GRUNDVORSTELLUNGEN BEI DER EINFÜHRUNG DER BEIDEN BEGRIFFE DIFFERENZENQUOTIENT UND DIFFERENTIALQUOTIENT

Dr. Bernhard Salzger

Don Bosco-Gymnasium, Ebreichsdorf-Unterwalterdorf

Ebreichsdorf-Unterwaltersdorf, 2004

INHALTSVERZEICHNIS

ABSTRACT

In elf Unterrichtseinheiten wurden die Begriffe Differenzenquotient und Differentialquotient in einer siebenten Klasse AHS des Don Bosco-Gymnasiums Ebreichsdorf-Unterwaltersdorf über den Zugang mittels Grundvorstellungen zu den beiden Begriffen gelehrt. Unter Berücksichtigung von inhaltsbezogenen und methodischen Leitlinien wurde die Klasse mit Hilfe des Grafikrechners TI-82 unterrichtet. Grundlage des Unterrichts war ein Konzept zum Thema Grundvorstellungen von Univ. Prof. Dr. Günther Malle mit dem Titel: „Differenzenquotient und Differentialquotient. Ein Lehrgang zur Grundbildung". Ziele dieses Projekts waren u. a. das Deuten-, das Interpretieren- und das Umgehen-Können mit den mathematischen Inhalten, die hinter den beiden Begriffen stehen. Abschlusstests am Ende der Unterrichtssequenzen brachten sehr interessante Ergebnisse, die in der künftigen Unterrichtsarbeit berücksichtigt werden sollen.

1 WOZU GRUNDVORSTELLUNGEN IN DER MATHEMATIK?

Grundvorstellungen im Mathematikunterricht? Vielleicht denkt man beim Lesen dieses Begriffs zunächst einmal an Veranschaulichungen der Grundrechenarten oder an einfache geometrische Aufgaben, die das Vorstellungsvermögen der Lernenden fördern sollen. Grundvorstellungen können aber auch auf bereits vorhandenes Wissen zurückgreifen und dieses in einen neu koordinierten Lösungsprozess einbinden; sie wären demnach notwendiger Bestandteil der Allgemeinbildung.[1] Wie ist diese Bezeichnung „Grundvorstellungen" nun etwa bei der Einführung der Differentialrechnung zu verstehen?

Hierzu können im Unterricht Bezugspunkte gewählt werden, die die Alltäglichkeit fremd klingender mathematischer Ausdrücke in den Vordergrund rücken. In mehreren Unterrichtseinheiten wurden am Don Bosco-Gymnasium Ebreichsdorf-Unterwaltersdorf in einer 7. Klasse (11. Schulstufe) die Begriffe Differenzenquotient und Differentialquotient nach den Gesichtspunkten der Grundvorstellungen nach Univ. Prof. Dr. Günther Malle eingeführt.

1.1 Die Motivation des Lehrers

1.1.1 Motivation nach außen

Da viele Schülerinnen und Schüler den Mathematikunterricht als notwendiges Übel ansehen und nach acht Jahren Gymnasium einige Formeln auswendig aufsagen können, ohne einen mathematischen Inhalt dahinter zu sehen, scheint es mitunter

[1] Vgl. www.uni-klu.ac.at/gdm-ak/ProtokollStandards.htm (27. April 2004)

folgerichtig, diesem Umstand entgegenwirken zu wollen. Schülerinnen und Schüler sollten verstehen, was sie im Mathematikunterricht anwenden, und mit diversen mathematischen Inhalten Vorstellungen verbinden können. Aus diesem Grund ist ein Zugang mit Grundvorstellungen zu mathematischen Begriffen und Inhalten unentbehrlich.

1.1.2 Motivation nach innen

Als jemand, der schon seit Jahren versucht, Schülerinnen und Schülern Mathematik unter den Gesichtspunkten des Begründens, des Interpretierens und des kritischen Reflektierens zu vermitteln, erscheint es als logische Folge, diese Art des Unterrichtens im Rahmen eines Projektes noch bewusster als bisher zu praktizieren. Der gezielte Einsatz der Sprache im Mathematikunterricht ist in diesem Zusammenhang als weiteres Motivationskriterium zu nennen. Die Sprache der Mathematik als eine solche anzuerkennen und tatsächlich bewusst von dieser in die Alltagssprache zu übersetzen und umgekehrt ist folglich ein weiterer Punkt, der als zusätzlicher Motivationsschub anzuführen wäre. Denn durch den Zugang mittels Grundvorstellungen wird dieser Bereich des Erfassens neuer Inhalte, Fähigkeiten und Fertigkeiten gefördert.

1.2 Angestrebte Ziele

- Grundvorstellungen können auf bereits vorhandenes Wissen zurückgreifen und dieses in einen neu koordinierten Lösungsprozess einbinden. Sie sind notwendiger Bestandteil der Allgemeinbildung.
- Deutungen der beiden Begriffe sollen im Unterricht eine essentielle Rolle spielen.
- Schülerinnen und Schüler sollen in der Lage sein diese Deutungen in Worte zu fassen und somit zeigen, dass sie verstehen, womit sie im Unterricht umgehen.
- Die allgemeinen Bildungsziele des Lehrplans (didaktische Grundsätze und Inhalte) sind zu beachten und als Grundlage des Unterrichts heranzuziehen.[2]

1.3 Leitlinien [3]

1.3.1 Inhaltsbezogene Leitlinien

Höhere Grundbildung kann auf Grundvorstellungen basieren. Diese dienen in erster Linie dazu den Schülerinnen und Schülern Verbindungen zwischen mathematischen

[2] Vgl. IFF (Hrsg.): Didaktische Strukturierung für den Unterricht. IMST²-S1 – Schwerpunktprogramm Grundbildung. Workshop I, Yspertal (6. November 2003)
[3] Vgl. IFF (Hrsg.): Ein dynamisches Konzept für mathematisch-naturwissenschaftliche Grundbildung (Handreichung für die Praxis). IMST²-S1 – Schwerpunktprogramm Grundbildung (25. August 2003)

Inhalten und dem Alltagsleben zu flechten, die im späteren Leben als selbstverständlich angesehen und selbst ab- bzw. hergeleitet werden sollen. Dass hiermit ein gewisses Wissenschaftsverständnis aufgebaut wird, liegt auf der Hand. Ebenso wird so die Entwicklung individueller Perspektiven angeregt, die im zukünftigen Berufsleben vonnöten sind.

1.3.2 Methodische Leitlinien

Wie schon erwähnt, können Grundvorstellungen an bereits erworbenes Wissen anknüpfen und somit in Kombination mit schon Vertrautem neue Ideen zur Lösung von Problemstellungen liefern. Wenn nun Alltagsbezüge hergestellt bzw. von Schülerseite selbst gefunden weden, so scheint es nahe liegend, dass hierbei Grundvorstellungen einerseits die Alltagsproblemaik andererseits die mathematischen Inhalte betreffend eine entscheidende Rolle spielen. Umso wichtiger erscheint es, bei der Darbietung neuer Inhalte auf mathematische und alltagsbezogene Erfahrungen zurückgreifen zu können. Dies soll dazu führen, dass Wissen in diversen Zusammenhängen neu angewandt werden kann. Letztlich ist auch der Einsatz adäquater technischer Hilfsmittel mitunter eine Erleichterung bei der Vermittlung neuer Inhalte, da zu den oben genannten Methoden auch noch der Rechner als unterstützende Kraft nützlich ist, der vor allem durch graphische Darstellungen das Veranschaulichen abstrakter Prozesse (vor allem im Bereich der Differentialrechnung) unkompliziert ermöglicht.

1.4 Fachperspektive [4]

Hier stehen die beiden zu erarbeitenden Begriffe und die mathematischen Inhalte im Vordergrund: Beim Differenzenquotienten gilt es, den Terminus zu definieren, ihn zu deuten (z. B. als Steigung), eine Verbindung zu linearen und nichtlinearen Funktionen herzustellen, die Bedeutung der Sekantenfunktion zu erfassen und Anwendungsaufgaben zu bearbeiten. Beim Differentialquotienten steht seine Bedeutung als Grenzwert des Differenzenquotienten an vorderster Stelle, Deutungen des Begriffs sowie Anwendungsaufgaben hierzu sind in der Folge als wichtige Punkte zu sehen.

1.4.1 Grundvorstellungen zum Differenzenquotienten

Ziel der Unterrichtssequenzen ist es, Grundvorstellungen als tragende Säulen mathematischer Inhalte zu etablieren. Bei der mittleren Änderungsrate handelt es sich um folgende Grundvorstellungen, die in den Unterrichtseinheiten mehr oder weniger stark zur Geltung kommen sollen:

- Der Differenzenquotient soll als Verhältnis aufgefasst werden: Die mittlere Änderungsrate ist gleich dem Verhältnis der Änderung der Funktionswerte zur Änderung der Argumente.

[4] Vgl. IFF (Hrsg.): Didaktische Strukturierung für den Unterricht. IMST²-S1 – Schwerpunktprogramm Grundbildung. Workshop I, Yspertal (6. November 2003)

- Der Differenzenquotient als mittlere Änderung pro Einheit: Die mittlere Änderungsrate ist gleich der mittleren Änderung der Funktionswerte pro Argumenteinheit.

- Der Differenzenquotient als Faktor: Die mittlere Änderungsrate ist gleich dem Faktor, mit dem die Änderung der Argumente multipliziert werden muss, um die Änderung der Funktionswerte zu erhalten.

- Das Vorzeichen des Differenzenquotienten: Ist die mittlere Änderungsrate von einer Funktion in einem Intervall positiv, so steigt der Graph der Funktion insgesamt in diesem Intervall, muss aber nicht monoton steigend in diesem Intervall sein. Ist die mittlere Änderungsrate von einer Funktion in einem Intervall negativ, so fällt der Graph der Funktion insgesamt in diesem Intervall, muss aber nicht monoton fallend in diesem Intervall sein. Ist die mittlere Änderungsrate von einer Funktion in einem Intervall gleich 0, so ist der Graph der Funktion insgesamt in diesem Intervall weder steigend noch fallend, muss aber nicht konstant in diesem Intervall sein.

- Der Differenzenquotient einer linearen Funktion ist in jedem Intervall gleich der Steigung der linearen Funktion.

- Der Differenzenquotient einer Funktion in einem Intervall ist gleich der Steigung der zugehörigen Sekantenfunktion.[5]

1.4.2 Grundvorstellungen zum Differentialquotienten

Ebenso wie zum Differenzenquotienten können Grundvorstellungen zum Differentialquotienten entwickelt werden:

- Der Differentialquotient ist der Grenzwert des Differenzenquotienten.

- Der Differentialquotient $f'(x)$ ist näherungsweise gleich dem Differenzenquotienten von f in einem sehr kleinen Intervall um x.

- Der Differentialquotient einer linearen Funktion ist an jeder Stelle gleich der Steigung der linearen Funktion.

- Der Differentialquotient $f'(x)$ ist gleich der Steigung einer Funktion von f an der Stelle x bzw. gleich der Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x \mid f(x))$.[6]

1.5 Schülerperspektive [7]

Um an das Vorwissen anknüpfen zu können, müssen auf Seiten der Schüler diverse Voraussetzungen gegeben sein:

---

[5] Vgl. Malle, G.: Grundvorstellungen zum Differenzenquotienten (zur mittleren Änderungsrate). o. J.

[6] Vgl. Malle, G.: Grundvorstellungen zum Differentialquotienten (zur Änderungsrate). o.J.

[7] Vgl. IFF (Hrsg.): Didaktische Strukturierung für den Unterricht. IMST²-S1 – Schwerpunktprogramm Grundbildung. Workshop I, Yspertal (6. November 2003)

Mit dem Funktionenbegriff sowie dem Begriff der Steigung einer linearen Funktion mit Blick auf das Steigungsdreieck sollte umgegangen werden können. Ebenso sollte der Graph einer Funktion erstellt und interpretiert werden können. Ferner muss der Grenzwertbegriff bereits erfasst worden sein. Außerdem müssen Wortbedeutungen wie „Differenz“ oder „Quotient“ in mehreren Zusammenhängen gedeutet und verstanden werden können.

2 RAHMENBEDINGUNGN DES PROJEKTS

2.1 Die Klasse

An diesem Projekt war eine siebente Klasse Aufbaugymnasium beteiligt. Diese besteht aus acht Schülern und elf Schülerinnen, wobei zwei Schüler den Status „außerordentlicher Schüler“ haben und an dem Projekt nur am Rande mitgewirkt haben. Die Klasse ist, was die schulischen Leistungen betrifft, als durchschnittlich einzustufen, wobei wenige Schülerinnen und Schüler besonders gut und auf der anderen Seite ebenfalls wenige besonders schwach einzustufen sind. Mitunter ist die Klasse nicht sehr leicht motivierbar, was auch im Mathematikunterricht zu erkennen ist.

2.2 Die Schulform

Bei dieser Klasse handelt es sich um die Schulform eines Aufbaugymnasiums mit sprachlichem Schwerpunkt. Die Form Aufbaugymasium weist einen Unterschied zur Form des Gymnasiums dadurch auf, dass erst in der fünften Klasse mit einer zweiten lebenden Fremdsprache bzw. mit Latein begonnen wird. Darüber hinaus standen vor der Stundenreduzierung in der Oberstufe in der fünften Klasse jeweils vier Wochenstunden in allen Schularbeitsfächern zur Verfügung, um vor allem Einsteigern aus der Hauptschule den Lehrstoff intensiver vermitteln zu können. Für das Fach Mathematik gilt der Lehrplan für das Gymnasium.

2.3 Technische Hilfsmittel

Seit der fünften Klasse arbeiten die Schülerinnen und Schüler mit dem grafikfähigen Rechner TI-82. Beim Eintieg in die Differentialrechnung erweist sich dieser Umstand oft als Vorteil, da Funktionsgraphen hiermit schnell veranschaulicht werden können und somit helfen, eine bessere Vorstellung von der jeweiligen Sachlage zu bekommen.

2.4 Das Konzept

Grundlage des Unterrichts war ein Konzept zum Thema Grundvorstellungen von Univ. Prof. Dr. Günther Malle mit dem Titel: „Differenzenquotient und Differentialquotient. Ein Lehrgang zur Grundbildung“. Im Rahmen dieser Vorlage war freie Gestaltungsmöglichkeit des Unterrichts möglich sowohl, was den zeitlichen Rahmen als auch, was die Unterrichtsmethoden betrifft.

2.5 Die Durchführung

Das Projekt des Einstiegs in die Differentialrechnung auf der Basis der Grundvorstellungen wurde in elf Unterrichtseinheiten durchgeführt. Für die Schülerinnen und Schüler waren es keine „Projekt-Unterrichtsstunden“, sondern „normaler“ Unterricht, bei dem auf Grundvorstellungen, Deutungen und Begriffsinterpretationen etwas mehr Wert gelegt wurde, als vielleicht von ihnen erwartet. Den Schülerinnen und Schülern war jedoch bewusst, dass es sich hierbei um eine besondere Art der Einführung in ein neues Kapitel handelte und dass dies im Rahmen eines Projekts verwirklicht werden sollte.

Ein wesentlicher Unterschied zu herkömmlichen Unterrichtsabläufen war die Konzentration auf den klaren und unmissverständlichen Einstieg in ein Kapitel und in die Problematik der Begriffsdeutungen. Mehr Wert wurde durchwegs auf Veranschaulichungen, Klärungen von Definitionen, sprachliche Präzision bei Erläuterungen – sowohl seitens des Lehrers als auch seitens der Schülerinnen und Schüler – und auf Alltagsbezüge gelegt, weniger auf Rechenfertigkeiten.

2.6 Die Evaluierung

Den Abschluss des Projekts bildeten zwei Tests, der eine zum Thema „Differenzenquotient“, der andere zum Thema „Differentialquotient“. Die anschließende Evaluierung fand durch Mag. Angela Schuster (Fachkoordinatorin für Mathematik der Abteilung S1-Grundbildung) nach einem Auswertungsschema von Univ. Prof. Dr. Günther Malle statt.

3 DAS PROJEKT IN ELF UNTERRRICHTSEINHEITEN

Werden im Text Aufgabennummern genannt, so beziehen sich bspw. 1.01, 1.32, ... auf jene Übungen des Kapitels „Differenzenquotient und Differentialquotient. Ein Lehrgang zur Grundbildung“.

Das Lehrbuch „Bürger – Fischer – Malle. Mathematik Oberstufe 3“ wird in der Folge BFM3 genannt. Aufgabennummern wie bspw. BFM3 1.14, BFM3 1.23, ... beziehen sich auf Übungen im Lehrbuch „Bürger – Fischer – Malle. Mathematik Oberstufe 3“.

Ist im Text von „Schülern“ die Rede, sind „Schülerinnen und Schüler“ gemeint.

3.1 Der Begriff des Differenzenquotienten (erste Einheit)

Nach einer kurzen Einleitung des Lehrers bezüglich der Bedeutung der Differentialrechnung in diversen Bereichen des Alltags wird der Begriff des **Differenzenquotienten** an den Anfang der Einheit gestellt. Hierzu wird – um die Alltäglichkeit in den Vordergrund zu rücken – die Aufgabe 1.01 (Angabe BFM3 1.14)[8] gewählt und darauf hingewiesen, dass Fahrpläne dieser Art häufig zu finden seien. Nun stellt man die Frage nach der Geschwindigkeit des Zuges – wohlgemerkt nach der Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen den einzelnen Städten. Aus der Physik ist die Formel „Geschwindigkeit ist gleich Weg durch Zeit“ geläufig. Eine Präzisierung dieser Formel wird genannt: **„Mittlere Geschwindigkeit ist gleich die Länge des zurückgelegten Weges durch die dafür benötigte Zeit.“**

Anhand der Aufgabe 1.01a) wird dies für die Strecke Villach (VI) – Klagenfurt (K) ausprobiert:

VI ... 16.13 *K ... 16.37*

Zurückgelegter Weg: 38km

Dafür benötigte Zeit: 24min (also 0,4h)

$\bar{v}$ wird als Bezeichnung für die mittlere Geschwindigkeit eingeführt.

$$\bar{v} = \frac{38km}{0{,}4h} = 95km/h$$

[8] Aufgabe 1.01 bzw. BFM3 1.14: Die nebenstehende Tabelle ist ein Auszug aus dem Fahrplan des Expresszuges „Romulus“.

a) Berechne die mittlere Geschwindigkeit des Zuges zwischen Villach und Klagenfurt, Klagenfurt und Leoben, Leoben und Bruck an der Mur, Bruck an der Mur und Wiener Neustadt, Wiener Neustadt und Wien! In welchen dieser Streckenabschnitte fährt der Zug am schnellsten?

b) b) Die Bewegung des Zuges werde durch die Zeit-Ort-Funktion s: $t \rightarrow s(t)$ beschrieben. Gib eine Formel für die mittlere Geschwindigkeit $v(t_1,t_2)$ des Zuges im Zeitintervall $[t_1, t_2]$ an!

Ebenso wird für die Strecke Klagenfurt (K) – Leoben (LE) vorgegangen. Hier ist zusätzlich die Länge der Strecke aus den Daten durch die Differenz 196km – 38km zu ermitteln. Ebenso wird die Differenz aus den beiden Zeitpunkten ermittelt:

K ... 16.39 LE ... 18.33 (Differenz: 1,9h)

Streckenlänge (Differenz): 158km

$$\bar{v} = \frac{158km}{1{,}9h} \approx 83km/h$$

Hier folgt wieder der Hinweis, dass es sich bei jenem Bruchterm bereits um den Differenzenquotienten handle. (Auf die Frage einer Schülerin, ob nun die Gleichung oder nur der Bruch den Differenzenquotienten darstelle, wird noch einmal darauf hingewiesen, dass nur der Bruch, also der Quotient, den Differenzenquotienten darstellt.)

Nun wird versucht, die Bedeutung der Differenzen in Zähler und Nenner mit dem Begriff einer Zeit-Ort-Funktion zu verknüpfen und damit deutlicher hervorzustreichen:

Zeit-Ort-Funktion $t \to s(t)$ (Zeit-)Intervall $[t_1; t_2]$

$\bar{v}(t_1;t_2) = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$ sei nun die mittlere Geschwindigkeit in $[t_1; t_2]$. $\bar{v}$ ist von t_1 und t_2 abhängig, ebenso wie s (s zum Zeitpunkt t_1 und zum Zeitpunkt t_2).

Weiters werden die Schüler gebeten, den Text der Aufgabe BFM3 1.15[9] durchzulesen und die beigefügte Lösung zu a) zu erklären. Dies geschieht, indem der Zähler als Wegdifferenz und der Nenner als Zeitdifferenz (ausgebessert: Differenz zwischen zwei Zeitpunkten) bezeichnet werden. Der Lehrer führt Aufgabe BFM3 1.15 b) an der Tafel durch und klärt noch einmal die Begriffe und die Aussage der Lösung: Ein Körper im freien Fall hat zwischen der ersten und der zweiten Sekunde nach Fallbeginn die mittlere Geschwindigkeit von 15m/s.

Als Hausübung werden die Aufgaben BFM3 1.14 (Strecken LE-BM und BM-WN) und BFM3 1.15c)d) gegeben.

3.2 Deutungsmöglichkeiten (zweite Einheit)

Die Aufgaben BFM3 1.14 (Strecken LE-BM und BM-WN) und BFM3 1.15c)d) der Hausübung haben weitgehend keine Probleme bereitet. Es wurde nur noch die Bedeutung von Zähler und Nenner beim Differenzenquotienten (Deutung als Verhältnis) noch einmal betont.

---

[9] Aufgabe BFM3 1.15: Für einen frei fallenden Körper ist eine Zeit-Ort-Funktion s durch $s(t) = 0{,}5g \cdot t^2$ gegeben. (Dabei wird vorausgesetzt, dass der freie Fall zum Zeitpunkt 0 beginnt und $s(0) = 0$ ist.) Wird t in Sekunden und s(t) in Metern gemessen, dann ist $g \approx 9{,}81m/s^2 \approx 10m/s^2$. Wir betrachten daher die Zeit-Ort-Funktion s mit $s(t) = 5t^2$. Berechne die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall: a) [0;1] b) [1;2] c) [2;3] d) [1;10]

Nun wurde im Buch BFM (Seite 5) die Tabelle zur Aufgabe BFM 1.01[10] betrachtet. Analog zu den bereits behandelten Aufgaben wird hier die Temperaturdifferenz in einem bestimmten Zeitraum ermittelt. Im Intervall [8; 14] findet man Temperaturzunahme, in [14;20] Temperaturabnahme und in [12;18] an sich etwas Kurioses: Die Temperaturdifferenz ist gleich 0. Laut Tabelle ändert sich aber zwischen 12 Uhr und 18 Uhr die Temperatur immer wieder. Hier wurde darauf besonderen Wert gelegt, dass nur die genannten beiden Zeitpunkte für diese Aussage entscheidend seien.

T(b) – T(a) ist also nur die Temperaturdifferenz. Stellt man nun eine Beziehung dieser Differenz zur verstrichenen Zeit her, so lässt sich aussagen, in welchem dieser Zeitintervalle die Temperatur am schnellsten zunimmt. Die Schüler stellen hierzu den Differenzenquotienten auf, z. B.:

$$\frac{T(14)-T(12)}{14-12}=2$$

Im Intervall [12; 14] steigt die Temperatur im Mittel um zwei Grad pro Stunde. So lässt sich auch ermitteln, dass in diesem Intervall die Temperatur am schnellsten zunimmt.

Es wird der allgemeine Ausdruck

$\frac{T(b)-T(a)}{b-a}$ *als **mittlere Änderungsrate*** notiert.

Dieser Aufgabe folgt nun die Definition:

> *f sei eine reelle Funktion f*: A $\rightarrow$ R*, wobei a, b* $\in$ *A und a* $\neq$ *b*.
>
> *Dann nennt man* $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ *den **Differenzenquotienten** oder die **mittlere Änderungsrate** von f in* [*a*;*b*]. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ *ist dabei eine **reelle Zahl**, die je nach Problemstellung gedeutet werden muss. Weiters gilt:* $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$.

In der Folge wird die Aufgabe 1.03a)[11] behandelt. (Anmerkung: Die Aufgabe wird an die Tafel geschrieben. Die Schüler haben die gesamte Aufgabenstellung nicht kopiert vor sich.) Das Schätzen zieht bei den Schülern zunächst Unklarheit nach sich, viele schätzen aber richtig, da sie vom bereits vorhandenen Volumen vor der Volumenzunahme ausgehen. Die Volumenzunahme wird daraufhin berechnet. Die Schätzung der meisten bestätigt sich. Die Ergebnisse 381cm³ und 505cm³ werden zur Kenntnis genommen. Allgemein wird notiert: $V(r_1) - V(r_2)$.

[10] In dieser Tabelle sind die zu verschiedenen Uhrzeiten eines Tages gemessenen Temperaturen an einem bestimmten Ort angegeben. (BFM3, Seite 5)

[11] Aufgabe 1.03a): Ein kugelförmiger Ballon vom Radius r hat das Volumen V(r)=4πr³/3 (r in cm, V in cm³). Der Ballon wird aufgeblasen. Berechne die Volumszunahme im Radiusintervall [5;6] bzw. [20;20,1]! (Schätze zuerst, in welchem Fall die Volumszunahme größer ist!)

In den Aufgaben zuvor wurde auf die benötigte bzw. verstrichene Zeit Bezug genommen. Auf die Frage, ob man dies hier auch könne, bejahen die Schüler zunächst, merken aber alsbald, dass dieses Problem zweitrangig ist. Ein Schüler macht den Vorschlag, den Radius als Bezugspunkt zu nehmen.

Die Differenzenquotienten werden gebildet:

$$\frac{V(6)-V(5)}{6-5} \approx 381(cm^3/cm)$$

$$\frac{V(20{,}1)-V(20)}{20{,}1-20} \approx 5052(cm^3/cm)$$

Eine interessante Frage einer Schülerin hierzu lautet: Warum nimmt man bei der zweiten Rechnung nicht Millimeter? Eine Begründung des Lehrers bezieht sich auf die Vergleichbarkeit der beiden Ergebnisse. Die Differenz der beiden Volumina mit den Radien 20cm und 20,1cm bezögen sich ohnehin auf die Zunahme um einen Millimeter.

Als Hausübung werden die Aufgaben BFM3 1.03a)c)[12], BFM3 1.04b)d)[13] und BFM3 1.06a)[14] gegeben.

3.3 Das Vorzeichen des Differenzenquotienten (dritte Einheit)

Die Aufgaben der Hausübung BFM3 1.03a)c), BFM3 1.04b) d) und BFM3 1.06a) haben weitgehend keine Probleme bereitet. Eine interessante Anmerkung sei genannt. Ein Schüler setzte bei der Aufgabe BFM3 1.03a) vor den Differenzenquotienten „$\bar{v} =$“. Dies – so die Erwiderung des Lehrers – wäre nur eine Deutung des Differenzenquotienten. Dieser ist jedoch lediglich eine reelle Zahl, keine Gleichung.

Diese Einheit wurde der Grundvorstellung zum Vorzeichen des Differenzenquotienten gewidmet. Die Schüler sahen sich hierzu Fig.1.1a-c auf Seite 7 des Lehrbuchs BFM3 an. Das Vorzeichen des Differenzenquotienten gilt hier als Hinweis darauf, ob eine reelle Funktion in einem Intervall im Mittel steigt, fällt oder gleich bleibt.

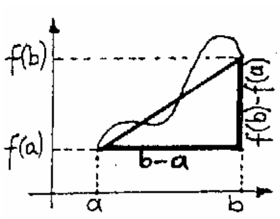


Abb.1a

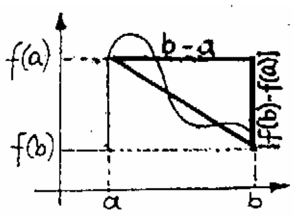


Abb.1b

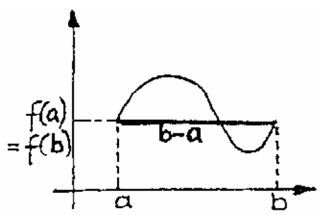


Abb.1c

[12] Aufgabe BFM3 1.03: Berechne die mittlere Änderungsrate von f im angegebenen Intervall: a) f: $x \to 3x^2$, [1;5] c) f: $x \to 2/x$, [-5;-2]

[13] Aufgabe BFM3 1.04: Gib den Differenzenquotienten (die mittlere Änderungsrate) der nachstehenden Funktion im angegebenen Intervall an: b) $x \to g(x)$, [a,a+h] d) $z \to y(z)$, $[-z_0,z_0]$

[14] Aufgabe BFM3 1.06: Gib den Differenzenquotienten der Funktion f im angegebenen Intervall an: a) $f(x) = x^2$, [a,a+h]

Zusätzlich zu den drei Abbildungen im Buch zeichnete der Lehrer die Abbildungen 1a, 1b und 1c des Lehrgangs „Differenzenquotient und Differentialquotient. Ein Lehrgang zur Grundbildung“ an die Tafel, wobei das Steigungsdreieck jeweils mit Farbkreide hervorgehoben wurde.

Zunächst 1a: Die Differenz der Funktionswerte gebrochen durch die Differenz der zugehörigen Argumente ergeben den Differenzenquotienten. Da sowohl Zähler als auch Nenner positiv sind, ist auch der Differenzenquotient positiv.

$$f(b) - f(a) > 0 \qquad \frac{f(b) - f(a)}{b-a} > 0 \Rightarrow f(b) > f(a), \text{ wenn } b - a > 0$$

f steigt im Mittel in [*a*;*b*]*, muss aber nicht monoton steigend sein.*

Bei 1b gab es einige Verständnisschwierigkeiten, da an die Tafel der Ausdruck $\left| f(b) - f(a) \right|$ geschrieben wurde. Die Tatsache, dass es sich in der Zeichnung um die Länge einer Strecke handle und diese nicht negativ sein könne, verwirrte die Schüler teilweise. „Warum schreiben Sie nicht einfach *f*(*a*) – *f*(*b*)?“ Klarheit konnte darauf die Schreibung mittels Differenzenquotienten bringen. Da der Zähler negativ ist und der Nenner positiv, ist der Differenzenquotient insgesamt negativ.

$$f(b) - f(a) < 0 \qquad \frac{f(b) - f(a)}{b-a} < 0 \Rightarrow f(b) < f(a), \text{ wenn } b - a > 0$$

f fällt im Mittel in [*a*;*b*]*, muss aber nicht monoton fallend sein.*

Die Abbildung 1c zu verstehen war dann relativ einfach. Hier sollte im Randfall eines Steigungsdreiecks im Zähler 0 stehen. Damit ist auch der Wert des Differenzenquotienten in diesem Fall geklärt.

$$f(b) - f(a) = 0 \qquad \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0 \Rightarrow f(b) = f(a), \text{ wenn } b - a > 0$$

f muss aber nicht konstant sein.

Als Hausübung werden die Aufgaben BFM3 1.07[15] und BFM3 1.08[16] gegeben. Eine kurze Erklärung bzw. Anleitung folgte noch in der Unterrichtseinheit. Da alle Schüler den Rechner TI-82 besitzen, mögen sie sich im Grafikfenster ein paar reelle Funktionen (vornehmlich einfache Polynomfunktionen) ansehen, die sie zur Lösung der Aufgaben heranziehen können. Die Frage einer Schülerin, ob man für *a* und *b* des Intervalls [*a*;*b*] jede beliebige Zahl (Argumente) bestimmen könnte, wurde bejaht.

---

[15] Aufgabe BFM3 1.07: Gib drei verschiedene Funktionen an, deren Differenzenquotient im Intervall [0;1] genau 1 beträgt!

[16] Aufgabe BFM3 1.08: a) Gib mindestens eine Funktion an, die in einem Intervall [a,b] einen positiven Differenzenquotienten hat, aber in [a,b] nicht monoton steigend ist! b) Gib mindestens eine Funktion an, die in einem Intervall [a,b] einen negativen Differenzenquotienten hat, aber in [a,b] nicht monoton fallend ist! (Hinweis: Betrachte etwa die Funktion $x \to x^2$ in einem geeigneten Intervall [a,b]!)

3.4 Zusammenhang zur Steigung einer Funktion (vierte Einheit)

Die Aufgabe BFM3 1.08 der Hausübung hat kaum Probleme bereitet. Eine graphische Darstellung eines Funktionsgraphen von einem Schüler gezeichnet und vom Lehrer kommentiert hat kleinere Unsicherheiten bezüglich der Wahl von Punkten auf dem Graphen weitgehend beseitigt. Die Begriffe „positiver Differenzenquotient“ und „negativer Differenzenquotient“ wurden größtenteils mit der Steigung der Sekante gleichgesetzt. Die Aufgabe BFM3 1.07 hat nur bei jenen Schülern keine Probleme aufgeworfen, denen klar war, dass diese Vorschrift für alle Funktionen der Gestalt $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$) gilt.

Aufgrund der Ergebnisse und Rückschlüsse der Hausübungsaufgaben sollte diese Einheit unter dem Titel „Zusammenhang zur Steigung einer Funktion“ geführt und die Frage behandelt werden, wie der Differenzenquotient bei linearen und bei nichtlinearen Funktionen ermittelt wird. All die Aufgaben zuvor (Thema: Steigung einer Sekante) sollten Vorarbeiten zur Aufgabe 1.20[17] sein. Mit der Vorschrift $f(x) = kx + d$ für die allgemeine lineare Funktion und dem Einsetzen in den Term $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ konnte an der Tafel der Zusammenhang zwischen Differenzenquotient und Steigung einer linearen Funktion erkannt werden. Diese Erkenntnis gipfelte zunächst in jenem Satz, der eine der Grundvorstellungen darlegt:

***Satz**: Der Differenzenquotient einer linearen Funktion ist in jedem Intervall [a;b] gleich der Steigung k.*

Die im Text des Lehrganges folgenden Abbildungen 1 und 2 wurden in Kopie an die Schüler ausgeteilt. Der Satz konnte an der Abbildung 1 noch einmal nachvollzogen werden. Wichtig war hier die Feststellung, dass bei einer linearen Funktion die Wahl des Intervalls beliebig ist.

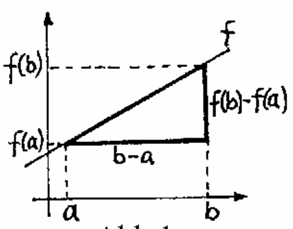


Abb.1

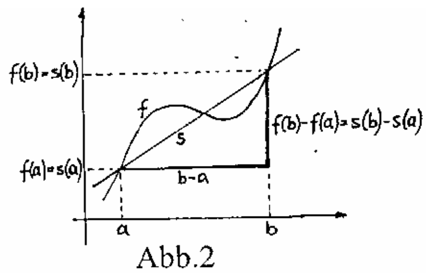


Abb.2

Die Abbildung 2 wurde von Schülerseite schon etwas kritischer aufgenommen. Der Begriff „Sekantenfunktion“ wurde erst dadurch etwas klarer, dass als wichtiges Faktum festgehalten wurde, dass es nur von Bedeutung sei, dass zwei Punkte der Funktionsgraphen von *f* und von der Sekantenfunktion *s* gleich sein müssen. Die Funktion f kann in jenem Intervall [*a*;*b*] irgendwie verlaufen. Entscheidend sei, dass $(a \mid f(a)) = (a \mid s(a))$ und $(b \mid f(b)) = (b \mid s(b))$. Der Text des Lehrgangs bezüglich der Definition der Sekantenfunktion von f wurde den Schülern schriftlich vorgebracht. Weiters wurde aufgeschrieben:

[17] Aufgabe 1.20: Berechne den Differenzenquotienten einer linearen Funktion f mit f(x) = kx + d in einem Intervall [a,b]!

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{s(b)-s(a)}{b-a}=k$$

Satz: *Der Differenzenquotient einer Funktion f im Intervall [a;b] ist gleich der Steigung k der Sekantenfunktion von f im Intervall [a;b].*

Dass dieser Sachverhalt (eine der Grundvorstellungen) recht einfach zu verstehen sei, sollte die Aufgabe 1.22b)[18] beweisen. Sie wurde vom Lehrer mit Hilfe von Schülervorschlägen durchgerechnet. Zusätzlich wurde die Termdarstellung der Sekantenfunktion *s* ermittelt:

1.22b) $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{s(b)-s(a)}{b-a}=k$

$$\frac{f(11)-f(3)}{11-3}=\frac{s(11)-s(3)}{11-3}=\frac{435-27}{8}=\frac{408}{8}=51$$

Die Steigung k der Sekantenfunktion *s* von *f* ist also im Intervall [3;11] gleich 51.

Die Sekantenfunktion hat nun folgende Darstellung: $s(x) = 51x + d$

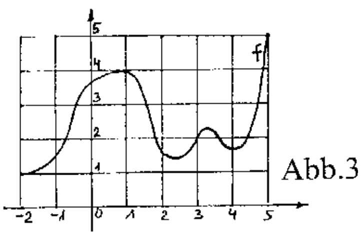
Da nun $f(a) = s(a)$ und $f(b) = s(b)$ kann nun Folgendes geschrieben werden:

$27 = 51 \cdot 3 + d$

$d = -126$

$s(x) = 51x - 126$

Als Hausübung werden die Aufgaben 1.21a)[19] und 1.22a)c)[20] (beide als Kopie versehen mit Aufgabennummer 1) und 2)) gegeben.

Abbildung zu Aufgabe 1.21: 

3.5 Der Differenzenquotient als Faktor (fünfte Einheit)

Die Aufgaben 1.21a) und 1.22a)c) haben den Schülern keine Probleme bereitet. Fast alle ermittelten zusätzlich zur Aufgabenstellung bei 1.22a)c) eine Termdarstellung der Sekantenfunktion *s*(*x*). Bei manchen Schülern wurde das Ergebnis der Aufgabe

---

[18] Aufgabe 1.22b: Sei $f(x) = 4x^2 - 5x + 6$. Ermittle die Steigung der Sekantenfunktion von f im Intervall [3;11]!
[19] Aufgabe 1.21a: Zeichne in Abb. 3 die Sekantenfunktion von f im Intervall [-2;1] ein! Ermittle deren Steigung und gib eine Termdarstellung der Sekantenfunktion an! (Abb. 3 zeigt das Bild eines Funktionsgraphen.)
[20] a. a. O. Intervalle: a) [0;9], c) [10;100]!

1.21a) erst nach einer graphischen Darstellung des Lehrers an der Tafel deutlich. Hier müsste man nichts rechnen, sondern lediglich vom Graphen ablesen. Da man nur $s(x)$, aber nicht $f(x)$ kennt, kann man zwar mit der Termdarstellung der Sekantenfunktion, nicht aber mit der gezeichneten nichtlinearen Funktion arbeiten bzw. weiterrechnen.

Nach der Bekanntgabe des Schularbeitsstoffs für die 1. Schularbeit (Themengebiete: Komplexe Zahlen, algebraische Gleichungen höheren Grades; Differentialrechnung (Differenzenquotient)) und notwendigen Erläuterungen folgte (als Verdeutlichung der Deutung des Differenzenquotienten) die Aufgabe BFM3 1.11a). Die Erklärung der hier vorliegenden Schreibweise $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ für den Differenzenquotienten stellte keine Probleme bei den Schülern dar.

$f(x) = x^2$ Wievielmal stärker ändern sich die Funktionswerte von $f(x)$ als die Argumente im Intervall [2;4]?

Der Differenzenquotient wird mit k bezeichnet:

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$k = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{16 - 4}{4 - 2} = \frac{12}{2} = 6$$

Hier ist der Antwortsatz von großer Bedeutung:

> *Die Funktionswerte von f(x) ändern sich im Intervall [2;4] sechsmal so stark wie die Argumente von f(x).*

„Das ist alles?“ So eine Schülermeinung am Ende der Aufgabe. Dies wurde vom Lehrer bejaht. Eine weitere Grundvorstellung wurde hiermit erarbeitet. Ein Hinweis folgte aber noch:

Ganz wichtig sei der Teil der Antwort: „im Intervall [2;4]“. Setzte man das Intervall weiter in Richtung $+\infty$ an, so wäre der Differenzenquotient größer als im vorgegebenen Intervall. Ginge man noch weiter „nach rechts“ auf der Zahlengeraden, so würde der Differenzenquotient in einem Intervall $[n;n+2]$ immer größer, die Steigung der Sekante immer steiler werden. Somit würde der Faktor (eine der Deutungen des Differenzenquotienten) immer größer werden. Der Differenzenquotient ändert sich bei einer nichtlinearen Funktion, während er bei einer linearen Funktion gleich bleibt.

Eine Hausübung gibt es in dieser Stunde nicht, nur den Hinweis, man möge im eigenen Interesse die Aufgaben 1.21b)c)[21] und 1.22d)[22] zum besseren Verständnis bearbeiten. Die folgenden beiden Einheiten sollten sich mit der Wiederholung von Aufgaben zum Themengebiet „Komplexe Zahlen“ befassen. Die nächste hier genannte Einheit setzt nach der Schularbeit mit dem Gebiet der Differentialrechnung fort.

[21] a. a. O. Intervalle: b) [1;3], c) [3;5]
[22] a. a. O. Intervall [100;110]

3.6 Vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten (sechste Einheit)

Diese Einheit ist die erste nach der Schularbeit. Am Anfang der Stunde wurde die Schularbeit nachbesprochen (inkl. Details zur Schularbeitsverbesserung).

Diese Unterrichtseinheit stand unter dem Titel: „Vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten". Einer Wiederholung der Deutungen des Differenzenquotienten folgte ein Gedankenexperiment: Eine allen Schülern bekannte Wegstrecke kurz vor der Stadt Ebreichsdorf diente als Grundlage für die Vorstellung der Berechnung der mittleren Geschwindigkeit. Zwei Punkte an der Strecke wurden bestimmt. Während diese Strecke durchfahren wird, muss einmal beschleunigt und einmal abgebremst werden; eine konstante Geschwindigkeit ist auf dieser Strecke nicht zu erreichen. Man kann demnach nur die mittlere Geschwindigkeit berechnen. Wollte man nun wissen, wie schnell man am Anfang der Strecke fährt, müsse man sich – so eine Schülerantwort – mit dem zweiten Punkt näher an den ersten Punkt begeben. „Das muss ja dann fast die Geschwindigkeit sein." Der Begriff Momentangeschwindigkeit fällt auf Seiten der Schüler.

Die Aufgabe BFM3 1.16[23] wird als konkretes Beispiel herangezogen. Die Angabe war aus Aufgabe BFM3 1.15 bekannt.

Die Funktion wird wieder in Erinnerung gerufen:

$$s(t) = 5t^2$$

Die mittlere Geschwindigkeit wird im Intervall [3;5] berechnet:

$$\bar{v}(3;5) = \frac{s(5) - s(3)}{5 - 3} = 40$$

Nun wird die Tabelle auf Seite 12 (BFM3) betrachtet und es wird erkannt, dass das immer kleiner werdende Zeitintervall (immer näher an 3) im Differenzenquotienten eingesetzt eine mittlere Geschwindigkeit liefert, die der Momentangeschwindigkeit schon sehr nahe kommen muss. Auf die Frage eines Schülers, warum nicht einfach 3 eingesetzt werden könne, wird allgemein gerechnet:

$$\bar{v}(3;z) = \frac{s(z) - s(3)}{z - 3} = \frac{5z^2 - 5 \cdot 3^2}{z - 3} = \frac{5(z^2 - 9)}{z - 3} = \frac{5(z + 3)(z - 3)}{z - 3}$$

Nun läge auf der Hand, den Ausdruck (z – 3) in Zähler und Nenner zu kürzen. Da aber $z \neq 3$ vorausgesetzt werden muss, da der Ausdruck $\frac{0}{0}$ nicht beim Kürzen herangezogen werden darf. Nur durch unbegrenzte Näherung von z an die Zahl 3 kann hier Abhilfe schaffen und somit der Begriff des Grenzwerts, der aus der 6. Klasse bereits bekannt ist. Nun kann Folgendes geschrieben werden:

[23] Aufgabe BFM3 1.16: Bestimme näherungsweise die Geschwindigkeit eines frei fallenden Körpers nach drei Sekunden!

$$v(3)=\lim_{z\to 3}\overline{v}(3;z)=\lim_{z\to 3}\frac{5(z+3)(z-3)}{z-3}=\lim_{z\to 3}5(z+3)=30$$

Hier soll fortgesetzt werden. Als Hausübung wird – neben der Schularbeitsverbesserung – aufgegeben, die Zusammenfassung auf den Seiten 12f. (BFM3) zu lesen und etwaige Fragen für die nächste Stunde vorzubereiten.

3.7 Änderungsrate und Tangentensteigung (siebente Einheit)

Die Erkenntnisse der letzten Unterrichtseinheit werden vom Lehrer und von Schülern kurz zusammengefasst und in folgender Aussage schriftlich dargelegt:

Ein Körper bewege sich gemäß einer Zeit-Ort-Funktion s(t). Dann nennt man

$v(t)=\lim_{z\to t}\overline{v}(t;z)=\lim_{z\to t}\frac{s(z)-s(t)}{z-t}$ *die Momentangeschwindigkeit des Körpers zum Zeitpunkt t.*

Ein Lehrerkommentar zum besseren Verständnis: „Diese Momentangeschwindigkeit findet man auf jedem Tachometer. Die mittlere Geschwindigkeit kann man selbst ermitteln, z. B. fährt man um eine bestimmte Uhrzeit in Ebreichsdorf weg und kommt um eine andere bestimmte Uhrzeit in Salzburg an. Wenn man nun die Länge der Wegstrecke kennt, kann man sich die mittlere Geschwindigkeit ausrechnen. Vielleicht bekommt man 68,5km/h heraus, weil man einmal 140km/h gefahren ist, dann war ein kurzer Stau (0km/h), dann wieder eine Baustelle, in Salzburg mehrere Ampelkreuzungen im Stadtverkehr usw. Die Momentangeschwindigkeit kann sich aber andauernd ändern, man muss nur den Tachometer verfolgen."

Auf die Frage eines Schülers, ob das jetzt „dieser" Differentialquotient sei, folgte einerseits die Bestätigung des Lehrers und anschließend die Definition:

Def.: f sei eine reelle Funktion.

Der Grenzwert $f'(x)=\lim_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$ *heißt* ***Differentialquotient*** *der Funktion f an der Stelle x oder* ***Änderungsrate*** *von f an der Stelle x.*

Anschließend erfolgt ein Hinweis auf die Lehrbuchseite 17 (BFM3) und den Merksatz (eine Grundvorstellung): „Der Differentialquotient ist der Grenzwert des Differenzenquotienten."

Auf die Frage, wie das nun bei einem Graphen aussehe, wenn ein Punkt immer näher zum anderen wandert, half die Tafelskizze der Parabel $f(x) = x^2$ bei der Vorstellung. Die eingezeichnete Sekante (bei einem beliebig angenommenen Intervall) symbolisiere die Sekantenfunktion, die durch diese beiden Punkte verläuft und eine gewisse Steigung k hat. Liegen diese beiden Punkte etwas näher beieinander, so erhält man wiederum eine Sekante, deren Steigung nun eine andere ist. Liegen diese beiden Punkte nun noch näher beieinander, sodass sie kaum mehr voneinander zu unterscheiden sind, liegt streng genommen immer noch eine Sekante vor, die durch diese beiden Punkte gezogen werden kann, der Grenzübergang $z \to x$ soll aber die Bezeichnung Tangente zulassen. Die Frage einer Schülerin, ob es nicht in diesem einen Punkt mehrere Tangenten gebe, wurde mit der Definition des Differentialquotienten beantwortet. Eine andere „Tangente" als jene, die sich aus dem Grenzübergang ergibt, wäre ja eine Sekante, die die Kurve in einem anderen Punkt wieder schneiden müsste.

Die Aufgabe BFM3 1.30 (bzw. 1.37 im Lehrgang)[24] wird vom Lehrer als erste Rechenübung gewählt:

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2 + x - 1$. *Gesucht sind* $f'(3)$ und $f'(-5)$.

Auf die Frage des Lehrers, was denn mit $f'(3)$ gemeint sei, kam nach einigen missglückten Lösungsansätzen der Schüler („Das ist 11."; „Der Punkt."; „Das geht ja gar nicht. Ich hab' ja kein *z* gegeben.") doch die Antwort: „die Steigung der Tangente an der Stelle 3". Notiert wird: $f'(x) = k$.

Kommentar des Lehrers: „*z* ist nur eine Stelle in der Nähe von 3. Wir müssen den Wert von *z* nicht kennen."

Gemäß der Definition wird fortgefahren:

$$f'(3) = \lim_{z\to 3}\frac{f(z)-f(3)}{z-3} = \lim_{z\to 3}\frac{z^2+z-1-(3^2+3-1)}{z-3} = \lim_{z\to 3}\frac{z^2+z-12}{z-3} =$$
$$= \lim_{z\to 3}\frac{(z-3)(z+4)}{z-3} = \lim_{z\to 3}(z+4) = 7$$

Für $f'(-5)$ wird genauso verfahren:

$$f'(-5) = \lim_{z\to -5}\frac{f(z)-f(-5)}{z+5} = \lim_{z\to -5}\frac{z^2+z-1-(25-5-1)}{z+5} = \lim_{z\to -5}\frac{z^2+z-20}{z+5} =$$
$$= \lim_{z\to -5}\frac{(z+5)(z-4)}{z+5} = \lim_{z\to -5}(z-4) = -9$$

Die Steigung der Tangente an der Stelle –5 *der Funktion f ist* $k = -9$.

Als Hausübung sind die Aufgaben BFM3 1.31a)b)[25] und BFM3 1.32a)[26] in diesem Sinne zu bearbeiten.

3.8 Kommentare zur Schreibweise (achte Einheit)

Die Hausübungsaufgaben BFM3 1.31a)b) haben zum größten Teil keine großen Schwierigkeiten bereitet – Vorzeichenfehler ausgenommen. Schwieriger war an-

[24] Aufgabe 1.37 bzw. BFM3 1.30: Gegeben ist die Funktion f: $x \to x^2 + x - 1$. Stelle eine Formel für den Differentialquotienten f´(x) auf und berechne f´(3) sowie f´(5)!
[25] Aufgabe BFM3 1.31: Stelle eine Formel für den Differentialquotienten f´(x) auf und berechne f´(1) und f´(-3)!
a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = x^2 - x$
[26] Aufgabe BFM3 1.32: Stelle eine Formel für den Differentialquotienten f´(x) auf und berechne f´(1) und f´(-3)!
a) $f(x) = -2/x$

scheinend die Aufgabe BFM3 1.32a), da es sich in der Angabe um einen Bruchterm handelt. Aufgrund von Erklärungen des Lehrers und einiger Schüler zu einzelnen Rechenschritten bei der Ausarbeitung der Aufgabe konnte auch diese Problematik weitgehend beseitigt werden.

Die Unterrichtseinheit steht unter dem Zeichen der Verdeutlichung der Unterschiede zwischen beispielsweise *f*(3) und *f* ’(3). Die Schüler werden gebeten diese beiden Schreibweisen zu kommentieren. Ein weiteres Mal wird der Unterschied zwischen Differenzenquotient und Differentialquotient betont.

Nun wird versucht die Aufgabe BFM3 1.31a allgemein zu lösen. Man erspare sich, so der Kommentar des Lehrers, bei allgemeiner Berechnung die konkrete für mehrere Stellen, an denen die Steigung der Tangente gesucht wird; eine Rechnung genüge, die Zahlenwerte könne man anschließend in das Ergebnis von *f* ’(*x*) einsetzen:

$$f'(x) = \lim_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x} = \lim_{z\to x}\frac{z^2-x^2}{z-x} = \lim_{z\to x}\frac{(z-x)(z+x)}{z-x} =$$
$$= \lim_{z\to x}(z+x) = x + x = 2x$$

Nun könne in das Ergebnis jeder beliebige Wert eingesetzt werden und man erhalte jeweils die Steigung der Tangente an der bezeichneten Stelle. Für $x = 1$ und $x = -3$ wird das Ergebnis mit dem der Hausübung verglichen. Ebenso wird der Graph auf dem TI-82 betrachtet und das Vorzeichen der Steigung interpretiert. Eine für die Schüler etwas schwierigere Aufgabe ist nun BFM3 1.31c)[27], da hier das Aufspalten in zwei Linearfaktoren im Nenner nicht möglich ist. Man braucht einen Linearfaktor und ein quadratisches Polynom. Hier gibt es Schwierigkeiten bei den Rechenzeichen innerhalb des Polynoms. Letztendlich kann folgendes Ergebnis präsentiert werden:

$$f(x) = x^3$$
$$f'(x) = \lim_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x} = \lim_{z\to x}\frac{z^3-x^3}{z-x} = \lim_{z\to x}\frac{(z-x)(z^2+xz+z^3)}{z-x} =$$
$$= \lim_{z\to x}(z^2+xz+x^2) = x^2 + x\cdot x + x^2 = x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2$$

Eine Schülerin (eine Repetentin) möchte wissen, warum wir nicht „erste Ableitung“ dazu sagen. Der Lehrer reagiert auf diese Frage und lässt Folgendes notieren: *f* ’(*x*) *nennt man auch die* ***erste Ableitung*** *der Funktion f*(*x*) *an der Stelle x*.

Als Hausübung werden die Aufgaben BFM3 1.31d)[28] und BFM3 1.32b)[29] mit dem Hinweis gegeben, dass die erste Ableitung allgemein ermittelt werden soll.

3.9 Deutungen des Differentialquotienten (neunte Einheit)

Diese Unterrichtseinheit steht im Zeichen der unterschiedlichen Schreibweisen und der Deutungen des Differentialquotienten. Die Hausübungsaufgaben haben in der

[27] a. a. O. c) $f(x) = x^3$
[28] a. a. O. d) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 1$
[29] a. a. O. b) $f(x) = 3/x^2$

Durchführung große Probleme bereitet, da ein Funktionsterm aus mehreren Summanden bestand und ein anderer ein Bruchterm war.

Daher wurde die Aufgabe BFM3 1.31d gemeinsam gerechnet und hierbei eine weitere Darstellungsmöglichkeit des Differentialquotienten betrachtet, wie auch im Lehrgang (Stichwort: Geschichtliches zur Differentialrechnung – Leibniz' Schreibweise) erwähnt: Setzt man die Differenz im Nenner ($z - x$) gleich einem Wert h, so könnte dies einige Rechenschritte vereinfachen, um zum Differentialquotienten zu gelangen. Der Grenzwert ist dann nicht mehr als $z \to x$, sondern als $h \to 0$ zu verstehen. Ebenso wird aus $f(z)$ nun $f(x + h)$. Die Aufgabe BFM3 1.31d wird nun nach dieser Variante gerechnet. Zuvor wird jedoch diese Schreibweise erst an der Funktion $f(x) = x^2$ „getestet“:

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x + h) = 2x$$

Nun wagte man sich an die Aufgabe 1.31d:

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 1$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3 - 5(x+h)^2 + 1 - x^3 + 5x^2 - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3 - 5x^2 - 10hx - 5h^2 - x^3 + 5x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3hx^2 + 3h^2x + h^3 - 10hx - 5h^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}(3x^2 + 3hx + h^2 - 10x - 5h) = 3x^2 - 10x$$

Dieses Procedere wird von den meisten Schülern als äußerst mühsam eingestuft, die Gefahr einen Rechen- oder Vorzeichenfehler zu machen wird deutlich erkannt. Von Seiten des Lehrers erfolgt der Kommentar, dass Aufgaben in dieser Form bei einer Schularbeit kaum zu erwarten seien.

Um nun endgültig Differenzenquotient und Differentialquotient in eine noch engere Beziehung zu bringen, wird nach Kapitel 1.6 des Lehrgangs verfahren. Folgende Grundvorstellung wird erwähnt, kommentiert und notiert:

$$f'(x) = \lim_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

Ist z sehr nahe bei x, dann ist $f'(x) \approx \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}$.

Man könne sich unter dem Differentialquotienten an der Stelle x näherungsweise einen Differenzenquotienten in einer sehr kleinen Umgebung von x vorstellen. Die Deutungen des Differenzenquotienten lassen sich nun unter der Bedingung, dass sich alles in der Nähe von x abspielt, auf den Differentialquotienten übertragen:

Der Differentialquotient ist ungefähr gleich

dem Verhältnis der Änderung der Funktionswerte zur Änderung der Argumente in der Nähe von x,

der mittleren Änderung der Funktion pro Argumenteinheit in der Nähe von x,

dem Faktor, mit dem die Änderung der Argumente in der Nähe von x multipliziert werden muss, um die Änderung der Funktionswerte zu erhalten.

All dies kann dann so gesehen werden, wenn die Differenz von z und x „sehr, sehr" klein ist.

Eine neue Hausübung gibt es nicht, da erst die vergangene vervollständigt bzw. erst bearbeitet werden muss.

3.10 Bilder von Funktionsgraphen (zehnte Einheit)

Die Aufgaben wurden zum größten Teil nachgeholt, einige Schwierigkeiten waren jedoch bei der Berechnung des Differentialquotienten zu finden (Fehler beim Herausheben, beim Kürzen, Vorzeichenfehler u. dgl.).

Als Vorbereitung für diese Unterrichtseinheit wurden die Bilder der Funktionsgraphen der Aufgaben 1.63[30] und 1.64[31] auf Overhead-Folie kopiert um so anhand der Projektion verschiedene Beispiele zur Deutung der Tangentensteigung an den Graphen einer Funktion darzustellen. Zuvor wurden die Aufgaben 1.55[32] und 1.62[33] für die Schüler kopiert.

---

[30] Aufgabe 1.63: Die Höhe h(t) eines lotrecht nach oben geworfenen Steines zum Zeitpunkt t sei durch die Kurve in Abb. 7 gegeben (s(t) in Meter, t in Sekunden).

a) Was bedeutet die Steigung der Funktion an einer Stelle t physikalisch?
b) Entnimm der Figur, wann der Betrag der Geschwindigkeit am größten, wann am kleinsten ist!
c) Wie groß ist ungefähr die Geschwindigkeit zu den Zeitpunkten 1 und 2?
d) In welchem Bereich ist die Geschwindigkeit positiv, in welchem negativ, wann gleich Null?

[31] Aufgabe 1.64: In Abb. 8 ist der Treibstoffverbrauch einer bestimmten Autotype in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit für verschiedene Gänge dargestellt.

a) Was bedeutet die Steigung der Kurve an einer Stelle t?
b) Es wird mit 50km/h gefahren. Bestimme durch möglichst genaue Messung die Änderungsraten des Treibstoffverbrauchs, falls im zweiten, dritten bzw. vierten Gang gefahren wird!
c) Es wird im vierten Gang gefahren. Bewirkt eine Geschwindigkeitserhöhung von 70 auf 71km/h eine größere Änderung des Treibstoffverbrauchs als eine Geschwindigkeitserhöhung von 100 auf 101km/h?

[32] Aufgabe 1.55: Durchfährt ein Auto der Masse m eine kreisförmige Kurve vom Radius r, so ist seine Fliehkraft gegeben durch $F = mv^2/r$ (m in kg, r in m, v in m/s). Wir betrachten ein Auto der Masse m = 1200kg, das eine Kurve vom Radius r = 100m durchfährt.

a) Gib eine Termdarstellung der Funktion $F: r \rightarrow F(r)$ an!
b) Das Auto erhöht seine Geschwindigkeit. Gib eine Formel für die mittlere Änderungsgeschwindigkeit der Fliehkraft im Geschwindigkeitsintervall [v,z] an!
c) Gib eine Formel für die Änderungsgeschwindigkeit der Fliehkraft bei der Geschwindigkeit v an!
d) Wie schnell ändert sich die Fliehkraft bei einer Geschwindigkeit von 100km/h? Deute das Ergebnis auf drei verschiedene Arten! (Vergiss nicht, die Geschwindigkeit zuerst in m/s umzurechnen!)

[33] Aufgabe 1.62: Sehr große astronomische Entfernungen misst man häufig in Megaparsec. Ein Megaparsec (Mpc) ist die Länge des Weges, den das Licht in 3,24 Millionen Jahren zurücklegt. Der amerikanische Astronom Edwin Hubble hat in den zwanziger Jahren des vorigen Jahrhunderts herausgefunden, dass das Weltall sich aus-

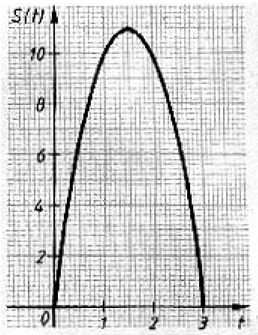


Abb. 7 zu 1.63

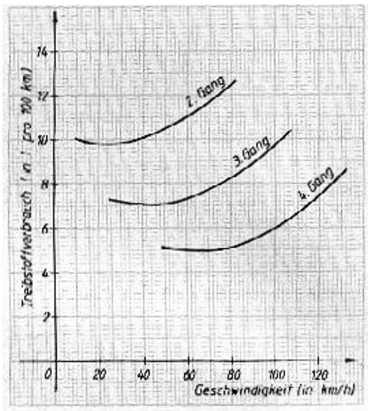


Abb. 8 zu 1.64

Anhand der Aufgabe 1.62 wurden die verschiedenen Deutungen des Differentialquotienten diskutiert. Die Aufgabenstellung bzw. der Hintergrund der Aufgabe wurde von Seiten einiger Schüler als sehr interessant und faszinierend empfunden. Die Fragestellungen der Teilaufgaben a, b und c ermöglichte die Erfahrung des Erkennens der verschiedenen Deutungen anhand eines Beispiels aus der Astronomie. Außerdem wurde den Schülern klar, dass zur Bewältigung dieser Aufgabe nicht gerechnet werden musste. Die Aufgabe 1.55 wurde zur Hausaufgabe erklärt.

Da nun die Deutung des Differentialquotienten anhand der Aufgabe 1.62 in der Theorie erfolgte, wurden nun Funktionsgraphen als Deutungshilfe herangezogen:

Das Situation in der Aufgabe 1.63 ist leicht vorstellbar, trotzdem wurde erst nach einigen falschen Antworten klar, dass die Steigung der Tangente an die Funktion an einer bestimmten Stelle *t* hier als Momentangeschwindigkeit im Zeitpunkt *t* gedeutet werden kann. (Einige sehr falsche Antworten waren etwa: Höhe, Weg oder Richtung.) Die Teilaufgabe b war wiederum kein Problem, nur mit der negativen Steigung hatte so mancher seine Schwierigkeit: „Da der Weg des Steins in die umgekehrte Richtung erfolgen müsse, nimmt man den Betrag der Steigung als Geschwindigkeit an." So in etwa lautete die Erklärung des Lehrers. Bei der Teilaufgabe c wurde mehr oder weniger genau geschätzt. (Eine Bleistift-Graphitmine diente auf der Overhead-Folie als Tangentenersatz.) Teilaufgabe d stellte kein Problem dar, aber erst hier wurde manchen Schülern der Funktionsgraph erst richtig klar.

Die Verwertung mathematischer Modelle im Hinblick auf den Differentialquotienten wurde anhand der Aufgabe 1.64 deutlich. Obwohl der Funktionsgraph an sich leicht zu deuten war, erschien die Bedeutung des Differentialquotienten zunächst nicht sehr sinnvoll, was anhand der Teilaufgabe a zu erkennen war. Erst nach der Erinnerung des Lehrers, was denn die Grundbedeutung des Differential- wie auch des Differenzenquotienten sei, kam der Begriff des Änderungsmaßes und somit auch die richtige Antwort ins Spiel. Somit waren die Teilaufgaben b und c dann auch ohne größere Schwierigkeiten zu bewältigen.

---

dehnt. Fast alle Sternensysteme bewegen sich von uns fort, und zwar umso schneller, je entfernter sie sind. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit v im Abstand r von der Erde ist näherungsweise gegeben durch v = 100r (v in km/s, r in Mpc). Beantworte die folgenden Fragen ohne zu rechnen:

a) Wie groß ist die Änderungsrate der Ausbreitungsgeschwindigkeit im Abstand r von der Erde?
b) Wievielmal schneller wächst die Ausbreitungsgeschwindigkeit v als der Abstand r von der Erde?
c) Um wie viel nimmt die Ausbreitungsgeschwindigkeit pro Megaparsec zu?

Dementsprechend sollten nun als Hausübung die Aufgaben 1.65 (BFM3 1.50)[34] und BFM3 1.51[35] bearbeitet werden.

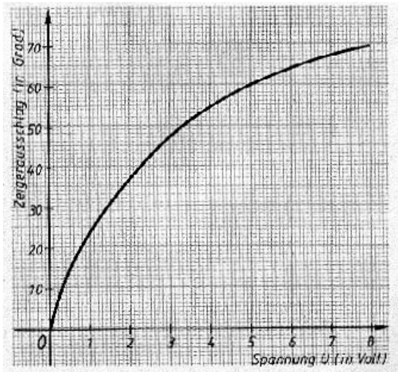


Abb. 9 zu 1.65

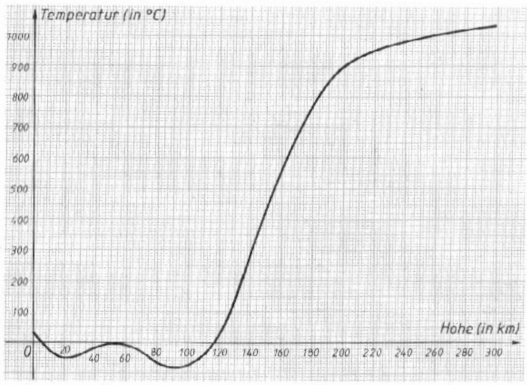


Fig. 1.15 zu BFM3 1.51

3.11 Ableitungsregeln – „So einfach geht das!?“ (elfte Einheit)

Die Hausübungsbesprechung gestaltete sich recht ereignisreich, da manche die Aufgabe 1.55 als zu einfach erachten und daher gar nicht bearbeiteten. Die mündliche Erarbeitung dieser Aufgabe war unproblematisch, da sowohl das Aufstellen der Funktion als auch das Bilden des Differenzen- und Differentialquotienten für einige Schüler bereits langweilig war.

Interessanter war jedoch das Interpretieren und Ablesen an den Graphen. Bei Aufgabe BFM3 1.50 führte lediglich das Ablesen der Spannungsänderung aufgrund der unterschiedlichen Einheiten auf beiden Achsen zu Problemen. Bei Aufgabe BFM3 1.51 wurde zunächst die Richtigkeit des Funktionsgraphen in Zweifel gezogen. „Im Weltall ist es doch kalt, da hat’s doch nicht über 1000°C.“ Ein kleiner Exkurs zum Thema „Aufbau der Erdatmosphäre“ (insbesondere der Thermosphäre) brachte – hoffentlich – ein wenig mehr Klarheit. Kritisches Betrachten des Bildes eines Funktionsgraphen war hier sicherlich – dies wäre positiv anzumerken – gegeben. Auch hier war das Ablesen aufgrund der unterschiedlichen Einheiten ein kleines Problem, aber auch dieses konnte in weiten Bereichen gelöst werden.

Aufgrund aller bereits errechneten Differentialquotienten (ersten Ableitungen) sollte nun in Partnerarbeit ein mögliches Schema des Ableitens gefunden werden. Einige

---

[34] Aufgabe 1.65: Der Zeigerausschlag eines Voltmeters in Abhängigkeit von der angelegten Spannung ist in Abb. 9 dargestellt.

a) Um wie viel Grad steigt der Zeigerausschlag zwischen 0 und 1 Volt bzw. 6 und 7 Volt?
b) Nimmt der Zeigerausschlag mit zunehmender Spannung zu oder ab?
c) Die Änderungsrate des Zeigerausschlags bezüglich der Spannung bezeichnet man als Empfindlichkeit des Voltmeters. Nimmt die Empfindlichkeit des Voltmeters mit steigender Spannung zu oder ab?
d) Bei wie viel Volt ist die Empfindlichkeit des Voltmeters bezüglich der Spannung am größten bzw. am kleinsten?

[35] Aufgabe BFM3 1.51:In Fig. 1.15 ist die mittlere Temperatur T der Atmosphäre in Abhängigkeit von der Höhe h für einen bestimmten Ort der Erde eingezeichnet. T´(h) heißt Temperaturgradient in der Höhe h. Entnimm aus der Figur durch möglichst genaue Messung jene Höhen, in denen der Temperaturgradient a) 6, b) –3, c) 0 beträgt! (Hinweis: Beachte die unterschiedlichen Einheiten auf beiden Achsen!)

Beispiele aus schon mit Hilfe des Grenzwertes gefundenen ersten Ableitungen sollte eine allgemeine Regel für Polynomfunktionen gefunden werden.

Die folgende Ableitungsregel wurde schnell gefunden: $f(x) = x^n \;\Rightarrow\; f\,'(x) = n \cdot x^{n-1}$

(Eine Gruppe machte folgenden interessanten Fehler: $f\,'(x) = (x \cdot n)^{n-1}$)

Bei den Sonderfällen $f(x) = x \Rightarrow f\,'(x) = 1 \cdot x^0 = 1$ und $f(x) = 1 = x^0 \Rightarrow f\,'(x) = 0 \cdot x^{-1} = 0$ kam zur Veranschaulichung wieder das Änderungsmaß ins Spiel: Die lineare Funktion $f(x) = x$ könne als Änderungsmaß nur den Wert 1 haben, da eine bei einer linearen Funktion nur eine konstante Änderung der Fall sein könne (besonders gilt hier: Differenzenquotient = Differentialquotient an jeder Stelle x der linearen Funktion), die konstante Funktion $f(x) = 1$ habe hingegen an jeder Stelle die Änderung 0, die Steigung der Funktion ist an jeder Stelle $k = 0$.

Einige Aufgaben (Zitat eines Schülers: „So einfach geht das!? Und ich rechne da mit dem Limes stundenlang herum ...!“) hierzu (zur Einübung) wurden in der Unterrichtsstunde gerechnet, einige als Hausübung gegeben.An diesem Projekt war eine siebente Klasse Aufbaugymnasium beteiligt. Diese besteht aus acht Schülern und elf Schülerinnen, wobei zwei Schüler den Status „außerordentlicher Schüler“ haben und an dem Projekt nur am Rande mitgewirkt haben. Die Klasse ist, was die schulischen Leistungen betrifft, als durchschnittlich einzustufen, wobei wenige Schülerinnen und Schüler besonders gut und auf der anderen Seite ebenfalls wenige besonders schwach einzustufen sind. Mitunter ist die Klasse nicht sehr leicht motivierbar, was auch im Mathematikunterricht zu erkennen ist.

4 BEMERKUNGEN UND AUSWERTUNGEN

4.1 Die Auswahl der Aufgaben

Bei der Auswahl der Aufgaben, die im Unterricht bzw. als Hausübung zu bearbeiten waren, standen einerseits Überlegungen im Vordergrund, die Alltagsbezüge und wenn möglich Veranschaulichungen beinhalten sollten, andererseits sollte die Abfolge der Aufgaben auch abwechslungsreich sein. Weiters sollte das Interpretieren von Graphen, das Deuten von Begriffen, das Begründen von Lösungsansätzen, das Reflektieren über die mathematischen Inhalte sowie die sprachliche Seite bei Erklärungen und Kommentierungen von Bezeichnungen und Rechengängen gefördert werden.

4.2 Der Besuch einer Mathematikdidaktikvorlesung im Rahmen des Projekts

4.2.1 Ein glücklicher Zufall

Die didaktische Einführung in die Differentialrechnung war im Wintersemester 2003/04 das Thema einer Vorlesung von Univ. Prof. Dr. Günther Malle am Institut für Mathematik der Universität Wien. Einem vorher angekündigten Besuch dieser Vorlesung von Schülerinnen und Schülern der 7G des Don Bosco-Gymnasiums Ebreichsdorf-Unterwaltersdorf stand Prof. Malle sehr positiv gegenüber. Es sollte dies einerseits eine Ergänzung zum Unterricht, andererseits auch ein erstes Kennenlernen des Universitätsbetriebs mit anschließendem Gespräch mit Prof. Malle sein.

Am Nachmittag des 25. November 2003 fand dann diese Exkursion statt, bei der fast alle Schülerinnen und Schüler dieser Klasse dabei waren. Das gerade im Mathematikunterricht behandelte Thema konnte so von einer etwas anderen Perspektive erfahren werden. Der Zufall wollte es so, dass die Unterrichtssequenzen des Projekts zeitlich mit dem Inhalt der besuchten Vorlesung thematisch ziemlich exakt übereinstimmten.

Das Projekt wurde infolgedessen für die Schülerinnen und Schüler „hautnaher“. Deren verstärkte Einbindung sollte der Motivation dienen, auch bei den Abschlusstests ernsthaft mitzumachen.

4.2.2 Reaktionen der Schülerinnen und Schüler

Die Reaktionen der Schülerinnen und Schüler hinsichtlich des Besuchs einer Vorlesung an der Universität waren zum größten Teil positiv. Einige meinten aber auch, der Besuch hätte für sie nichts gebracht, da man den Stoff in dieser Form ohnehin nicht lernen müsse; somit hätte sich aufzupassen nicht wirklich gelohnt.

Ein paar schriftliche Rückmeldung von Schülerinnen und Schülern seien hier angeführt:

Also, ich (wir) denken, dass diese Exkursion sehr lehrreich war, da man sich ein Bild über die Lernmethoden und das Arbeitsklima an einer Universität machen konnte. Weiters glaube ich, dass durch diese „Vorarbeit" das Stoffgebiet leichter zu verstehen war.

Mir hat der Besuch in der Universität gut gefallen. Ich denke auch, dass es sehr günstig war, vor der Schularbeit hinzufahren.

Der Besuch der Vorlesung hat mir persönlich nichts gebracht, da ich nicht vorhabe am mathematischen Institut zu studieren.

Dieser Ausflug in die Uni war für mich sehr interessant, jedoch war es sehr schwierig immer den Erklärungen zu folgen. Für die Schularbeit hat es mir ein wenig geholfen.

Ich finde, dass dieser Ausflug für mich weniger brauchbar, jedoch recht interessant war, da genau das besprochen wurde, was wir schon im Unterricht gelernt haben. Weiters konnte ich mir auch ein Bild von einer Vorlesung machen und deren Tafellöschtechnik.

Die Exkursion in die (Mathe-)Uni hat mich sehr beeindruckt. Es hat mir ein wenig Angst eingeflößt, da es ja einfache Mathematik war (Mathematik für Schüler!) und es ab und zu schwer war, das Geschehen mitzuverfolgen.

Ich war ehrlich überrascht, dass es auch so kleine Hörsäle gibt, weil ich eigentlich immer mit einem Hörsaal in der Uni einen riesigen, leicht ansteigenden Raum verbunden habe. Außerdem habe ich von Erzählungen gehört, dass es sehr schwer ist, bei einer Vorlesung alles genau mitzuschreiben, aber der Tag in der Uni hat mich überzeugt, dass es auch anders sein kann.

Der Besuch im Mathematik-Institut war sinnvoll, um sich ein Bild von der Uni zu machen um das Unterrichtsgeschehen dort mitzubekommen.

Ich finde, es war eine sehr gute Idee, an einer Vorlesung teilzunehmen, da es wirklich interessant war mitzuerleben, wie so etwas abläuft und man einen gewissen Einblick in das Ganze bekommt. Außerdem erwartet das sicherlich viele von uns und da das Thema zu unserem damaligen Mathematikunterricht gehörte, konnte man auch der Vorlesung folgen. Ein Dankeschön an Prof. Salzger und Prof. Malle, die diesen Besuch ermöglichten!

4.3 Die Ergebnisse der Abschlusstests

4.3.1 Der Test zum Differenzenquotienten

Definitionen und einfache Rechenaufgaben stellten für den Großteil der Klasse keine Schwierigkeiten dar. Das Angeben von Termdarstellungen mit konkreten Zahlen war etwas schwieriger, mit Variablen war das Problem noch größer.

So war die schwierigste Aufgabe (fünf völlig bzw. fast richtige Antworten, zwölfmal eine falsche oder keine Antwort) für die Schülerinnen und Schüler die folgende: *Gib eine Termdarstellung einer Funktion f und ein Intervall [a, b] an, sodass der Differenzenquotient von f in diesem Intervall negativ ist, aber f in diesem Intervall nicht streng monoton fallend ist! Zeichne den Graphen von f!* Rechenfehler sowie falsche Funktionsterme führten vor allem zu diesem Ergebnis.

Als einfachste Frage (bis auf eine Ausnahme nur völlig bzw. fast richtige Antworten) wurde die folgende aufgefasst: *Was versteht man unter einem Differenzenquotienten?*

4.3.2 Der Test zum Differentialquotienten

Ebenso wie im vorangegangenen Test waren hier Definitionen und einfache Rechenaufgaben zum größten Teil keine großen Schwierigkeiten. Bei Fragen zu Deutungen wurde oft nur eine Deutung angegeben. Dies deutet daruf hin, dass sich die Schülerinnen und Schüler oft nur eine Version eingeprägt haben, mit der sie arbeiten. Das Interpretieren von Graphen stellte für diejenigen, die die jeweilige Frage bearbeitet haben, keine großen Probleme dar, die anderen haben die Frage erst gar nicht beantwortet; falsche Antworten gibt es hierbei kaum. Zudem fällt auf, dass Aufgaben, die aus viel Text bestanden, von vielen ganz ausgelassen wurden.

Die Frage, die von fast allen Schülerinnen und Schülern ausgelassen wurde (nur eine fast richtige und eine falsche Bearbeitung, sonst keine Bearbeitung hierzu), war die folgende: *Wenn ein Stein ins Wasser geworfen wird, geht vom Aufprallpunkt eine kreisförmige Welle aus. Die Wellenfront ist daher ein Kreis mit wachsendem Radius r. Es sei U(r) der Umfang und A(r) der Flächeninhalt dieses Kreises.* ***a)*** *Was versteht man unter der mittleren Änderungsrate des Umfangs bezüglich des Radius im Radiusintervall [r,z]? Was unter der Änderungsrate des Umfangs bezüglich des Radius beim Radius r?* ***b)*** *Was versteht man unter der mittleren Änderungsrate des Flächeninhalts bezüglich des Radius im Radiusintervall [r,z]? Was unter der Änderungsrate des Flächeninhalts bezüglich des Radius beim Radius r?* ***c)*** *Stelle eine Formel für die Änderungsrate des Umfangs bezüglich des Radius auf und zeige, dass diese Änderungsrate konstant ist!* ***d)*** *Stelle eine Formel für die Änderungsrate des Flächeninhalts bezüglich des Radius auf! Ist diese Änderungsrate auch konstant? Ist sie zum Radius direkt proportional?*

Als einfachste Frage (bis auf eine Ausnahme nur völlig bzw. fast richtige Antworten) wurde die folgende aufgefasst: *Was versteht man unter einem Differentialquotienten?Ist der Differentialquotient dasselbe wie der Differenzenquotient? Wenn nein, wann sind die beiden wenigstens ungefähr gleich?*

4.4 Eine persönliche Gesamteinschätzung

Bezüglich der Grundvorstellungen der beiden Begriffe Differenzenquotient und Differentialquotient lässt sich erkennen, dass die Schülerinnen und Schüler zum Großteil zumindest eine Vorstellung zu den beiden Termini zur Verfügung haben, die ihnen als Grundlage für weitere Überlegungen dient. Den meisten Schülerinnen und Schülern mehrere Deutungen nachhaltig zu vermitteln, konnte nur ansatzweise erreicht werden. Außerdem ist festzustellen, dass längere Angabetexte abschreckend wirkten. Diese Scheu vor dem Einlesen in eine Aufgabe muss noch genommen werden.

Ansonsten kann resümiert werden, dass diese genaue Beschäftigung mit den Grundlagen der Differentialrechnung im Endeffekt von großem Vorteil war, da hierdurch weiterführende Unterkapitel in diesem Stoffgebiet (z. B. Funktionsanalysen, Extremwertaufgaben) schneller behandelt werden konnten als üblich.

5 KONSEQUENZEN

Abschließend kann konstatiert werden, dass der Zugang zu diesem Kapitel mittels Grundvorstellungen von den meisten Schülerinnen und Schülern als durchaus positiv aufgefasst wird.

Durch das Anknüpfen an bereits vorhandenes Wissen aus dem Alltag und aus der Mathematik findet eine Vernetzung statt, die als Resultat das Kennen der beiden Begriffe und das Umgehen-Können mit ihnen nach sich zieht.

Grundvorstellungen können auf jeden Fall als Fundament der Grundbildung bezeichnet werden, das Zugänge zu neuen Begriffen erheblich erleichtert.

Die Zeit, die man sich als Lehrperson für das Erarbeiten von Grundvorstellungen nehmen muss, fehlt zwar mitunter beim Festigen von Rechenfertigkeiten; da zu den Begriffen aber eine Vorstellung mit einem mathematischen Inhalt verbunden wird, profitiert davon jedoch die Allgemeinbildung.

6 LITERATUR

BÜRGER, H. et al.: Mathematik Oberstufe 3. Arbeitsbuch für die 7. Klasse der AHS. Hölder-Pichler-Tempsky: Wien ^{2}2000.

IFF (Hrsg.): Didaktische Strukturierung für den Unterricht. IMST²-S1 – Schwerpunktprogramm Grundbildung. Workshop I, Yspertal (6. November 2003)

IFF (Hrsg.): Ein dynamisches Konzept für mathematisch-naturwissenschaftliche Grundbildung (Handreichung für die Praxis). IMST²-S1 – Schwerpunktprogramm Grundbildung (25. August 2003)

MALLE, G.: Differenzenquotient und Differentialquotient. Ein Lehrgang zur Grundbildung. o. J.

MALLE, G.: Grundvorstellungen zum Differenzenquotienten (zur mittleren Änderungsrate). o. J.

MALLE, G.: Grundvorstellungen zum Differentialquotienten (zur Änderungsrate). o. J.

http://imst.uni-klu.ac.at/materialien/_design/innovation_kurz.dot (25. April 2004)

http://imst.uni-klu.ac.at/materialien/_design/innovation_lang.dot (25. April 2004)

http://www.uni-klu.ac.at/gdm-ak/ProtokollStandards.htm (27. April 2004)

Abbildungen aus:

BÜRGER, H. et al.: Mathematik Oberstufe 3. Arbeitsbuch für die 7. Klasse der AHS. Hölder-Pichler-Tempsky: Wien ^{2}2000.

MALLE, G.: Differenzenquotient und Differentialquotient. Ein Lehrgang zur Grundbildung. o. J.

7 ANHANG

1.SCHULARBEIT (Gruppe A) 7G Montag, 27.Oktober 2003

1) a) Gegeben sei die komplexe Zahl $z = -2 + 5i$.

(α) Erläutere die Merkmale von Binomial- und Polardarstellung einer komplexen Zahl!

(β) Berechne z^3 auf zwei Arten und gib das Ergebnis in jenen beiden Darstellungen an!

(γ) Berechne alle dritten Wurzeln ζ_i aus z in C und gib die Ergebnisse in der Polardarstellung an! [8 P.]

b) Stelle alle vierten Einheitswurzeln in der Gaußschen Zahlenebene dar! [2 P.]

2) Gegeben sei die Gleichung $x^3 - 5x^2 - 7x + 51 = 0$.

(α) Wie viele Lösungen der Gleichung in C sind höchstens zu erwarten? Begründe!

(β) Ermittle mit dem TI-82 eine reelle Lösung der Gleichung und berechne die restlichen mittels Polynomdivision!

(γ) Schreibe das Polynom $x^3 - 5x^2 - 7x + 51$ als Produkt von Linearfaktoren an! [8 P.]

3) Der Differenzenquotient ist ein wichtiges Maß bei der Analyse von Funktionen.

(α) Definiere den Differenzenquotienten allgemein!

(β) Gib mindestens zwei Deutungen des Differenzenquotienten an!

(γ) Berechne den Differenzenquotienten von $f(x) = x^2 - x$ im Intervall [1;5]! [6 P.]

4) Gegeben sei die Funktion $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$.

(α) Erläutere den Begriff der Sekantenfunktion s einer reellen Funktion f allgemein!

(β) Ermittle eine Termdarstellung der Sekantenfunktion $s(x)$ von $f(x)$ im Intervall [0;2]!

(γ) Stelle den Graphen von $f(x)$ auf dem TI-82 dar, skizziere den Graphen im Heft und zeichne darauf zwei Punkte $A(a \mid f(a))$ und $B(b \mid f(b))$ ein, durch die eine Sekante mit positiver Steigung verläuft! [8 P.]

VIEL SPASS!

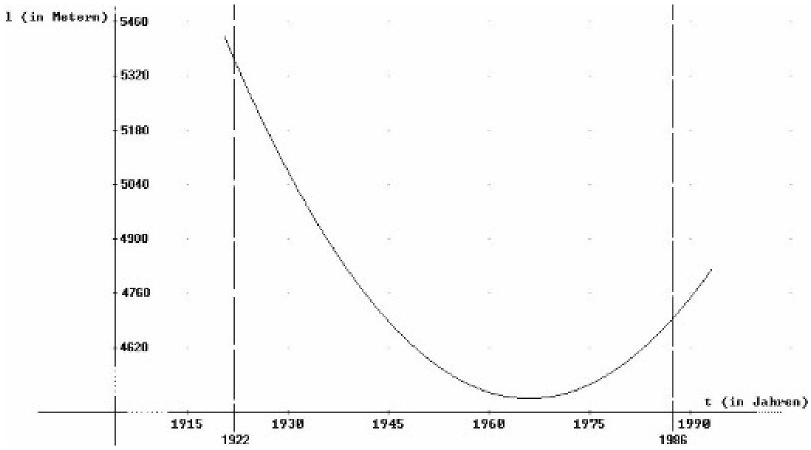
2.SCHULARBEIT (Gruppe A) 7G Freitag, 5.Dezember 2003

1) Gegeben sei die Funktion $f(x) = 3x^2 - 2$.
(α) Stelle eine Formel für den Differentialquotienten $f'(x)$ laut Definition auf!
(β) Berechne $f'(3)$ als Grenzwert des Differenzenquotienten!
(γ) Ermittle eine Termdarstellung der Tangentenfunktion $t(x)$ von $f(x)$ bei $x_0 = 3$! [8 P.]

2) Die Höhe (in m) eines lotrecht nach oben geworfenen Steines nach t Sekunden sei durch die Funktion $s(t) = -4t^2 + 20t$ gegeben.
(α) Berechne die Geschwindigkeit des Steines zum Zeitpunkt $t_0 = 2$!
(β) Zu welchem Zeitpunkt ist die Geschwindigkeit des Steines $v = 0$?
(γ) Übersetze diese Gleichungen in die Alltagssprache: $s(1) = 16$; $s'(1) = 12$ [8 P.]

3) Der Graph einer Polynomfunktion f zweiten Grades habe bei $x_0 = 3$ eine lokale Extremstelle. Die Tangente an den Graphen im Punkt P(5 | 0) sei zu der Geraden g: $-4x + y = 1$ parallel. Ermittle eine vollständige Funktionsgleichung von f! [8 P.]

4) Der Kesselwandferner im Ötztal ist ein Gletscher, der sich mehrere Jahrzehnte lang stark zurückgezogen hat. Vor einigen Jahren ist er wieder vorgestoßen, d. h. seine Länge hat zugenommen. Aus Trendberechnungen vergangener Beobachtungen haben Geophysiker und Meteorologen der Universität Innsbruck folgende Funktionsgleichung hergeleitet, die die Länge des Kesselwandferners (in m) für den Zeitraum vom 1. Jänner 1922 bis zum 1. Jänner 1986 näherungsweise angibt: $l(t) = 4500 + 0{,}45\cdot(1966 - t)^2$
Für t ist die jeweilige Jahreszahl einzusetzen.



(α) Berechne, welche Länge der Gletscher am 1. Jänner 1936 hatte!
(β) Berechne, wie groß die mittlere absolute Längenänderung im Zeitraum zwischen dem 1. Jänner 1936 und dem 1. Jänner 1986 war!
(γ) Ermittle aus dem Graphen von $l(t)$, in welchem Jahr der Gletscher faktisch keine Ausdehnung hatte und rechne mit Hilfe der Differentialrechnung nach! [8 P.]

ALLES GUTE!

Test zum Differenzenquotienten

1.) Was versteht man unter einem Differenzenquotienten?

2.) Gegeben sei eine reelle Funktion f.
a) Schreibe die mittlere Änderungsrate von f im Intervall [2;7] an!
b) Wie groß ist diese mittlere Änderungsrate, wenn $f(x) = x^2$ ist?
c) Deute das Ergebnis auf drei verschiedene Arten!

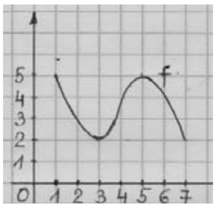
3.) Zeichne den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ im Intervall [0;4].
a) Um wie viel wächst f(x), wenn x von 0 auf 4 erhöht wird?
b) Um wie viel wächst f(x) im Mittel, wenn x von 0 auf 4 erhöht wird?

4.) Ein Auto fährt in eine Kurve. Wir nehmen an, dass die auf das Auto wirkende Fliehkraft durch die Formel $F(v) = 15\,v^2$ gegeben ist, wobei v die Geschwindigkeit in m/s und F(v) die Fliehkraft in Newton ist. Das Auto erhöht seine Geschwindigkeit in der Kurve von 22m/s auf 28m/s. In welchem Verhältnis steht dabei die Fliehkrafterhöhung zur Geschwindigkeitserhöhung?

5.) Das Volumen eines Würfels mit der Kantenlänge s ist gegeben durch $V(s) = s^3$. Die Kantenlänge wird von 1 auf 10 vergrößert. Wievielmal stärker wächst dabei das Volumen als die Kantenlänge?

6.) Gib Termdarstellungen von zwei verschiedenen Funktionen an, die im Intervall [0;2] den Differenzenquotienten 1 haben!

7.) Gib eine Termdarstellung einer Funktion f und ein Intervall [a,b] an, sodass der Differenzenquotient von f in diesem Intervall negativ ist, aber f in diesem Intervall nicht streng monoton fallend ist! Zeichne den Graphen von f!



8.) Gib jeweils ein Intervall an, in dem der Differenzenquotient der nebenstehend abgebildeten Funktion a) positiv, b) negativ, c) gleich 0 ist. Wie groß ist der Differenzenquotient jeweils?

9.) Gegeben sei die lineare Funktion f mit $f(x) = 3x + 2$. Wie groß ist der Differenzenquotient dieser Funktion in einem beliebigen Intervall [a,b]? Beantworte die Frage zuerst ohne Rechnung und rechne dann nach!

10.) Sei $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x$. Zeichne den Graphen von f im Intervall [0;4]. Zeichne die Sekantenfunktion s im Intervall [1;4] ein und gib eine Termdarstellung von s an!

Test zum Differentialquotienten

1.) a) Was versteht man unter einem Differentialquotienten?
b) Ist der Differentialquotient dasselbe wie der Differenzenquotient? Wenn nein, wann sind die beiden wenigstens ungefähr gleich?

2.) Ist die mittlere Geschwindigkeit in einem Zeitintervall dasselbe wie die Geschwindigkeit zu einem Zeitpunkt? Wenn nein, erläutere den Unterschied!

3.) Sei $f(x) = \frac{1}{x}$. Berechne $f'(2)$ und deute das Ergebnis auf drei verschiedene Arten!

4.) Wenn ein Stein ins Wasser geworfen wird, geht vom Aufprallpunkt eine kreisförmige Welle aus. Die

Wellenfront ist daher ein Kreis mit wachsendem Radius r. Es sei U(r) der Umfang und A(r) der Flächeninhalt dieses Kreises.

a) Was versteht man unter der mittleren Änderungsrate des Umfangs bezüglich des Radius im Radiusintervall [r,z]? Was unter der Änderungsrate des Umfangs bezüglich des Radius beim Radius r?

b) Was versteht man unter der mittleren Änderungsrate des Flächeninhalts bezüglich des Radius im Radiusintervall [r,z]? Was unter der Änderungsrate des Flächeninhalts bezüglich des Radius beim Radius r?

c) Stelle eine Formel für die Änderungsrate des Umfangs bezüglich des Radius auf und zeige, dass diese Änderungsrate konstant ist!

d) Stelle eine Formel für die Änderungsrate des Flächeninhalts bezüglich des Radius auf! Ist diese Änderungsrate auch konstant? Ist sie zum Radius direkt proportional?

5.) Sei f(x) = 5x – 2. Ermittle f ´(3) ohne zu rechnen! Welcher allgemeine Satz liegt zugrunde? Formuliere und beweise diesen Satz!

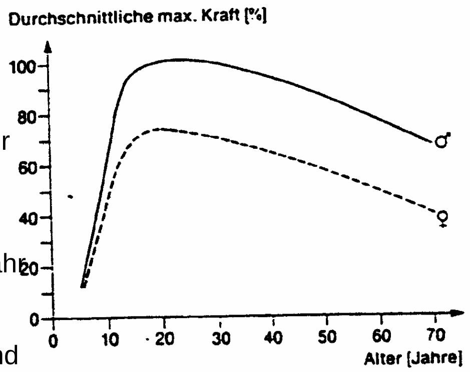
6.) Was versteht man unter einer Tangente an einen Funktionsgraphen? Gib eine möglichst genaue Definition an! Erläutere an einer Zeichnung, wie die Tangentensteigung mit Sekantensteigungen zusammenhängt!

7.) Sei $f(x) = 3 - x^2$.

a) Berechne die Steigung von f an der Stelle –2 !

b) An welchen Stellen ist die Steigung von f gleich 10?

8.) Nebenstehend ist die durchschnittliche maximale Muskelkraft eines Menschen in Abhängigkeit vom Alter dargestellt.



a) Was bedeutet die Steigung der Funktion an einer Stelle?

b) In welchem ungefähren Altersbereich ist die Änderungsrate der Muskelkraft bezüglich des Alters positiv, in welchem negativ? Wann ungefähr ist sie gleich 0? Was bedeuten die Vorzeichen?

c) Unterscheidet sich die Änderungsrate der Muskelkraft bezüglich des Alters bei Männern und Frauen nach dem 20. Lebensjahr wesentlich? Wie ist es vor dem 20. Lebensjahr?

d) In welchem ungefähren Altersbereich ist die Änderungsrate der Muskelkraft bezüglich des Alters am größten?

9.) Schreibe mit Hilfe der Leibnizschen Symbolik an: $U'(r) = \lim_{z \to r} \frac{U(z) - U(r)}{z - r}$.

10.) Ergänze die folgende Tabelle durch mindestens zwei weitere Zeilen:

Funktionswert f(x)	Differenzenquotient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$	Differentialquotient f ´(x)
:		
s(t) = Ort zum Zeitpunkt t	$\frac{s(b)-s(a)}{b-a}$ = mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall [a,b]	s ´(t) = Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t