergrößert (k > 0). Funktionswerte nehmen ab, wenn sich Argument um 1 vergrößert (k < 0).*

Beispiele zu D:
Einige Schüler erkennen offensichtlich nicht, dass direkte Proportionalitätsfunktionen Spezialfälle von linearen Funktionen sind:
- *Die Zu- & Abnahme der Argumente ist zur Zu- & Abnahme der Funktionswerte nicht direkt proportional, da es eine lineare Funktion ist.*
- *Die Zu- bzw. Abnahme der Argumente ist nicht direkt proportional zur Zu- bzw. Abnahme der Funktionswerte, da es linear und nicht direkt proportional wächst.*

Viermal wurde sinngemäß genannt;
- *Wenn das Argument um 1 wächst, wächst der Funktionswert um 1.*

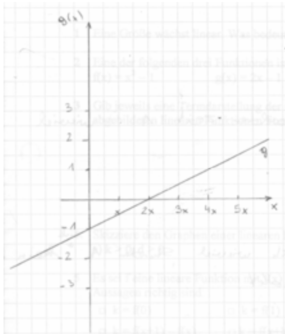
Zweimal wurde sinngemäß genannt:
- *Die Zunahme bzw. Abnahme der Argumente bewirkt die Zunahme bzw. Abnahme der Funktionswerte.*

Frage 2

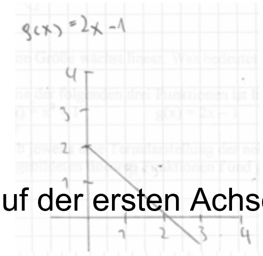
A	B	C	D	E
18	0	0	7	0

Bemerkungen zu A: 11 Schüler ermittelten zwei Punkte der Geraden und verbanden diese durch eine gerade, 3 Schüler verwendeten ein Steigungsdreieck und 4 Schüler zeichneten lediglich die Gerade.

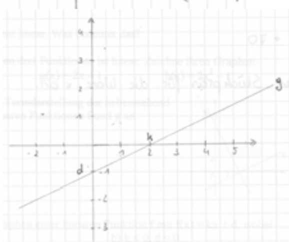
Beispiele zu D:
Bei einer Schülerin findet sich die folgende Zeichnung:



Einige Schüler zeichneten die gerade mit falscher Steigung. Eine Schülerin kam durch einen Rechenfehler zu einer falschen Steigung, zeichnete aber ansonsten richtig. Eine Schülerin verwechselte k und d:



Eine Schülerin zeichnete k auf der ersten Achse ein:



Eine Schülerin bezeichnete f und g als nicht linear, jedoch h als linear und zeichnete diese Funktion als Gerade. Ein Schüler zeichnete alle drei Funktionen als Geraden.

Frage 3

A	B	C	D	E
11	6	0	5	3

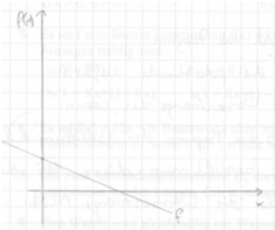
Beispiele zu B: Bei f wurde dreimal k = 2 angegeben, bei g zweimal k = 2 und einmal k = -1.

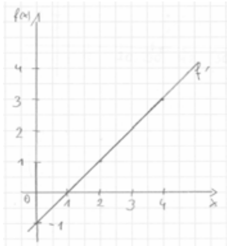
Beispiele zu D: Bei f wurde dreimal k = 2, einmal k = -1 und einmal k = 1 angegeben, bei g dreimal k = 2 und einmal k = 4.

Frage 4

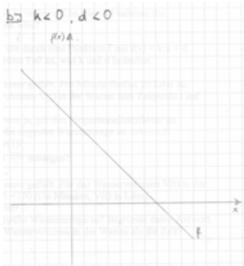
A	B	C	D	E
17	8	0	0	0

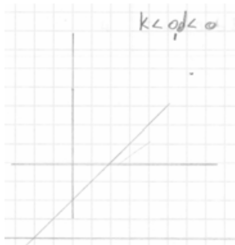
Beispiele zu B:
Zu $k > 0$, $d > 0$ wurde zweimal ein Graph wie in der ersten der beiden folgenden Abbildungen gezeichnet, einmal ein Graph wie in der zweiten Abbildung:





Zu $k < 0$, $d < 0$ wurde dreimal ein Graph wie in der ersten der beiden folgenden Abbildungen gezeichnet, zweimal ein Graph wie in der zweiten Abbildung:





Frage 5

A	B	C	D	E
12	13	0	0	0

Neben richtigen Antworten wurden auch häufig falsche Antworten angekreuzt. Im Detail sieht es so aus:

1r				2r			3r	
0f	1f	2f	3f	0f	1f	2f	0f	1f
1	0	3	1	0	0	2	12	6

Die falschen Antworten wurden mit folgenden Häufigkeiten angekreuzt:

$k = f(0)$: 2
$k = f(1)$: 4
$k = \frac{f(x)}{x}$: 8
$k = f(x+h) - f(x)$: 5

Frage 6

A	B	C	D	E
18	2	1	3	1

Beispiel zu B:
- *Die Funktionswerte nehmen um k zu.*

Beispiel zu C:
- *Im Verhältnis 10:1.*

Beispiele zu D:
- *Sie nehmen 1mal zu.*
- *f(1) = 10·1 + 9*
  f(1) = 10 + 9
- *Es nimmt 0 zu* [Schreibfehler?]

Frage 7

A	B	C	D	E
10	9	2	4	0

Beispiele zu A:
Folgende Anwendungssituationen wurden genannt:
- Kostenfunktion (14mal, davon 3mal Handykosten)
- Zeit-Ort-Funktion (8mal)
- Volumen-Zeit-Funktion (Badewanne, Becken) (7mal)
- Gewicht-Volumen-Funktion (1mal)
- Geldbetrag im Sparbuch (Sparschwein) (2mal)
- Wachstum einer Pflanze (1mal)

Beispiele zu D:
Deutungen von k:
- Menge, die in einer bestimmten Zeitdauer zugeführt wird
- Mehrkosten
- Verkaufserlös

Deutung von d:
- Mehrwertsteuer

Frage 8a

A	B	C	D	E
21	0	0	4	0

Beispiele zu D:
- *V(t) = t + 20*
- *V(1) = 20*
- *V(t) = 20·t + d*
- *V(t) = 20·x + d (wenn x > 0)*

Frage 8b

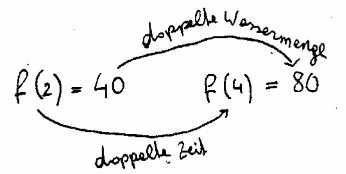
A	B	C	D	E
17	3	0	4	1

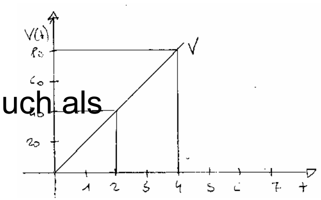
Beispiele zu D:
- *Ja, t = Proportionalitätsfaktor* [Diese Schülerin schrieb V(t) = t + 20.]
- *Der Proportionalitätsfaktor beträgt 0,5* [aus der Zeichnung falsch abgelesen].
- *k =* $\frac{3}{60}$ [aus der Zeichnung falsch abgelesen].
- *Nein!*

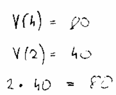
Frage 8c

A	B	C	D	E
12	2	0	10	1

Beispiele zu A: Viermal wurde eine Begründung lediglich durch eine Zeichnung (Graph) gegeben. Eine dieser Schülerinnen schreibt aber zusätzlich:
- *f(x) = f(2·x)* ⇒ *k·x = k(2x)* ⇒ *kx = 2k(x)* ⇒ *f(x) = 2f(x)* [Bemerkenswert ist dabei, dass k
  sowohl als Zahlsymbol wie auch Funktionssymbol verwendet wird.]

Beispiele zu D:
Fünf Schüler argumentierten nur anhand konkreter Zahlen, zum Beispiel:
- *Wenn nach 2 Minuten 40 Liter zufließen, fließen nach 4 Minuten 80 Liter zu.*
- 

- 



[Wegen der Zeichnung könnte man dies auch als paradigmatisches Beispiel auffassen und unter B einordnen.]

Frage 8d

A	B	C	D	E
16	1	5	2	1

Bemerkungen zu A:
V(1) wurde gedeutet als
- *Volumen zum Zeitpunkt 1 (bzw. nach 1 Minute)*: 11mal
-*Zufluss pro Minute*: 6mal

Beispiel zu C:
V(1) wurde gedeutet als
- *Funktionswert an der Stelle 1* (3mal)
- *Proportionalitätsfaktor* (2mal)

Beispiel zu D:
- *V(1) ist der Zeitpunkt, wenn genau 20 l zugeflossen sind.*

Frage 8e

A	B	C	D	E
21	0	0	2	2

Bemerkung zu A: 11 Schüler bezeichneten $\frac{V(t)}{t}$ als konstant. Der Rest schrieb nur k (einer schrieb Proportionalitätsfaktor k, ein anderer Steigung k).

Frage 9a

A	B	C	D	E
14	2	6	2	1

Bemerkung zu A: 13 Schüler bezeichneten 20 sinngemäß als Zufluss pro Minute, ein Schüler bezeichnete 20 als jenen Litergehalt, der sich zum Zeitpunkt 1 im Becken befindet.

Bemerkung zu C: Von einigen wurde 20 als Steigung oder als Konstante und 150 als Funktionswert an der Stelle 0 bezeichnet.

Beispiele zu D:
- *20 = Zeit, 150 = dazufließende Liter*
- *20t … 20 Minuten fließt das Wasser zu*
  150 … Es fließen minutlich 150 Liter zu

Frage 9b

A	B	C	D	E
10	0	0	14	1

Bemerkung zu A: Die Schwierigkeit dieser Frage liegt darin, zwischen dem in der Wanne befindlichen Volumen und dem in einer Zeiteinheit zufließenden Volumen zu unterscheiden.
Einige Schüler beschrieben dies sehr klar, zum Beispiel:
- *Ja. Zwar ist nicht die doppelte Wassermenge drin, aber es* <u>*fließt*</u> *die doppelte Wassermenge*
  zu.
- *Es stimmt den das Wasser fließt konstant in die Wanne (2mal).*
- *Ja!* $V(2t) = 2 \cdot (20 \cdot t) + 150$

Beispiele zu D:
In vielen Antworten spiegelt sich die Verwechslung des in der Wanne befindlichen Volumens mit dem in einer Zeiteinheit zufließenden Volumen. Das Vorhandensein der Konstanten 150 führte dann zu einer Nein-Antwort, zum Beispiel:
- *NEIN! Weil bereits ein Anfangsvolumen vorhanden ist* $\Rightarrow$ *150*
- $V(2t) = 20 \cdot 2t + 150 = 2 \cdot 20 \cdot t + 150 = 40t + 150$ *(3mal)*
- *Nein, es verdoppelt sich nur k. (In einer Minute fließen nur 40 Liter zu.)*
- *Nein, da die 150 Liter, die anfangs in der Wanne waren, nicht verdoppelt werden.*

Frage 9c

A	B	C	D	E
16	1	2	2	4

Beispiel zu B:
- *Das Wasser wächst um 20 Einheiten schneller.*

Bemerkung zu C: Beide Schüler schrieben:
- *Im Verhältnis 20:1*

Antworten zu D:
- *Um 150 l !*
- *Es wächst im Verhältnis 20 : 150*

Frage 10a

A	B	C	D	E
17	6	1	1	0

Beispiele zu B:
Die Zahl 25 wurde von allen Schülern in dieser Kategorie als Fixkosten interpretiert.
Die Zahl 2 wurde u.a. interpretiert als
- *Mehrkosten*
- *Erlös, den man aus einem verkauften Stück gewinnt.*
- *erzeugte kg*
- *die zweifache Menge von x Kilogramm*
- *der Preis pro Pulver*
- *die variablen Kosten, die sich für jedes erzeugtes Kilogramm erhöhen.*

Kein einziger Schüler in allen Kategorien bezeichnete 2 als variable Kosten pro Kilogramm. Wurde 2 lediglich als variable Kosten bezeichnet, wurde dies als richtig gewertet. Es scheint nicht allen Schülern klar zu sein, worauf sich das Wort „variabel“ bei den variablen Kosten bezieht.

Frage 10b

A	B	C	D	E
14	0	1	9	1

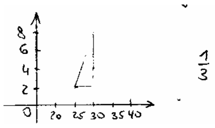
Beispiele zu D:
- $\frac{\text{Erhöhung der Pr oduktionskosten}}{\text{Erhöhung der produzierten Pulvermenge}} = k = 20 \Rightarrow$ *im Verhältnis 20 : 1*
- *Die Produktionskosten werden ebenso erhöht.*
- *Im Verhältnis 1 : 3*
- $\frac{1}{3}$
- *Im Verhältnis 2 : 0*
- *2 : 25 (3mal)*

Frage 10c

A	B	C	D	E
17	0	0	3	5

Bemerkung zu A: 6 Schüler gaben eine Begründung an (die nicht immer ganz richtig war).

Beispiele zu D:
- *Nein! Proportionalitätsfaktor: k = 2*
- *Ja! 27*

- 

Frage 11a

A	B	C	D	E
21	0	0	4	0

Beispiele zu D:
- *Das 1. Auto fährt mit 100 km/h.*
  Das 2. Auto fährt mit 50 km/h.
- *A fährt mit konstanter Geschwindigkeit*
  B fährt mit zunehmender Geschwindigkeit
- *Auto B fährt in einer Zeit von $\frac{1}{2}$ Stunde 50 km.*
  das Auto A fährt in einer Zeit von $\frac{1}{2}$ Stunde 60 km.
- $A(h) = 50 \cdot h + 50$
  $B(h) = 50 \cdot \frac{h}{2}$
  $B(h) = 25 \cdot h$

Frage 11b

A	B	C	D	E
23	2	0	0	0

Antworten zu B:
- *50 km/h*
- *50 m*

Frage 11c

A	B	C	D	E
18	5	0	2	0

Bemerkung zu B: Vier Schüler gaben nur den Zeitpunkt an, ein Schüler nur den Ort.

Antworten zu D:
- *Nach einem Km holt Auto A, Auto B ein.*
- *Nach einer Stunde und nach 100 m.*

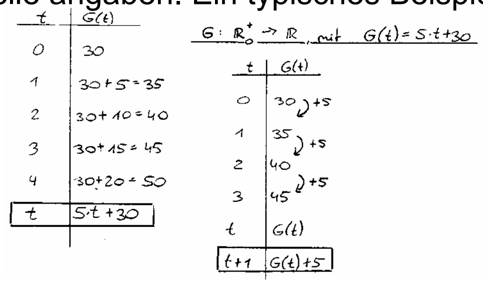
Frage 12

A	B	C	D	E

9	14	0	1	1

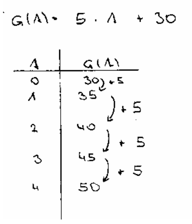
Bemerkungen zu allen Kategorien: Von jenen Schülern, die die rekursive Darstellung richtig angaben, schrieb keiner dazu, für welche t die Rekursionsgleichung gilt. Auffällig war, dass viele Schüler die Termdarstellung bzw. rekursive Darstellung nicht in der üblichen Formeldarstellung hinschrieben, sondern im Rahmen einer Tabelle angaben. Ein typisches Beispiel:

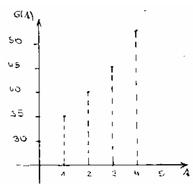
-

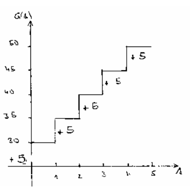


Einige fügten auch Zeichnungen hinzu, zum Beispiel:

-







Manche begnügten sich lediglich mit einer Tabelle, manche lediglich mit einer Zeichnung. Im Einzelnen sieht es so aus:

Nur Formeln für beide Darstellungen: 4
Nur Tabellen für beide Darstellungen: 4
Nur Tabelle für rekursive Darstellung: 6
Nur Zeichnung für rekursive Darstellung: 1
Nur Tabellen und Zeichnungen für beide Darstellungen: 1
Nur Tabelle und Zeichnung für rekursive Darstellung: 1
Nur Zeichnung für Termdarstellung + Tabelle für rekursive Darstellung: 1
Nur Tabellen für beide Darstellungen + Zeichnung für Termdarstellung: 2
Nur Tabellen für beide Darstellungen + Zeichnung für rekursive Darstellung: 3

Beispiele zu B: 12 Schüler haben nur die Termdarstellung angegeben, die meist richtig war. Es gab jedoch auch Antworten wie:

- $G(t+1) = G(N) + 5$
- $G(t+1) = 5\cdot(t+1) + 30$
- $G(t+4) = 5(t+4) + 30$
- $G(t+1) = 30 + (t+1)$

Ein Schüler gab im Rahmen einer Tabelle an:

- *t* **|** *G(n) + 5*