MNI-Fonds für Unterrichts- und Schulentwicklung
S2 „Grundbildung und Standards“

STUDIERENDE LERNEN VON UND MIT MATHEMATISCH LEISTUNGSSTARKEN KINDERN

Mag. Maria Fast

Dr. Karin Gstatter

Brigitte Wiser

Pädagogische Akademie der Stiftung Pädagogische und Religionspädagogische Akademie der Erzdiözese Wien

Übungsvolksschule der Pädagogischen Akademie der Erzdiözese Wien

Mayerweckstraße 1
1210 Wien

Wien, Juli 2006

INHALTSVERZEICHNIS

ABSTRACT

Dieses Projekt bezieht sich einerseits auf den Mathematikunterricht einer dritten Schulstufe und andrerseits auf die Lehrerinnen- und Lehrerbildung im Bereich der Volksschuldidaktik Mathematik. Studierende begleiten im Rahmen von Studienveranstaltungen Kinder einer dritten Schulstufe beim Bearbeiten von mathematischen Aufgaben.

Besonderes Augenmerk wird auf leistungsstarke Schülerinnen und Schüler gelegt, die in diesem Schuljahr vor allem kombinatorische und geometrische Aufgabenstellungen bearbeiten. Die Studierenden entwickeln diese Aufgaben als Lernmaterialien und in Form von Karteikarten und begleiten die Kinder.

Die Studierenden erfassen zu Beginn und am Ende des Schuljahres den Lernstand der Kinder von Experimental- und Vergleichsklasse. Sie fragen nach den Lösungsstrategien und erwerben dadurch diagnostische Kompetenz.

Schulstufe:	3. Schulstufe
Fächer:	Mathematik
Kontaktperson:	Dr. Karin Gstatter
Kontaktadresse:	Übungsvolksschule der Pädagogischen Akademie der Erzdiözese Wien Mayerweckstraße1 1210 Wien

Schulstufe:	Diplomstudium für das Lehramt an Volksschulen
Fächer:	Volksschuldidaktik Mathematik
Kontaktperson:	Mag. Maria Fast
Kontaktadresse:	Pädagogische Akademie der Stiftung Pädagogische und Religionspädagogische Akademie der Erzdiözese Wien Mayerweckstraße 1 1210 Wien

1 EINLEITUNG

In Österreich werden alle Kinder, die das sechste Lebensjahr erreicht haben, eingeschult und in möglichst altershomogenen Jahrgangsklassen unterrichtet. Eine Volksschulklasse zeigt somit die soziale Zusammensetzung des Wohngebietes und weist dadurch ein hohes Maß an Leistungsheterogenität auf.

Ergebnisse der empirischen Bildungsforschung zeigen, dass der Erfolg in heterogenen Leistungsgruppen sehr stark davon abhängt, ob es den Lehrpersonen gelingt, einen fachlich kompetenten und zugleich methodisch vielfältigen Unterricht zu realisieren, der kontinuierlich binnendifferenzierende Elemente enthält. In der schulpädagogischen Literatur wird, meist normativ, an die Lehrerinnen und Lehrer appelliert, eine andere Unterrichtspraxis durchzuführen. Dies fordert vielfältige Ansprüche an das Lehrerinnen- und Lehrerhandeln. Auch wenn sich diese Forderungen, empirisch gestützt, plausibel begründen lassen, ist doch zu hinterfragen, ob sie Lehrerinnen und Lehrer umsetzen können. Sie sind zwar für Lehrpersonen einsichtig, aber diese sehen sich außerstande, diesem Anspruch gerecht zu werden.

TILLMANN und WISCHER (2006, S. 48) weisen darauf hin, dass Individualisierung weniger empfohlen, sondern vielmehr auf die Problemstellungen der Lehrpersonen eingegangen werden sollte. Im Mittelpunkt sollten daher erste didaktische Schritte stehen und die Frage, mit welchen konkreten Problemen dabei zu rechnen ist.

In unserem Projekt gehen wir einen ersten kleinen didaktischen Schritt. Wir setzen uns mit der Forderung nach sinnvollem Material für leistungsstarke Kinder auseinander. Dieses Material setzen wir in einer dritten Schulstufe ein, wo sich einige Kinder befinden, die bereits in der ersten Schulstufe durch ihre außergewöhnlichen Leistungen in Mathematik auffielen. Wir stellen uns die Aufgabe, Materialien so zu konzipieren, dass möglichst wenig personelle Ressourcen notwendig sind.

Ziel des Projekts im Bereich der Volksschule ist eine inhaltliche Öffnung des Mathematikunterrichts. Mit Hilfe von Aufgabenstellungen, die unterschiedliche Niveaus an Bearbeitungen zulassen, bringen sich die Schülerinnen und Schüler ihren Fähigkeiten gemäß ein. Wir nehmen an, dadurch leistungsstarke Kinder fördern zu können.

Neben didaktisch-methodischen Überlegungen zum Einsatz in der Klasse fokussiert das Projekt auch die dafür notwendigen Kompetenzen der Lehrperson. Wir gehen der Frage nach, wie Lehrveranstaltungen in der Volksschullehrerinnen- und Volksschullehrerausbildung konzipiert sein sollen, die diagnostische Kompetenz grundlegen.

Ziel des Projekts im Bereich der Lehrerinnen- und Lehrerbildung ist der eigenaktive Erwerb von Wissen über mathematische Denkweisen des Grundschulkindes. Die zukünftige Lehrperson soll verstehen, wie Schülerinnen und Schüler lernen und sich entwickeln. Wir nehmen an, dass Studierende durch das Instruieren, Beobachten und Befragen von Kindern mehr diagnostische Kompetenz erlangen.

Die Studierenden sollen kindliche Denkprozesse beobachten, deuten und dokumentieren. Dies ist wichtig, um für das einzelne Kind im Sinne einer Differenzierung und Individualisierung geeignete Lernwege gestalten und begleiten zu können. Ziel ist nicht nur vordergründig nette und motivierende Aufgaben zu stellen, welche die Kinder vielleicht auch gerne durchführen, bei denen aber kein Lernzuwachs festzustellen ist, sondern ein mehr auf das Lernen fokussierten Unterricht. Die Studierenden sollen sich mehr auf das Denken der Kinder einlassen.

Das Projekt vernetzt Studienveranstaltungen im Bereich der Volksschuldidaktik Mathematik mit dem Mathematikunterricht in der Übungsvolksschule. Studierende der Volksschullehrerausbildung begleiten im Rahmen von Studienveranstaltungen Kinder beim Bearbeiten von mathematischen Aufgaben.

Im Projekt, das über drei Jahre konzipiert ist, betreuen wir Kinder von der zweiten bis zur vierten Schulstufe. Im Schuljahr 2004/2005 begleiteten wir im Projekt „*Förderung mathematisch leistungsstarker Kinder im Klassenverband*" leistungsstarke Schülerinnen und Schüler durch die zweite Schulstufe und boten vor allem reine Zahlenaufgaben an. Im Schuljahr 2005/2006 beschreiben wir kombinatorische und geometrische Aufgabenstellungen. Dieses Schuljahr beziehen wir mehr Kinder in die Aufgabenstellungen mit ein. Das Erfassen des Lernstands in der Experimental- und in einer Vergleichsklasse zu Beginn und am Ende jedes Schuljahres evaluiert das Verstehen und Können diverser mathematischer Inhalte, die im Lehrstoff des Lehrplans gefordert sind, um eine Kontinuität des gesamten Mathematikunterrichts zu gewährleisten. Gleichzeitig werden die Lernprozesse der teilnehmenden Personen betreut und beobachtet. Standen im Studienjahr 2004/2005 die Lernprozesse der Kinder im Mittelpunkt, wollen wir im Studienjahr 2005/2006 auch die Lernprozesse der Studierenden näher beobachten.

2 DER GRUNDBILDUNGSGEDANKE

2.1 Allgemeine mathematische Kompetenzen im Volksschulbereich

Neben einer Steigerung inhaltlicher Fähigkeiten im Umgang mit kombinatorischen bzw. geometrischen Fragestellungen erwerben die Kinder allgemeine Kompetenzen, wie Modellieren, Kommunizieren, Probleme stellen und lösen, wie sie auch im Entwurf zu den Bildungsstandards für Mathematik, 4. Schulstufe (BRUNNER, CERMAK, FAST, NÖSTERER, PLATZGUMMER & REPOLUSK, 2006) enthalten sind. Diese werden in den folgenden Absätzen näher beschrieben.

Modellieren

Bei den Aufgabenstellungen, die im Rahmen des Projekts angeboten werden, wird meist von einer Sachsituation ausgegangen, die in ein mathematisches Modell übertragen werden muss. Die Schülerinnen und Schüler sind aufgefordert den mathematischen Stellenwert eines Problems zu erkennen, die benötigten Daten zu sichten und einen geeigneten Lösungsweg zu finden. Das Ergebnis ist in Hinblick auf die Sachsituation zu interpretieren und ev. auf seine Gültigkeit zu überprüfen. Dieser Prozess des Modellierens wird in Abbildung 1 dargestellt.

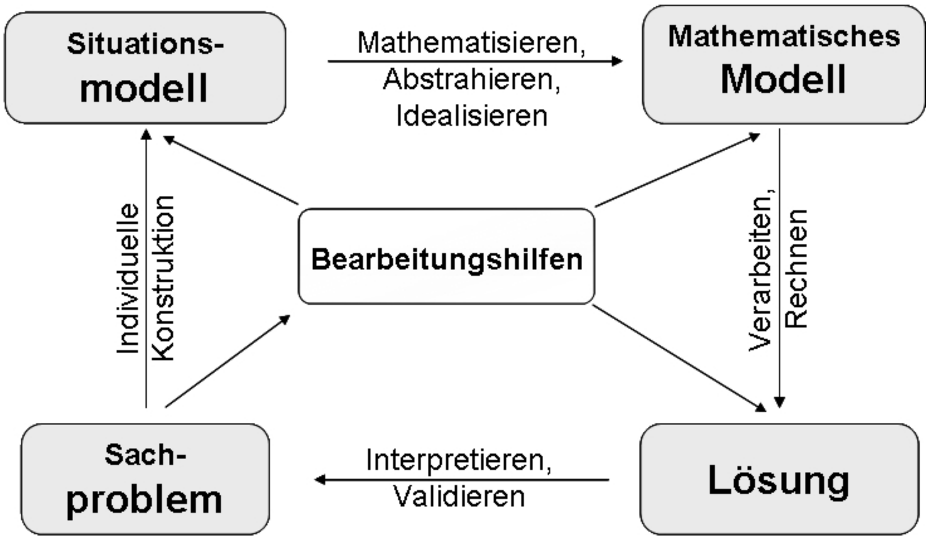


Abbildung 1: Modellieren

Ausgehend von einem fiktiven oder realen Sachproblem bildet jedes Kind mit Hilfe eigener Erfahrungen bzw. entsprechender Denkstrategien ein individuelles Situationsmodell. Anschließend wird das Situationsmodell durch Weglassen von nicht strukturbildenden Merkmalen (Abstrahieren) bzw. durch Hinzufügen oder Annehmen von Merkmalen (Idealisieren) in ein mathematisches Modell übergeführt. Dabei wird mathematisch Relevantes (Mathematisieren) herausgelöst (z. B. durch Messen, Zählen, Schätzen) und die passende Rechenoperation gefunden. Beim Verarbeiten/Rechnen müssen die relevanten Daten von den Kindern nach mathematischen Konzepten, wie z. B. Gleichungen, Terme, Rechenoperationen, Zeichnungen, Skizze, … organisiert werden. Die aus dem Verarbeiten gewonnenen Ergebnisse werden mit der realen Situation in Zusammenhang gebracht (z. B. passende Antwort, genaue Zeichnung, …) und auf ihre Plausibilität überprüft. Weiters soll ein Rückblick auf den gewählten Lösungsweg erfolgen, ob dieser zielführend war (z. B. Verbalisieren, Argumentieren des Lösungsweges, …).

Kommunizieren

Die Kinder, die an diesem Projekt teilnehmen, lösen die Aufgaben meist ohne direkte Instruktion eines Erwachsenen. Ist etwas unklar oder gibt es Fragen, kann nur mit gleichaltrigen Mitschülerinnen und Mitschülern Kontakt aufgenommen werden, um Gedanken, Meinungen und Lösungswege auszutauschen. Kommunikation und Interaktionen mit den Peers helfen den Kindern, sich Wissen aufzubauen, andere Denkweisen kennen zu lernen und sich über das eigene Denken klar zu werden.

Unter Kommunizieren wird allgemein eine intendierte Verständigung zwischen Menschen in sozialen Situationen verstanden, vor allem durch Sprache. Im Mathematikunterricht umfasst „*Kommunizieren*“ die Kompetenz, mathematische Aufgaben mit Hilfe der Fachsprache zu verbalisieren, mathematisch zu argumentieren, zu dokumentieren und zu begründen. Um etwas verbal oder schriftlich festhalten zu können, muss eine geeignete Auswahl an Begriffen und Symbolen zur Verfügung stehen, damit andere die Denkprozesse nachvollziehen können.

Von besonderer Bedeutung scheint das Argumentieren zu sein, das Begründen einer Meinung oder eines Standpunkts. Argumentieren steht nicht nur als allgemeine mathematische Kompetenz für sich, sondern ist deshalb so wichtig, weil durch die Teilnahme an Argumentationsprozessen selbst gelernt wird. Im Volksschulbereich beschränkt sich Argumentieren nach KRUMMHEUER und BRANDT (2001, S. 19) *„nicht nur im strengsten Sinn auf mathematisches Beweisen, sondern bezieht sich auf Rationalisierungen, die aus dem alltäglichen und/oder nicht-mathematischen Argumentationszusammenhängen herrühren*“.

Probleme stellen und lösen

Die im Projekt angebotenen Aufgabenkarten sind so konzipiert, dass für die Kinder nicht schon von Anfang an ein Lösungsweg ersichtlich ist. Es entsteht ein Problem.

Ein Problem ist keine objektive Gegebenheit, sondern entsteht, wenn jemand ein Ziel kennt und nicht weiß, wie sie oder er dieses Ziel erreichen soll. Konkret hängt es vom Wissensstand eines Kindes ab, ob es die Aufgabe nach einem bekannten Schema bearbeiten kann oder ob es notwendig ist, einen für das Kind neuen Lösungsweg zu finden. Problemlöseaktivitäten bestehen aus Tätigkeiten, wie Vermuten, Probieren, systematisches Durchforsten, Erkennen von Zusammenhängen, Anlegen von Tabellen …, um sich schrittweise einer Lösung zu nähern. Um Antworten auf die gestellten Fragen zu bekommen, ist es für das einzelne Kind notwendig, den für es selbst sinnvollsten Weg experimentierend zu finden, um durch den Vergleich mit anderen Vorgehensweisen ein zielführendes Vorgehen herauszufinden.

Besonders kombinatorische Aufgaben fördern die Problemlösekompetenz, weil sie nicht von vornherein den Lösungsweg zeigen.

2.2 Förderdiagnostische Kompetenz im Bereich der Lehrerinnen- und Lehrerbildung

Auf dem Weg zur Pädagogischen Hochschule entstehen viele Konzepte, wie Lehrerinnen- und Lehrerbildung gestaltet werden muss, um eine optimale Vorbereitung auf die Profession zu erreichen. Die Konzepte beziehen sich meist auf Kompetenzen, welche die zukünftige Lehrperson haben soll. In diesem Projekt wird die diagnostische Kompetenz angesprochen.

In den Konzepten zur Lehrerinnen- und Lehrerbildung wird im Vorschlag der KMK[1] (2004) die Kompetenz *„Lehrerinnen und Lehrer diagnostizieren Lernvoraussetzungen und Lernprozesse von Schülerinnen und Schülern; sie fördern Schülerinnen und Schüler gezielt und beraten Lernende und deren Eltern*“ angeführt. OSER (2001, S. 232 und S. 237) bezieht die Standardgruppen *„Diagnose und Schüler unterstützendes Handeln“* und *„Leistungsmessung“* auch auf diagnostische Fähigkeiten und darauf aufgebautes unterstützendes Handeln.

Auch in den ersten Entwürfen[2] zu Curriculas der Kirchlichen Pädagogischen Hochschule in Wien beschreibt neben den Bereichen *„Wissen und Können“*, *„Unterrichten“*, *„Erziehen“*, *„Forschen und Entwickeln“*, *„Verantwortlich leben“* ein Bereich auch *„Diagnostizieren, Beurteilen und Beraten“* die Kompetenzbereiche der Lehrerinnen- und Lehrerbildung. Speziell werden folgende Kompetenzen genannt:

- *„Lehrerinnen und Lehrer beobachten und erheben regelmäßig Lernvoraussetzungen, den Lernstand und Lernprozesse von Schülerinnen und Schüler. Sie setzen dabei die vielfältigen Möglichkeiten der pädagogischen Diagnostik als Basis für differenzierte Lernangebote ein.“* und
- *„Lehrerinnen und Lehrer fördern Schülerinnen und Schüler auf der Grundlage eines pädagogischen Lern- und Leistungsverständnisses und beraten Lernende und deren Eltern gezielt.“*

Diagnostische Kompetenz ist im schulischen Bereich erforderlich, um einerseits beurteilen zu können, andrerseits um das Kind entsprechend fördern zu können. Lehrpersonen müssen Lernvoraussetzungen feststellen, Lernentwicklungen beurteilen und an die Schülerinnen und Schüler rückmelden. Im Blickpunkt dieser Arbeit stehen die alltäglichen fachdidaktischen Kompetenzen von Lehrpersonen, die sie benötigen, um weiteres pädagogisches Handeln festzulegen. Diese alltäglichen Lernstandserfassungen spielen laut SCHRADER und HELMKE (2001, S. 57) eine wichtige Rolle für die Unterrichtsgestaltung und den Lernerfolg. Sie sollten so vorgenommen werden, dass das Lernen verbessert wird, ohne dass sich Schülerinnen und Schüler einer andauernden Bewertung ausgesetzt fühlen.

Um Schülerinnen und Schüler angemessen fördern zu können, erschöpft sich diagnostische Kompetenz nicht nur darin, Diagnoseinstrumente qualifiziert handhaben zu können. Lehrpersonen müssen laut KRETSCHMANN (2003, S. 9ff.)

- über hinreichende Modelle über Ursachen und Verläufe der Entwicklungsprozesse ihrer Schülerinnen und Schüler verfügen.

[1] http://www.kmk.org/doc/beschl/standards_lehrerbildung.pdf vom 23. März 05 (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 16. Dez. 04)

[2] Arbeitspapier der Curriculumgruppe Ausbildung der zukünftigen Kirchlichen Pädagogischen Hochschule in Wien. Kompetenzen von Lehrerinnen und Lehrern. Stand: 27. Juni 2006

- Instrumente zur Lernstandsermittlung kennen, die ihnen zur Verfügung stehen.
- Instrumente zur Lernstandsermittlung kompetent handhaben.
- wissen, welche Fördermaßnahme auf eine ermittelte Konstellation folgt und
- die Fördermaßnahmen auch ausführen können.

Die der Diagnose folgende Förderung erscheint noch anspruchsvoller. Es gilt, auf Basis des ermittelten Lernstandes entwicklungs- und lernstandsgerecht zu reagieren. Das erfordert Wissen, wie Entwicklungen durch Faktoren des schulischen und außerschulischen Umfeldes beeinflusst werden können. Die Lehrkraft entwirft Organisationsstrukturen, setzt zweckmäßige Maßnahmen mit geeigneten Arbeitsmitteln, um das, was als wichtig erkannt worden ist, nachhaltig umzusetzen.

Im Rahmen dieses Projekts können nur Elemente davon betrachtet werden. Die Studierenden sollen einfache Instrumente zur Lernstandsermittlung kompetent handhaben können, die didaktisch den weiteren Unterricht leiten sollen. Sie sollen sich über das Denken des Kindes informieren können. Unser Projekt spricht gezielt die diagnostische Kompetenz an, die **förder**diagnostische Kompetenz ist nur implizit enthalten.

3 KONZEPT

Unser Konzept von Förderung im Volksschulbereich stützt sich auf Erfahrungen zu offener Arbeit im Klassenverband und auf Erkenntnisse zur Arbeit mit kombinatorischen Aufgabenstellungen. Anschließend wird eine Auswahl an mathematischen Aufgaben, die bei der Förderung leistungsstarker Kinder eingesetzt werden, genauer sachanalytisch und didaktisch erörtert. Im Bereich der Lehrerinnen- und Lehrerbildung stützt sich unser Projekt auf das Konzept der situierten Lernbedingungen und auf Erfahrungen zum mathematischen Gespräch. In diesem Kapitel werden diese Entwürfe kurz vorgestellt, um den theoretischen Rahmen aufzuzeigen. Gesamt kann dies immer nur eine Auswahl sein und erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

3.1 Offenes Arbeiten im Klassenverband

Wenn Lernen von Mathematik auf unterschiedlichen Niveaus stattfinden soll, dann bedarf es Unterrichtsformen, die dies ermöglichen. In der Experimentalklasse 3a werden Freie Lernphasen durchgeführt, die im folgenden Abschnitt als ein mögliches Modell offener Lernsituationen näher beschrieben werden.

3.1.1 Freie Lernphasen als Möglichkeit, den Unterricht zu öffnen

Um den didaktischen Grundsatz *„Individualisieren, Differenzieren und Fördern“* (LEHRPLAN der Volksschule, S. 46) gerecht zu werden, finden in der 3a offene Lernphasen statt. In der österreichischen, speziell in der Wiener Schullandschaft findet sich eine Fülle von Formen offenen Unterrichts. Es gilt, diese von einander abzugrenzen. Das Kind hat überall die Möglichkeit, Entscheidungen zu treffen. Der begriffliche Unterschied liegt nach HAMMERER (1998a, S. 40) im „*Grad der Offenheit*“. Folgende Modelle offener Lernsituationen machen den unterschiedlichen Grad der Offenheit deutlich:

- Lernen mit teilweise festgelegten Aufgabenplänen
  - Lernen an Stationen, Lernzirkel
  - Arbeit mit Wochenplänen
  - Arbeit mit Tagesplänen
- Lernen ohne Aufgabenpläne
  - Freie Lernphase
  - Freiarbeit nach Montessori

Freie Lernphasen, wie sie in der 3a durchgeführt werden, stellen im Gegensatz zur Freiarbeit nicht den Schwerpunkt der Unterrichtsarbeit dar, sondern ergänzen sie für einige Stunden pro Woche. Regelmäßigkeit, eingeführte Regeln und Rituale tragen wesentlich zum Gelingen bei. Eingeführte Arbeitsregeln schaffen den Rahmen einer förderlichen Lernatmosphäre. Die Kinder lernen so sich in eine Sache zu vertiefen und eine Arbeit auch zu beenden.

Im Modell der Freien Lernphase wird dem Kind durch die freie Wahl der Arbeit in einer gestalteten, gut strukturierten und mit didaktischen Lernmaterialien bzw. Materialserien ausgestatteten Lernumgebung nach HAMMERER (1998a, S. 48) ermöglicht,

- eigene Ideen zu entwickeln und zu verwirklichen,
- besondere Interessen zu verfolgen oder aufzubauen,

- einen Arbeitsprozess selbstständig zu planen,
- sich selbst Ziele zu setzen,
- sich einer Sache sinnlich und handelnd anzunähern,
- nach eigenem Rhythmus tätig zu sein, und
- Hilfe anzubieten und Hilfe anzunehmen.

3.1.2 Lernmaterialien als Träger von Lerninhalten

Um in der Freien Lernphase das einzelne Kind seinem Lernstand entsprechend fördern zu können, erscheint es notwendig, Lernmaterialien einzusetzen. Lernmaterialien sind nach HAMMERER (1998b, S. 76) *„Lernmittel mit einer sach- und zielorientierten Struktur“*, wo der einzuprägende Inhalt über ein Material vermittelt wird. In der Tabelle 1 wird der Zusammenhang zwischen Lernmittel und Lernmaterial aufgezeigt.

Lernmittel

.....	Computer-Lernprogramm	Schulbuch	Arbeitsblatt	Lernspiel	**Lernmaterial**

Tabelle 1: Systematik der Lernmittel

Nicht die Lehrperson informiert über den (neuen) Inhalt, sondern das Material ist Träger des Lerninhalts. Materialien bzw. Materialserien sollten so aufbereitet und der Sache entsprechend sequenziert sein, dass eigenständiges Arbeiten möglich ist. Das Material fordert die Schülerin oder den Schüler zum Hantieren auf, indem das Kind Teile davon zusammensetzt, anders anordnet, vergleicht oder verändert. Durch das Betätigen gelingt es, den Inhalt zu verstehen, zu erfassen, zu wiederholen und ihn sich zu merken. Der handelnde Umgang mit dem Material initiiert Lernprozesse.

Lernmaterialien sind unentbehrlich für entdeckendes Lernen, da damit erst die Chance zum selbständigen Probieren, Vermuten und Begründen ohne Angst vor Fehlern möglich ist. Lernmaterialien befreien die Kinder vom Druck des gleichschrittigen Lernens und helfen, mehr Vertrauen in ihre eigenen Fähigkeiten zu setzen.

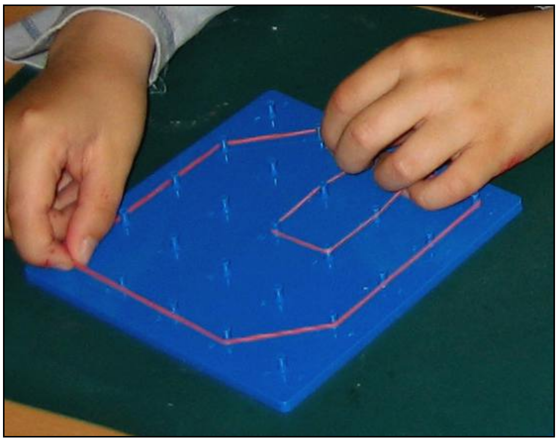


Abbildung 2: GEO-Brett

In unserem Projekt setzen wir bei den kombinatorischen Aufgabenstellungen *„Türme bauen“* Bausteine und bei *„Farbkleckse“* Papierkreise in den entsprechenden Farben ein. Diese Materialien und die Anleitung auf den Karteikarten sollen das Lernen leiten. Im Bereich Geometrie ist das GEO-Brett ein Material, das mit Hilfe des Spannens von Figuren grundlegende Einsichten in zweidimensionale geometrische Figuren, den Flächeninhalt oder den Umfang handelnd ermöglicht. Das Nachspannen von aufgezeichneten oder von anderen Kindern angefertigten Figuren fördert die Wahrnehmung räumlicher Beziehungen. Dies kann unmittelbar nachvollziehend mit Blick auf die Vorlage oder aus dem Gedächtnis erfolgen.

3.2 Aufgaben und Lernmaterialien für mathematisch leistungsstarke Kinder

Die Förderung leistungsstarker Kinder kann vom Curriculum her nicht nur aus einem gelegentlichen Sonderangebot diverser Lerninhalte bestehen, sondern benötigt zusätzliche, von vornherein definierte Inhalte, die modularisiert oder permanent zur Verfügung stehen. Eine programmatische Anreicherung zielt darauf ab, die Wissensbasis von leistungsstarken Kindern zu vergrößern, ihre Perspektiven ganz allgemein zu schärfen und ihnen die Möglichkeit zu geben, selbst festzustellen, welche Formen von neuen Kenntnissen sie entfalten sollen. Diese Inhalte gehen über den Lehrstoff hinaus. Sie sind ein Additum, sie öffnen Ausgangspunkte zu neuen Aktivitäten, um zusätzlich zu lernen und sich zu vertiefen. (TANNENBAUM, 1998, S. 145f.) Um diesem Anspruch gerecht zu werden, setzen wir uns in diesem Schuljahr mit kombinatorischen Aufgabenstellungen auseinander.

Wie im Mathematikunterricht der Volksschule allgemein ist es auch bei diesen erweiterten Inhalten nicht sinnvoll, zuerst, losgelöst von jeglichem Sinnlichen, die benötigten Begriffe und Verfahren einzuführen und dann zu komplexen Anwendungen überzugehen. Stattdessen sollte von Anfang die Realität in Form von kindgemäßen Problemstellungen und Projekten in den Unterricht miteinbezogen werden. Ansprechende, typische und einprägsame Anfangsbegegnungen beeinflussen den Erfolg der programmatischen Anreicherungen erheblich.[3] Die Aufgaben sollen aus der Umwelt der Schülerinnen und Schüler kommen und das einzelne Kind, gegeben durch die Situation, ansprechen.

Aufgaben der Kombinatorik treten in vielen Gebieten der Mathematik und in allen Schwierigkeitsstufen auf. Bei kombinatorischen Aufgaben wird untersucht, auf welche und auf wie viele verschiedene Arten gewisse Mengen von Dingen angeordnet und zu Gruppen zusammengefasst werden können. Für Volksschulkinder sind sie deshalb auch geeignet, weil

- nur natürliche Zahlen angesprochen werden,
- sie auf unterschiedlichem Niveau und
- handlungsorientiert gelöst werden können.

Kombinatorische Aufgabenstellungen sind kein Lehrstoff des Lehrplans der Volksschule, können aber mit dem Wissen von Volksschulkindern bearbeitet werden. Selbst HERBART (1841, S. 167f., zit. nach Neubert, 2003, S. 89) meinte schon, dass *„Zählen, Combinieren, Anschauen, zu den natürlichen Entwicklungen des Geistes gehören, die man durch den Unterricht nicht schaffen, sondern nur beschleunigen soll"*.

[3] Quelle: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ak-stoch/ stellung.html [16. Mai 2006]

Trotz der Herbartschen Aussage zeigt sich dieser Bereich der Mathematik oft problembehaftet. Selbst Erwachsenen fallen strukturell einfache kombinatorische Probleme schwer, weil sie eine andere Art des Herangehens, wie sonst im Mathematikunterricht üblich, erfordern. Es stellt sich die Frage, in welchem Alter und wie kombinatorische Fragestellungen angeboten werden sollen.

Psychologische Erkenntnisse lassen darauf schließen, dass eine frühe Auseinandersetzung elementare Einsichten grundlegen und dadurch bessere Grundvorstellungen möglich sind. Wenn in einem früheren Lebensalter ein altersadäquates Lernen stattfindet und ein tiefes Grundverständnis gewonnen wird, kann nach STERN (2004) anschlussfähiges Wissen konstruiert werden, auf das in höheren Schulstufen zurückgegriffen werden kann. Nach SPITZER[4] steht früh Erlerntes, auch wenn es scheinbar verloren gegangen ist, bei neuerlichem Aufgreifen zur Verfügung.

Die Kombinatorik untersucht, auf welche und auf wie viele verschiedene Arten Elemente einer endlichen Menge ausgewählt und angeordnet werden können. Hierbei wird unterschieden, ob die Reihenfolge der Elemente berücksichtigt wird oder nicht und ob ein Element ein- oder mehrmals ausgewählt werden darf.

Bei Permutationen stellt sich die Frage, wie viele Möglichkeiten es gibt, n verschiedene Dinge der Reihe nach zu ordnen. Bei Kombinationen und Variationen stehen Überlegungen im Vordergrund, wie viele Möglichkeiten es gibt, wenn k Elemente aus n Elementen zusammengestellt werden. Zusammenstellungen von Elementen, bei denen die Reihenfolge irrelevant ist, heißen Kombinationen; solche, bei denen es auf die Reihenfolge der Elemente ankommt, heißen Variationen. Jede Zusammenstellung von $k \leq n$ aus n vorliegenden Dingen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, den Elementen einer gegebenen Menge $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ nennt man eine Auswahl. Grundtypen der Auswahl sind, wie vorher schon erwähnt, Kombinationen und Variationen.

Die Zugangswege zu kombinatorischen Aufgabenstellungen können in verschieden abstrakten Abstufungen erfolgen. Bei den Beispielen

- kann konkret gelegt,
- kann die Aufgabenstellung graphisch dargestellt,
- können die Anfangsbuchstaben nebeneinander aufgeschrieben,
- kann mit Hilfe des Baumdiagramms skizziert oder
- mit Hilfe der Formel berechnet werden.

Die leistungsstarken Kinder der Klasse 3a, die *„Zahlenforschergruppe"*, verwendeten das Legen, die graphische Darstellung und das systematische Aufschreiben.

Bei Erwachsenen erweist sich als Lösungshilfe das Baumdiagramm hilfreich. In der Topologie versteht man unter einem Baum einen Streckenkomplex (Graph, Liniensystem), in dem zwischen zwei Verbindungspunkten immer nur eine Verbindung besteht, also kein „Rundweg" möglich ist. Werden die Elemente einer Menge nach einem solchen Schema geordnet, so erscheinen sie in einer streng gesetzmäßigen Reihenfolge an den Zweigspitzen des Baumes. Das Baumdiagramm kann bei kombinatorischen Aufgabenstellungen für ein systematisches Zählen und

---

[4] Aussage von Manfred SPITZER im Rahmen des Seminars „Gehirnforschung und Lernen. Zur Neurobiologie des Lernens" an der Universität Klagenfurt von 30. März bis 1. April 2006.

gleichzeitig als ikonische Kontrollmöglichkeit für die ermittelte Anzahl der Verzweigungen eingesetzt werden. (SCHULZ, 1991, S. 506f.; SELTER & SPIEGEL, 2004, S. 291f.)

In den folgenden Absätzen werden einzelne Aufgaben angeführt, um Lösungsmöglichkeiten zu zeigen. Als Illustration dienen Beispiele, die den Kindern angeboten wurden. Die Lösungswege sind in verschieden abstrakten Abstufungen angeführt.

Variationen

Variation mit Wiederholung

Beim nachfolgenden Beispiel „*Türme bauen 3*" werden Lösungszugänge zu Variationen mit Wiederholung gezeigt.

	Türme bauen	3
	Du hast rote, blaue, gelbe und grüne Bausteine. Du sollst damit Türme aus 3 Bausteinen bauen. In den Türmen dürfen auch gleiche Farben vorkommen. Wie viele verschiedene Türme kannst du bauen?	
	Baue die Türme. Dann schreibe und zeichne deine Ergebnisse im Forscherheft auf.	

Abbildung 3: Karteikarte einer Variation mit Wiederholung

Aufschreiben der Anfangsbuchstaben	Mathematische Lösung mit Hilfe der Formel
Rororo, Rorobl, Rorogü, Roroge; Roblro, Roblbl, Roblgü, Roblge; Rogüro, Rogübl, Rogügü, Rogüge; Rogero, Rogebl, Rogegü, Rogege; Blroro, Blrobl, Blrogü, Blroge; Blblro, Blblbl, Blblgü, Blblge, Blgüro, Blgübl, Blgügü, Blgüge, Blgero, Blgebl, Blgegü, Blgege; Güroro, Gürobl, Gürogü, Güroge Güblro, Güblbl, Güblgü, Güblge; Gügüro, Gügübl, Gügügüo, Gügüge;, Gügero, Gügebl, Gügegü, Gügege; Geroro, Gerobl, Gerogü, Geroge; Geblro, Geblbl, Geblgü, Geblge;; Gegüro, Gegübl, Gegügü, Gegüge, Gegero, Gegebl, Gegegü, Gegege; Rot: 4 · 4 · 4	Variation mit Wiederholung (n = 4; k = 3): $n^k = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64$

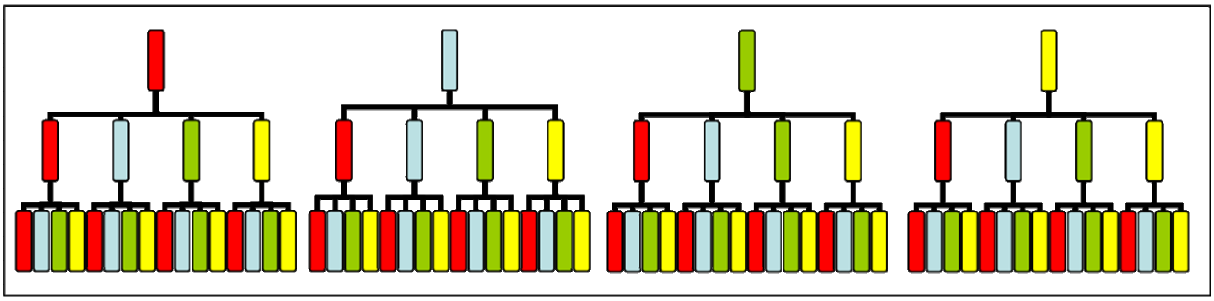


Abbildung 4: Baumdiagramm einer Variation mit Wiederholung

Variation ohne Wiederholung

Beim Beispiel *„Türme bauen 2"* muss auf jeder der drei Entscheidungsstufen aus den 4 möglichen Farben ausgewählt werden.

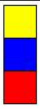
	Türme bauen	2
	Du hast rote, blaue, grüne und gelbe Bausteine. Du sollst damit Türme aus 3 Bausteinen bauen. Jeder Turm soll aus 3 verschiedenen Farben bestehen. Die Farben sollen in unterschiedlicher Reihenfolge vorkommen. Wie viele verschiedene Türme kannst du bauen?	
	Baue die Türme. Dann schreibe und zeichne deine Ergebnisse im Forscherheft auf.	

Abbildung 5: Karteikarte einer Variation ohne Wiederholung

Aufschreiben der Anfangsbuchstaben	Mathematische Lösung
Roblgü; Roblge; Rogübl, Rogüge, Rogebl, Rogegü; Blrogü; Blroge; Blgüro, Blgüge, Blgebl, Blgegü; Güblro; Güblge; Güroübl, Güroge, Gügebl, Gügero; Geblgü; Geblro; Gegübl, Gegüro, Gerobl, Gerogü; Rot: 4 · 3 · 2 · 1	Variation ohne Wiederholung (n = 4; k = 3) $\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 24$

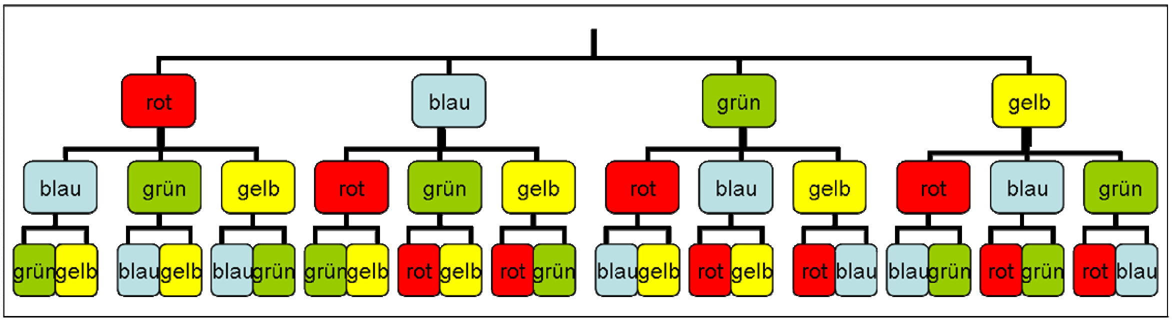


Abbildung 6: Baumdiagramm einer Variation ohne Wiederholung

Kombinationen

Auch hier dienen Beispiele, die den Kindern angeboten wurden, zur Illustration. Die Lösungswege sind in verschieden abstrakten Abstufungen angeführt.

Kombination mit Wiederholung

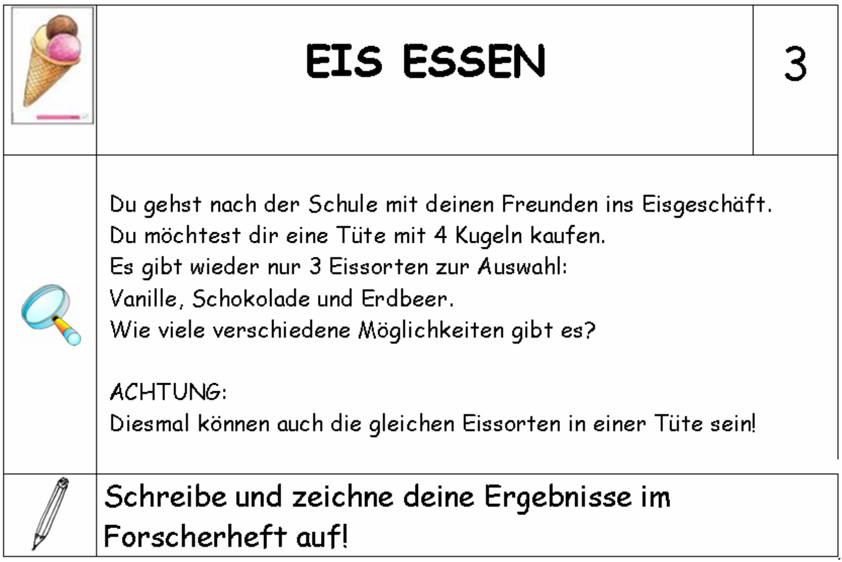
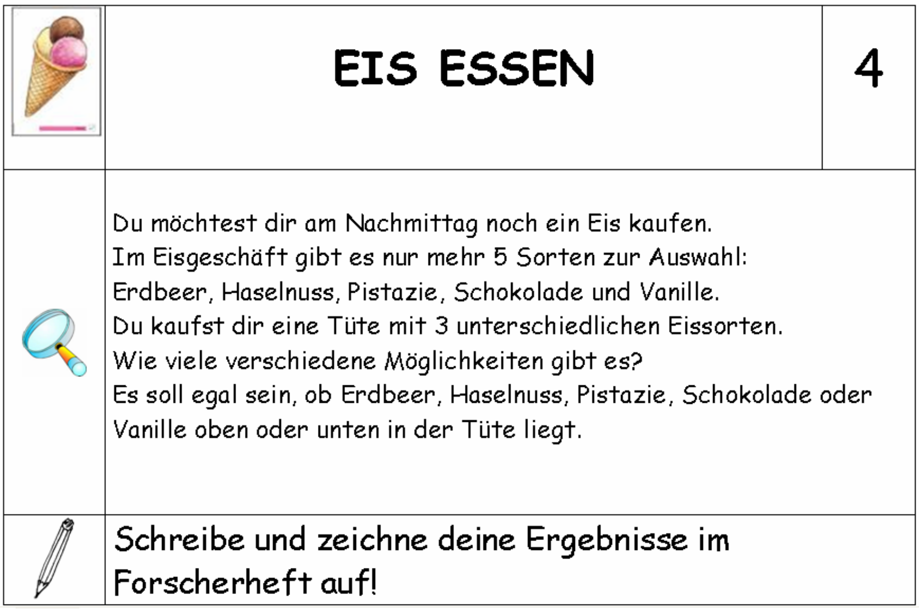


Abbildung 7: Karteikarte einer Kombination mit Wiederholung

Aufschreiben der Möglichkeiten	Mathematische Modellierung
EEEE; EEES; EEEV; EESS; EESV; EEVV; ESSS; ESSV; ESVV; EVVV; SSSS; SSSV; SSVV; SVVV; VVVV 10 Erdbeerkombinationen und 4 Schokokombination und 1 Vanillekombination sind insgesamt 15 Möglichkeiten.	Kombination mit Wiederholung (n = 3; k = 4): $\binom{n+k-1}{k}=\binom{3+4-1}{4}=\binom{6}{4}=15$ $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=\binom{6}{4}=\frac{6!}{4!(6-4)!}=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1}=15$

Kombination ohne Wiederholung

Beim Beispiel „*Eis essen 4*“ wird für jede Gruppe (Erdbeergruppe, Haselnussgruppe, Pistaziengruppe) die Anzahl bestimmt und addiert.



	EIS ESSEN	4
	Du möchtest dir am Nachmittag noch ein Eis kaufen. Im Eisgeschäft gibt es nur mehr 5 Sorten zur Auswahl: Erdbeer, Haselnuss, Pistazie, Schokolade und Vanille. Du kaufst dir eine Tüte mit 3 unterschiedlichen Eissorten. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es? Es soll egal sein, ob Erdbeer, Haselnuss, Pistazie, Schokolade oder Vanille oben oder unten in der Tüte liegt.	
	Schreibe und zeichne deine Ergebnisse im Forscherheft auf!	

Abbildung 8: Karteikarten einer Kombination ohne Wiederholung

Strategie: Aufschreiben der Möglichkeiten	Mathematische Lösung
EHP, EHS, EHV, EPS, EPV, ESV; HPS, HPV, HSV, PSV 6 Erdbeerkombinationen und 3 Haselnusskombinationen und 1 Pistazienkombination sind insgesamt 10 Möglichkeiten.	Kombination ohne Wiederholung (n = 5; k = 3): $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!(5-3)!}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1}=10$ oder $\binom{n}{k}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}=\binom{5}{3}=\frac{5\cdot4\cdot(5-3+1)\cdot}{3!}=\frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}=10$

3.3 Situierte Lernumgebungen

Die Lehrerinnen- und Lehrerbildung ist eine Berufsausbildung und hat daher einen engen Bezug zum Berufsfeld. Vorrangig geht es in dieser Ausbildung, ein im Studium erworbenes Wissen im schulischen Bereich adäquat nutzen zu können. Die Kernfrage lautet daher, wie Lernen gestaltet werden soll, dass das erworbene Wissen auch als zur Verfügung stehendes Wissen in der Schule eingesetzt werden kann. Forschungsergebnisse zeigen, dass nicht selbstverständlich etwas Gewusstes auch als Handlungswissen zur Verfügung steht. Dieses „*träge Wissen*“ (GERSTENMAIER &

MANDL, 2000, S. 11) ist zwar als Wissen vorhanden, um eine bestimmte Aufgabe zu lösen, wird aber in der Anwendungssituation nicht eingesetzt.

Eine Deutung, weshalb *„träges Wissen“* entsteht, bieten die Situiertheitserklärungen. Sie beziehen sich auf die Unterschiede zwischen Lern- und Anwendungssituationen. Wenn die Unterschiede zwischen der Situation des Lernens und der Situation, wo das Wissen eingesetzt werden soll, zu groß sind, dann wird das gelernte Wissen nicht eingesetzt. Dies lässt eine Folgerung für die Ausbildung zu: Soll das erworbene Wissen später eingesetzt werden, so muss die Situation, in der gelernt wird, ähnlich der Situation sein, in der das Wissen umgesetzt werden soll. Solche geschaffenen Lernsituationen werden als „*situierte Lernumgebungen*“ oder „*situiertes Lernen*“ bezeichnet (HARTINGER; MÖRTL-HAFIZOVIC & FÖLLING-ALBERS, 2004, S. 22). Zentraler Punkt aller situierten Lernumgebungen ist das Bemühen um Authentizität. Die Lernsituation soll den realen Bedingungen möglichst nahe kommen. Laut HARTINGER et al. (2004, S. 22) sollen die Lernenden eigenverantwortlich, im Team, Probleme und Lösungen unter verschiedenen Perspektiven betrachten, und es soll genügend Zeit für Reflexions- und Artikulationsphasen geben.

Dabei ist allerdings festzuhalten, dass in der Lehrerinnen- und Lehrerbildung an Pädagogischen Akademien bzw. an zukünftigen Pädagogischen Hochschulen im Bereich der Schulpraktischen Studien die Studierenden die Schulwirklichkeit erleben und authentisches Lernen in der gesamten Komplexität stattfindet. Die Komplexität der gesamten Klassensituation birgt bei Anfängern allerdings die Gefahr, dass es vordergründig nur um einen guten Stundenverlauf und um das „Überleben“ im Klassenraum geht. Der Blick auf das Lernen der Kinder ist in den ersten schulpraktischen Übungen kaum möglich.

Abgesehen von den Schulpraktischen Studien werden in der Lehrerinnen- und Lehrerbildung in den diversen Studienveranstaltungen, auch im Bereich der Didaktik, bestimmte Inhalte theoretisch behandelt. Diese Inhalte werden dann zumeist an praktischen Beispielen illustriert, die ein gewisses Maß an Authentizität bringen. Hier besteht die Gefahr, dass die Situation im Seminar und die Situation im Berufsfeld zu weit auseinander liegen und sich träges Wissen entwickelt.

Wir versuchen einen aktiveren, mehr authentischen Weg, um Wissen zu generieren. Im Projekt besteht die Möglichkeit, sich mit dem Denken eines einzelnen Kindes zu befassen. In der Auseinandersetzung mit einem Kind wird die teilweise belastende Komplexität reduziert, trotzdem ist aber Lernen im Feld möglich. Unser didaktischer Ansatz reduziert die Wirklichkeit.

Dies erweitert das rein theoretische Grundwissen, da es bei diesem Lernen nicht um ein rein reproduzierbares Wissen geht, sondern um ein in der (reduzierten) Praxis angewandtes analytisches Wissen. Analytisches Wissen würde noch nicht den Einsatz in der Auseinandersetzung mit einem Kind rechtfertigen. Dies könnte auch ein Seminararrangement anbieten, bei dem den Studierenden Lösungsprotokolle vorgelegt werden. Wir gehen noch einen Schritt weiter. Wir meinen, dass die Studierenden auch das Fragen nach den Strategien erleben sollten, um in der Schulwirklichkeit diagnostische Kompetenz einsetzen zu können.

Ein letzter Schritt bleibt auch in unseren Überlegungen offen. Die erforderliche förderdiagnostische Kompetenz im komplexen Klassengeschehen zu erlangen und durchzuführen, ist nicht Anspruch unseres Projekts.

3.4 Das mathematische Gespräch

Eine Möglichkeit, die von den Studierenden erwünschte diagnostische Kompetenz zu erlangen, ist das mathematische Gespräch.

Mathematische Gespräche nach SCHULER (2004, S. 162 ff.) verweisen auf eine Haltung der Lehrperson gegenüber dem Denken der Kinder. Im Prinzip können Unterrichtsgespräche mit der gesamten Klasse, Gespräche mit Kleingruppen oder mit einzelnen Kindern den Charakter mathematischer Gespräche übernehmen, wobei sich die Intentionen graduell unterscheiden, die Grundhaltung aber ähnlich ist. Beim Gespräch einer oder eines Studierenden mit einem einzelnen Kind wird es in der Artikulation seines Denkens unterstützt, um den Lösungsweg darzustellen. Mathematische Gespräche dienen der Exploration des kindlichen Denkens und regen Metakognitionen an.

In diesem Zusammenhang sind mathematische Gespräche forschungsmethodisch gesehen eine Form des qualitativen Interviews. Die angestrebte Grundhaltung umfasst, dass die Interviewerin oder der Interviewer als Lernende oder Lernender begreift, das Kind nicht zu belehren - im Sinne von “erklären” - sondern sein Denken verstehen möchte. “Belehrung” findet nur insofern statt, als die Interviewerin oder der Interviewer durch ihre oder seine Fragen und Impulse das Kind zur Reflexion über das eigene Denken anregt und interessante und gehaltvolle Äußerungen aufgreift. Dadurch können auch Lernprozesse in Gang gesetzt werden.

In der Lehrerinnen- und Lehrerbildung sind sie notwendig, um eine Änderung der Gesprächskultur zu initiieren. Die Hinwendung zu einem einzelnen Kind, die Vorgabe der Aufgaben durch die Seminarleiterin und die vorherige Auseinandersetzung mit der Sache ermöglicht einen sehr intimen, angstfreien Zugang. Diese “*mathematischen Erstbegegnungen*”, wie BARDY (1997, S. 206) sie bezeichnet, sind in der Regel frei von dem im Unterricht verbundenen Handlungsdruck. Gleichzeitig verlangt die Planung und Durchführung eines mathematischen Gesprächs eine intensive fachliche und fachdidaktische Auseinandersetzung mit dem jeweiligen Inhalt. Eine Durchdringung des mathematischen Gehalts und das Wissen um Schwierigkeiten und Hürden erleichtert es, Schüleräußerungen zu verstehen und angemessen darauf zu reagieren. Eigene fachliche Unsicherheiten, auch im Bereich der Grundschulmathematik, treten zu Tage und werden angesichts der Ernstsituation als behebungswürdige Unzulänglichkeiten wahrgenommen.

Die Vorteile, wenn eine Lehrperson die aktuellen Lernvoraussetzungen junger Kinder beachtet, hat WARFIELD (2001) in einer Fallstudie verfolgt. Sie beobachtete, wie eine Lehrerin ihre pädagogischen Angebote in Bezug auf das mathematische Wissen junger Kinder (Ziffern, Zahlen, Zählen, Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) anpasste. Die Lehrerin war nämlich, unterstützt durch eine forschungsbasierte Fortbildungsmaßnahme, bemüht, herauszufinden, wo die Kinder gerade standen, um ihre Angebote möglichst genau darauf abstimmen zu können. Auffallend war dabei vor allem, dass der Selbstanspruch, herauszufinden, über welche Vorstellungen die Kinder jeweils schon verfügten, dazu führte, dass sie ihre Instruktionsstrategien veränderte. So wurden die Angebote immer stärker durch eine Mischung aus Forschung bzw. Erkundung und Instruktion bestimmt, was den Kindern half, an ihrer Sache weiter zu arbeiten.

Dies ist auch das implizite Ziel unseres Projekts, dass Lehrerpersonen, die sich mehr auf das Denken der Kinder einlassen, auch einen besser auf das Kind abgestimmten Unterricht durchführen.

4 PROJEKTVERLAUF

4.1 Projektübersicht

4.1.1 Teilnehmende Personen

Wie bereits in der Einleitung beschrieben, vernetzt das Projekt Studienveranstaltungen an der Pädagogischen Akademie mit dem Mathematikunterricht in der Übungsvolksschule. Es nahmen zwei Klassen der Übungsvolksschule am Projekt teil:

Klasse	Schulstufe	Fach	Anzahl der Schülerinnen und Schüler	Anmerkung
3a	**3. Schulstufe**	**Mathematik**	**23**	**Experimentalgruppe; Klassenlehrerin Dr. Karin Gstatter**
3b	**3. Schulstufe**	**Mathematik**	**24**	**Vergleichsgruppe; Klassenlehrerin Prof. Brigitte Wiser**

Folgende Studienveranstaltungen an der Pädagogischen Akademie wurden in das Projekt miteinbezogen:

Gruppe	Fach	Ungefähre Anzahl der Studierenden	Anmerkung
Studierende der Volksschullehrerausbildung	**V-5-DMAÜ Didaktik Mathematik**	**45**	**Studierendengruppe im Wintersemester 2005, betreut durch Mag. Maria Fast**
Studierende der Volksschullehrerausbildung	**V-2-DMAS Didaktik Mathematik**	**45**	**Studierendengruppe im Sommersemester 2006, betreut durch Mag. Maria Fast**
Studierende der Volksschullehrerausbildung aus dem 4. und 6. Semester	**EIWS Interdisziplinäres Wahlpflichtfach**	**14**	**Studierendengruppe im Sommersemester 2006, betreut durch Mag. Maria Fast Dr. Karin Gstatter**

4.1.2 Zeitlicher Ablauf

Anfang Oktober: Erfassen des Lernstandes in der Experimental- und Vergleichsklasse

Anfang Oktober 05 erfassten die Studierenden des 5. Semesters - Studiengang Volksschullehramt sowohl in der Experimental- als auch in der Vergleichsklasse den Lernstand im Bereich der additiven Rechenoperationen im Zahlenraum 100 und auch den im Unterricht noch nicht behandelten Zahlenraum 1000.

Die Studierenden bereiteten sich inhaltlich durch das Lesen der Zeitschriftenartikel

- FRANKE, Marianne & LEHMANN, Nadine (2005). Wozu brauchen wir da noch Unterricht, die Kinder können ja schon alles. In: Grundschulunterricht, 52. Jg., Heft 7 - 8, S. 5 - 10; und

- GRASSMANN, Marianne; MIRWALD, Elke; KLUNTER, Martina & VEIT; Ute (1998). Untersuchungen über Vorkenntnisse und informelle Lösungsstrategien zu zentralen Inhalten des Mathematikunterrichts der Klasse 3 (Teil 2). In: Sache-Wort-Zahl, 26. Jg., Heft 17, S. 44 - 48.

auf die Lernstandserfassung vor.

Im Rahmen einer eineinhalbstündigen Seminarveranstaltung von V-5-DMAÜ fanden eine kurze Vorbesprechung, die Durchführung und eine kurze Nachbesprechung statt. Zu Beginn (ca. 20 Minuten) erhielten die Studierenden im Seminarraum das Blatt *„Zum Rechnen und Denken“* (Anhang 1)und ein Handout mit organisatorischen und inhaltlichen Informationen (Anhang 2). Anschließend gingen die Studierenden in die Übungsvolksschule und jede oder jeder Studierende erfasste den Lernstand von ein oder zwei Schülerinnen oder Schülern. Sie beobachteten das Kind beim Lösen der Aufgaben und fragten nach den Rechenstrategien, wie z. B. „Rechne mir das laut vor!“ Das Seminar schloss mit einer kurzen Reflexion (ca. 15 Minuten) über die durch die Kinder gewonnenen Einsichten.

Die Studierenden hielten in einem Studienauftrag (Anhang 3) die gewonnenen Daten schriftlich fest. Zwei Studierende der Seminargruppe übernahmen die Koordinationsarbeiten und fassten die Ergebnisse zusammen. Das Erfassen des Lernstandes und das Erheben der Lösungsstrategien war Bestandteil der Seminarveranstaltung und wurde in die Leistungsfeststellung und -beurteilung eingebaut.

Dezember bis Mai: Studierende arbeiten mit den leistungsstarken Kindern

In der Studienveranstaltung des Wintersemesters V-5-DMAÜ *„Didaktisch-methodische Handlungsfelder“* wählten einige Studierende im Bereich *„Herstellen von Lernmaterialien und deren Einführung in einer Klasse“* Aufgabenstellungen für leistungsstarke Kinder.

In der Wahlpflichtveranstaltung des Sommersemesters V-4-6-EIWS *„Schau, was ich schon kann!“* wurden die einzelnen Aufgabenstellungen im Seminar erarbeitet und das Durchführen eines Interviews eingehender thematisiert.

Das ausgewählte offene Aufgabengebiet wurde in einem Studierendenteam zu zweit oder zu dritt bearbeitet. Die Mathematikdidaktikerin stellte die Quellen zur Verfügung und zeigte erste Dispositionen zur Umsetzung, die Klassenlehrerin beriet bezüglich Einsatz in der Klasse und die Studierenden erstellten die Karteikarten bzw. Lernmaterialien. Die Karteikarten führten die Studierenden ein. Die Aufgaben lagen in der Klasse auf und wurden von der Klassenlehrerin betreut. Nachdem die Schülerinnen und Schüler die Aufgaben teilweise oder ganz bearbeiteten, erklärten meist zwei Kinder in einem Interview den Studierenden, was sie im Zahlenforscherheft notiert hatten.

Folgende Themengebiete wurden im Wintersemester angeboten:

- *Türme bauen*(Variationen mit/ohne Wiederholung): 2 Studierende des fünften Semesters
- *Mmh, das schmeckt* (Variationen mit/ohne Wiederholung): 1 Studierende des fünften Semesters
- *Farbkleckse* (Variationen mit/ohne Wiederholung): 2 Studierende des fünften Semesters

Folgende Themengebiete wurden im Sommersemester angeboten:

- *Eis essen* (kombinatorische Aufgabenstellungen, Kombinationen mit/ohne Wiederholung): 2 Studierende des vierten Semesters
- *Würfelspiel* (Aufgaben zur Wahrscheinlichkeit) 2 Studierende des vierten Semesters
- *Zeichne Muster* (Lineare und zweidimensionale Muster zum Fortsetzen und Erfinden): 3 Studierende des vierten Semesters
- *GEO-Brett* (Spannen von Figuren; Erfassen des Flächeninhalts): 2 Studierende des vierten Semesters

Bei der Bearbeitung von *„GEO-Brett“* und *„Zeichne Muster“* beobachteten die Studierenden die Kinder gleich im Rahmen der Auseinandersetzung hinsichtlich ihrer Denkstrategien.

Die schriftlichen Anweisungen zu den Ausarbeitungen sind im Anhang 4 und 5 nachzulesen.

Ende Mai: Erfassen des Lernstandes in der Experimental- und Vergleichsklasse

Ende Mai 2006 erfassten die Studierenden des 2. Semesters - Studiengang Volksschullehramt sowohl in der Experimental- und als auch in der Vergleichsklasse den Lernstand im Bereich der additiven Rechenoperationen im Zahlenraum 100 und 1000. Da diese Studierenden in einem niedrigen Semester waren, bedurfte es einer überlegten Vorbereitung. Drei Wochen vor dem Termin der Lernstandserfassung erhielten die Studierenden folgende Literaturhinweise, um sie durchzuarbeiten:

- FRANKE, Marianne (2005). Handout zum Vortrag auf der 39. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik *„Mathematikunterricht zwischen Standards und individuellem Lernen“* in Bielefeld am 1. März 2005.
- MESETH, Verena & SELTER, Christoph (2002). Zu Schülerfehlern bei der nicht-schriftlichen Addition und Subtraktion im Tausenderraum. In: Sache-Wort-Zahl, 30. Jg., Heft 45, S. 51 - 58
- PADBERG, Friedhelm (2005/3). Didaktik der Arithmetik. Heidelberg: Elsevier Spektrum Akademischer Verlag
  V Halbschriftliches Rechnen S. 159 - 202 (ausgenommen Multiplikation und Division)
- RADATZ, Hendrik; SCHIPPER, Wilhelm; DRÖGE, Rotraud & EBELING, Astrid (1998). Handbuch für den Mathematikunterricht 2. Schuljahr. Hannover: Schroedel
  2.2 Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 100 - S. 42 - 47
- SELTER, Christoph (2003). Flexibles Rechnen - Forschungsergebnisse, Leitideen, Unterrichtsbeispiele. In: Sache-Wort-Zahl, 31. Jg., Heft 57, S. 45 - 50

Die Durchführung war dem Wintersemester ähnlich.

Um den Einsatz der offenen Aufgabenkarten zu evaluieren, führten die Studierenden zusätzlich in der Experimentalklasse 3a bei den Zahlenforscher- und GEO-Kindern ein Leitfadeninterview durch. Uns interessierte, an welche Aufgaben sich die Kinder noch erinnern konnten, bzw. welche Aufgaben die Kinder bevorzugten.

Auch im Sommersemester wertete jede oder jeder Studierende ihre bzw. seine Interviews aus und fasste im Rahmen eines Studienauftrages die Ergebnisse zusammen. Die Berichte wurden gesammelt und von anderen Studierenden statistisch erfasst.

Die schriftlichen Anweisungen dazu sind in den Anhängen 6, 7 und 8 nachzulesen.

4.2 Umsetzung des Projekts im Volksschulbereich

4.2.1 Gestaltung der Freien Lernphasen in der Klasse 3a

Offenes Arbeiten wird seit der 1. Schulstufe in der 3a durchgeführt. Mindestens zweimal in der Woche erhalten die Kinder die Möglichkeit, im Rahmen Freier Lernphasen für die Dauer von jeweils einer Stunde an ihren selbst gewählten Aufgaben zu arbeiten. Diese Lernform wird entweder zu Beginn des Tages oder in den Tagesablauf integriert. Dabei können die Kinder aus im Klassenraum aufliegenden und von der Lehrerin eingeführten Lernmaterialien selbstständig auswählen. Die folgende Aufzählung von Materialien erschließt diverse Inhalte folgender Unterrichtsgegenstände:

Sachunterricht: Themenschachteln; Wien-Puzzle; Spiele zu den Monaten; Uhr; Kalender; *Paletti* (Kind und Natur, Kind und Mitwelt).

Deutsch/Lesen: Rechtschreibladen; ABC-Puzzle; Leseübungen; Würfel und Drehscheiben zum Satzbau; CD-Rom zum Lehrbuch Deutsch 3, öbv & hpt; LÜK-Materialien.

Mathematik: Einmaleins-Schachteln; Spiele zum Einmaleins; Schablo und Pyramiden von Spectra; LÜK-Materialien (u. a. Denkspiele, Intelligenztraining), LÜK-Lernschlüssel; Little Professor; Puzzles; Lotto; Stöpselkarten mit Selbstkontrolle; Lernprogramm zur Förderung der Raumvorstellung [www.mathematikus.de]; Karteikarten zur Geometrie 3./4. Schulstufe aus der Reihe *Lumatrix,* Schroedel Verlag; *Die Denkschule 1./ 2. Schuljahr*, Klett-Verlag; Karteikarten mit den Aufgabenformaten.

Lebende Fremdsprache Englisch: LÜK-Materialien, Programm (CD-ROM) *Kids 1 - 4,* öbv & hpt.

Der Ablauf der Freien Lernphase in der 3a gliedert sich nach den von HAMMERER (1998a, S. 49f.) vorgeschlagenen Phasen

- *Wahl der Arbeit*
- *Selbstständige Ausführung der Arbeit*
- *Phase der Entspannung /Übung der Stille und*
- *Reflexion der selbst verantworteten Arbeit.*

Ende September 2005 erhielten alle Kinder der 3a ein Tagebuch, wo sie in offenen Lernsituationen ihre Arbeit dokumentieren. Die Aufzeichnungen im Tagebuch helfen den Kindern bei der *Wahl der Arbeit*. So können sie sich leichter zu Beginn der Freien Lernphase orientieren, ob sie das vorherige Mal eine Arbeit begonnen und noch nicht fertig gestellt haben. Kinder, die sich bei der Wahl der Arbeit nicht entscheiden können, erhalten von der Lehrerin Hilfe. In der *Phase der selbständigen Arbeit* gehen die Kinder gerne in Teams zusammen und nützen auch den Gangbereich vor der Klasse. Das Ende dieser Phase erkennen die Kinder, wenn sie an der Tafel die Symbolkarte für *„Stille“* erblicken. Die Lerntätigkeit wird zu einem Ende geführt, das Material wird an den Platz gebracht und die Arbeit wird im Tagebuch festgehalten. Die Kinder sammeln sich in dieser *Phase der Entspannung* innerlich. Phantasiereisen, Atemübungen oder andere beruhigende Aktivitäten schaffen eine entspannte Atmosphäre. Anschließend holt jeweils ein Kind ein anderes leise in den Gesprächskreis. Nun erhalten die Kinder die Möglichkeit, über ihre unterschiedlichen Lernaktivitäten und Ergebnisse zu berichten. In dieser Phase der *Reflexion* präsentiert jedes Kind kurz seine geleistete Arbeit. Dabei werden gelungene Dinge, aber auch entstandene Schwierigkeiten angesprochen. Die Selbstbewertung steigert das Selbstbewusstsein. Darüber hinaus werden auch andere Kinder motiviert, eine Aufgabe auszuprobieren.

4.2.2 Bearbeiten von mathematischen Aufgaben

Zahlenforscherkinder

Sechs Buben (Severin, Fabian, Lukas, Magnus, Sebastian D. und Tobias) und ein Mädchen (Verena) bearbeiteten bereits auf der zweiten Schulstufe im Schuljahr 2004/05 die besonderen Aufgabenformate. Gegen Ende des Schuljahres stießen noch zwei Mädchen (Lisa und Nadine) dazu. Auf Grund einer Übersiedlung verließ Magnus mit Ende der 2. Schulstufe die Schule, so dass im heurigen Schuljahr fünf Buben und drei Mädchen an den Aufgabenformaten arbeiteten. Nadine verließ ebenfalls auf Grund einer Übersiedlung im Februar 2006 die Schule. Im zweiten Halbjahr arbeiteten daher fünf Buben und zwei Mädchen mit dem Zahlenforscherheft.

Im Zahlenforscherheft notierten die Kinder speziell die Aufgaben, die für dieses Projekt ausgearbeitet worden waren. Das Heft konnten sie auch, wie auch alle anderen zur Verfügung stehenden Materialien, jederzeit in der Freien Lernphase heranziehen. Aber nicht nur da, sondern auch in Übungsphasen, wo manche Mitschülerinnen und Mitschüler noch den Stoff durchdrangen, arbeiteten die Zahlenforscherkinder mit den Karteikarten in den Heften. Sie nahmen dieses Angebot sehr gerne in Anspruch, da sie die im Klassenverband angebotenen mathematischen Inhalte rasch auffassen, verstehen und umsetzen können und sich in Übungsphasen leicht langweilen.

Mitte September setzten die oben genannten Kinder ihre in der zweiten Schulstufe begonnene Arbeit in den Zahlenforscherheften fort. Das Interesse für die Aufgabenformate aus dem vergangenen Schuljahr flachte immer mehr ab. Die Kinder griffen in der Freien Lernphase eher zu anderen Materialien. Erst Mitte Dezember, als mit einer Studierenden in einer Pause ein neues Aufgabenformat besprochen wurde, bekam Lukas etwas von dem Gespräch mit und äußerte sich dazu: *„Super, wir bekommen wieder neue Karteikarten.“*

Nach den Weihnachtsferien führten die Studierenden die neuen Aufgabenformate zur Kombinatorik ein. Lisa, Lukas, Nadine, Severin und Verena begannen mit dem Aufgabenformat *„Türme bauen“*. Fabian, Sebastian D. und Tobias fingen mit dem Aufgabenformat *„Farbkleckse“* an und experimentierten handelnd.

Ende Januar wurde noch ein weiteres Aufgabenformat zur Kombinatorik eingeführt. Es trug den Titel *„Mmh, das schmeckt!“*. Dabei ging es um die Zusammenstellungsmöglichkeiten eines Menüs. Die Aufgabenstellung mit der Speisekarte schien die Kinder sehr zu interessieren. Fabian, Sebastian D. und Tobias gingen hier die Sache schon systematischer an als bei den Farbklecksen.

Ende März wurde von den Studierenden im Rahmen des interdisziplinären Wahlpflichtfaches noch ein Aufgabenformat zur Kombinatorik (Eis essen) und eines zur Wahrscheinlichkeit (Würfelspiel) eingeführt. Lisa, Lukas und Verena arbeiteten im Team zusammen.

Geometrische Aufgabenstellungen

Mitte November wurden den Kindern im Rahmen der Freien Lernphase zwei Lernmaterialien für die Geometrie vorgestellt. Nadine und Verena arbeiteten mit *„Schauen und Bauen – Geometrische Spiele mit Quadern"*. Dies wurde allerdings nur einmal verwendet und später nicht mehr.

Das Lernmaterial *„Geometrie 3./ 4. Schulstufe"* aus der Reihe *Lumatrix* wurde hingegen von den Kindern sehr angenommen. Es umfasst unter anderem Karteikarten zu den Themen *Bauen*, *Legen von Figuren*, *Falten*, *Muster zeichnen* und *Figuren spannen*. Severin beschäftigte sich mit dem *Legen von Figuren*, Stefan (er gehört nicht zu den Kindern, die im Zahlenforscherheft arbeiten) und Lukas setzten sich mit dem Spannen von Figuren auseinander.

Abbildung 9: Arbeit mit dem GEO-Brett

Mitte Jänner wurde Maximilian, er arbeitet auch nicht mit dem Zahlenforscherheft, von Stefan zum Spannen von Figuren am Geobrett angeregt. Die beiden Buben arbeiteten über längere Zeit zu zweit mit dem Lernmaterial.

Ende Jänner begannen auch Mädchen sich mit geometrischen Inhalten zu beschäftigen. Tatjana, sie arbeitet nicht mit dem Zahlenforscherheft, und Verena begannen mit dem *Legen von Figuren* und arbeiteten dann intensiv am Musterzeichnen.

Abbildung 10: Muster zeichnen

Regina und Valerie, die beide nicht mit dem Zahlenforscherheft arbeiten, sahen das Figurenspannen bei Maximilian und Stefan. In weiterer Folge arbeiteten fast alle Kinder der Klasse (außer Florian, Sebastian D. und Tobias) mit den Karteikarten zur Geometrie. Während sich beim GEO-Brett und beim Legen mit geometrischen Formen auch Buben mit der Sache auseinandersetzten, fanden die Mädchen den Zugang zur Geometrie vor allem über das Musterzeichnen. Sie beschäftigten sich meist zu zweit mit vorgegebenen Mustern, die nachzuzeichnen waren, bevor sie eigene Muster erfanden. *„Zeichne Muster“* wählten nur Mädchen, damit beschäftigte sich kein einziger Bub.

Die Denkschule

Anfang Februar wurde das Lernmaterial *„Die Denkschule 1./ 2. Schuljahr“* vom Klett-Verlag in der Freien Lernphase eingeführt. Dieses Lernmaterial nahmen ausschließlich vier Buben, die im Zahlenforscherheft arbeiten, an. Während Sebastian D. und Tobias ausschließlich mit den Denkspielen arbeiteten, beschäftigten sich Fabian und Severin auch noch weiterhin mit geometrischen Inhalten.

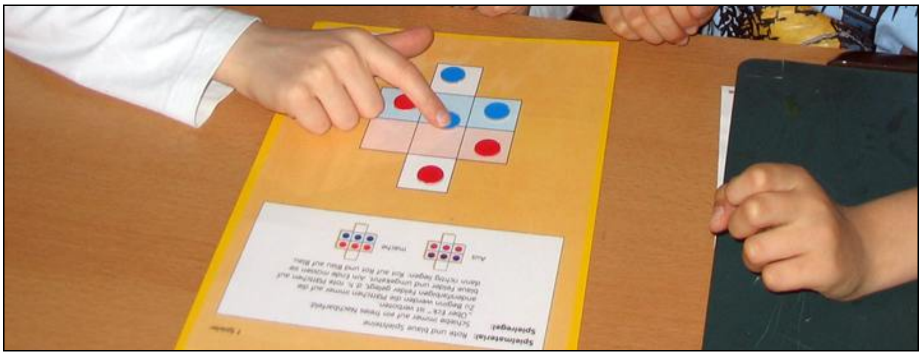


Abbildung 11: Strategiespiel

Besuch im math.space

Mitte Januar nahmen alle Kinder dieser Klasse an der Veranstaltung *„Vom kleinsten Punkt zur größten Nummer“* im *math.space* im Wiener Museumsquartier teil. Dabei erlebten sie die Geschichte des italienischen Mathematikers Fibonacci und die nach ihm benannten Zahlenfolge.

Abbildung 12: math space

Beim Lösen des Hasenpuzzles, beim Bauen des Baumes und beim Entdecken des Zauberweges waren die Kinder mit Begeisterung bei der Sache.

Von den Veranstaltungsleitern gab es die Rückmeldung, dass man bei dieser Klasse merke, dass das Problem lösende Denken und nicht nur das Rechnen als ein zentrales Anliegen des Mathematikunterrichtes gesehen wird.

Känguru der Mathematik

Am 16. März 2006 nahmen alle Kinder der Grundstufe 2 (3. und 4. Schulstufe) der Übungsvolksschule am Wettbewerb *Känguru der Mathematik* teil. Die Kinder der Experimentalklasse hatten im Rahmen von Freien Lernphasen vorher die Möglichkeit, sich mit den Aufgaben aus dem Jahr 2005 auseinanderzusetzen.

In der internen Reihung der beiden dritten Klassen nahm ein Zahlenforscherkind den ersten und ein Zahlenforscherkind den dritten Platz ein. Ein Zahlenforscherkind belegte in der Wertung den 41. von 44 Plätzen. Dies verwundert, da dieses “Ausreißer”-Kind im Klassenverband gute Leistungen zeigte, indem es eigene Ideen einbrachte und sehr offen für Neues war. Der Känguru-Test dagegen beinhaltet nur geschlossene Aufgaben mit eindeutigen Ergebnissen. Dieses Kind konnte offensichtlich mit solchen Anforderungen nicht so gut umgehen. Seine Stärken im Erfinden von Aufgaben und Entwickeln von Lösungsstrategien wurden hier nicht sichtbar.

4.3 Offene Aufgaben für die Zahlenforscherkinder

Die anschließenden fünf Beispiele zeigen, wie die Studierenden mit den Kindern gearbeitet haben.

4.3.1 “Wir haben einfach gebaut, dann umgedreht und dann andere gebaut”

Die erste Aufgabenstellung, welche die Kinder bearbeiteten, war „*Türme bauen*“. Das nachfolgende Beispiel zeigt eine Variation.

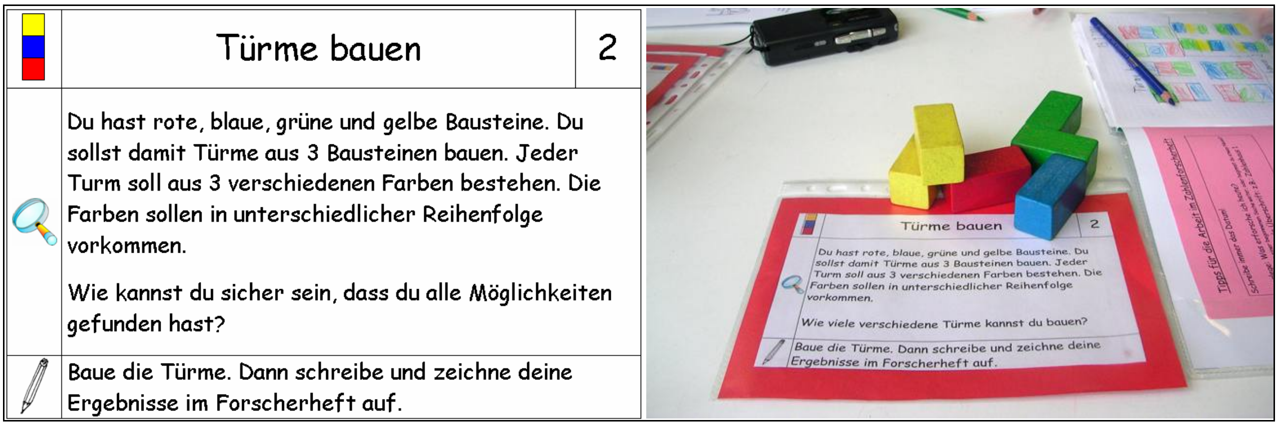


Abbildung 13: Türme bauen 1

Die Kinder nahmen begeistert die Aufgaben an und zeichneten die Lösungsmöglichkeiten in ihr Zahlenforscherheft. Die beigefügten Bausteine nahmen sie bei der Lösung nicht zu Hilfe.

Die Studierenden waren vorerst ein bisschen enttäuscht, denn „*eigentlich dachten wir, dass die Schülerinnen und Schüler nach einer gewissen Systematik vorgehen.*

Doch als wir das Forscherheft, indem sie gearbeitet hatten sahen, erkannten wir, dass die Schülerinnen und Schüler durch bloßes Herumprobieren zu den Ergebnissen kamen.“

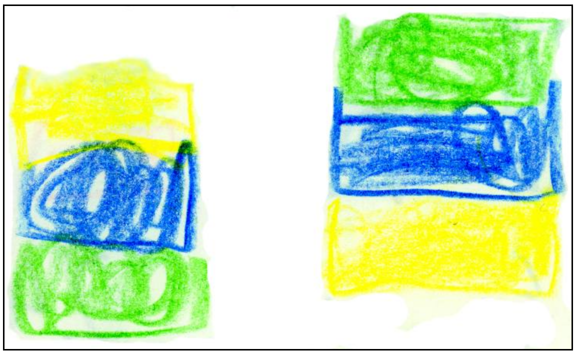


Abbildung 14: Türme bauen 2

Im Interview gaben die Kinder an, dass sie „*einfach gebaut, dann umgedreht und dann andere gebaut*“ hatten. Sie nahmen einen mittleren Stein, wie z. B. den blauen, nahmen zwei andere Farben, wie in diesem Beispiel gelb und blau, wechselten dann den unteren und den oberen Stein aus.

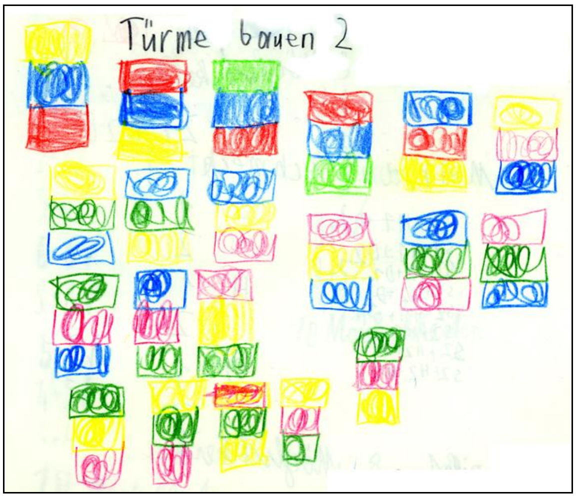


Abbildung 15: Türme bauen 3

Die Abbildung 15 zeigt viele solcher Beispiele. Die Kinder hatten eine Systematik, die aufwändig, aber trotz allem überlegt war. Sie gingen vom mittleren Stein aus und tauschten dann den oberen und unteren Stein aus.

Beim „*Türme bauen*“ blieb es bei den Zeichen- und Abzählstrategien. Die Kinder zeichneten auf und zählten dann ab.

Da den Studierenden, wie bereits vorher angeführt, dieses Vorgehen zuwenig mathematisch war, erfragten sie im Verlauf des Interviews nicht nur das Vorgehen der Kinder, sondern boten den Kindern ein systematisches, rationelleres Vorgehen an. Die Kinder verstanden auch das vorgeschlagene System der Studierenden. Trotz all der gut gemeinten Ratschläge arbeiteten die Kinder mit ihrem System weiter, dies erschien ihnen sicherer.

4.3.2 „Und dann […] haben wir die Kleckse über alle Tische verteilt“

Die zweite Aufgabenstellung, welche die Kinder bearbeiteten, war zum Thema *„Farbkleckse“*. Es handelte sich um Variationen ohne und mit Wiederholung. Zur Lösung der Aufgabe wurden färbige Papier-Punkte bereitgestellt, die aufforderten, das Beispiel handelnd zu lösen. Die Kinder verwendeten die beigefügten Kreisscheiben und legten diese bei der Lösungsfindung auf. Sie notierten im Heft nur die Ergebnisse. Somit ist es schwieriger, den Lösungsweg nachzuvollziehen.

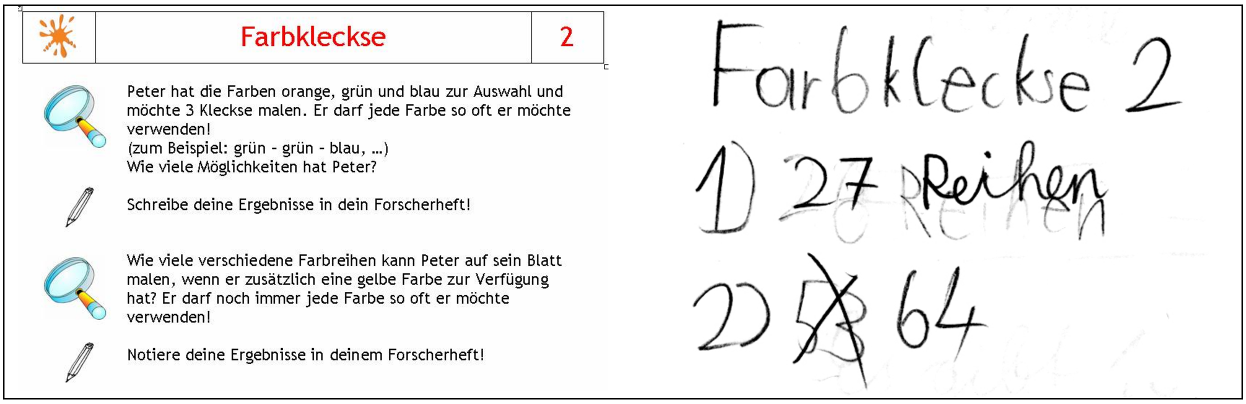


Abbildung 16: Farbkleckse

Beim Auflegen des Materials gingen die Kinder vordergründig wenig strukturiert vor. Die Gruppe suchte nach neuen Anordnungen und verglich mit den bereits vorhandenen. Ein gedankliches System ist nicht zu erkennen.

Der folgende Interviewausschnitt zeigt das Vorgehen der Kinder.

Studierende	*Und wie bist du auf das Ergebnis gekommen? Was hast du gemacht?*
K	*Da habe ich kein System gehabt. Ich habe eine genommen und vertauscht.(..) / Wir haben sechs liegen gelassen / (..) und einfach dazu gelegt.*
Studierende	*Hast du nicht gerechnet?*
K	*Nein.*
Studierende	*Warum hast du dazugelegt?*
K	*Gute Frage (…) weil das zu viel Arbeit ist, das alles wieder aufzubauen.*
Studierende	*Das ist aber nicht ganz richtig.*
K	*Wieso, was kommt raus?*
Studierende	*64*
K	*\achso*

Im Gespräch ist zu erkennen, dass das Kind zwar systematisiert, aber nicht stringent bis ans Ende gedacht, legte. Die Strategien, wie gelegt wurde, können aus dem Interview nicht heraus gelesen werden, weil zu enge Fragen gestellt wurden.

4.3.3 "… schade, dass es keinen Kaiserschmarren gibt!"

Die dritte Aufgabenstellung, welche die Kinder bearbeiteten, ist zum Thema *„Mmh, das schmeckt!"* Dies waren wieder Variationen, wo nicht wie üblich (wie z. B. bei den Türmen), immer gleich viele *n* Möglichkeiten vorhanden waren, sondern *n* von Stufe zu Stufe eine verschiedene Anzahl sein konnte. Auf jeder Stufe des Entscheidungsprozesses konnte aus einer unterschiedlichen Anzahl ausgewählt werden. (1. Stufe: Vorspeise (z. B. 2 verschiedene); 2. Stufe: Hauptspeise (z. B. 4 verschiedene); 3. Stufe: Nachspeise (z. B. 3 verschiedene). Bei der ersten und zweiten Karte wurden allerdings Beispiele ausgewählt, wo bei den drei Gängen die gleiche Anzahl von Elementen war.

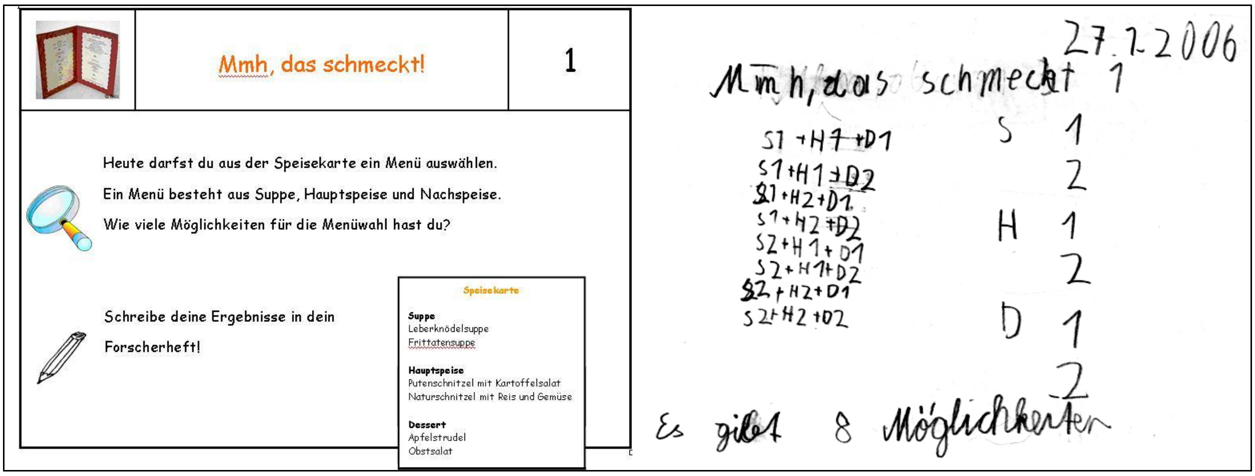


Abbildung 17: Mmh, das schmeckt!

Severin schrieb die einzelnen Variationen an. Er kam durch Aufschreiben aller Variationen zum richtigen Ergebnis. Manche Kinder machten nur Punkte und überlegten. Der nachfolgende Interview-Ausschnitt zeigt die Überlegungen der Kinder. Dokumentiert wurde die erste Situation, wo die Kinder nicht mehr zählten, sondern rechneten.

Studierende *Auf welches Ergebnis kommst du, wenn du 3 Suppen, Hauptspeisen und Nachspeisen hast?*

K1 *Auf **27** Möglichkeiten!*

K3 ***N ö ö ö** auf 16.*

K4 *Hab ich auch.*

K2 *Nein **27**.*

Studierende *Wir hören uns alle Lösungen einzeln an:*

K2 *27*

K3 *16*

K5 *27*

K4 *auch 16*

Studierende *Gut, dann überlegen wir jetzt gemeinsam, was richtig ist?*

K1 */ Ach, schau mal her / **(..)**, 3 mal 3 ist **n e u n** und dann **n e u n** mal 3 ist 27.*

K2 *Es war Suppe, Hauptspeise und Dessert. Also, drei **(..)** und es waren von jedem drei Möglichkeiten. **(.)** drei mal drei ist neun. Und noch mal mal drei ist **(...)** 27.*

Dieser Interviewausschnitt zeigt eine Argumentationssituation bei Kindern. Bedingt durch die verschiedenen Ergebnisse wurden die Kinder herausgefordert, zu argumentieren. K1 und K2 argumentierten implizit mit der Produktregel[5].

[5] Durchläuft man einen *k-stufigen* Entscheidungsprozess, in dem man auf der 1. Stufe n_1 , auf der 2. Stufe n_2, auf der dritten Stufe n_3 Möglichkeiten, … und schließlich auf der k-ten Stufe n_k Möglichkeiten hat, so ergeben sich $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_k$ Möglichkeiten, den gesamten Entscheidungsprozess zu durchlaufen (Spiegel & Selter, 2004, S. 292).

4.3.4 „Auch für uns war es nicht einfach, die Aufgaben zu lösen“

Im März wurde die Aufgabenserie *„Eis essen“* angeboten. Beim *„Eis essen“* ist es nicht relevant, an welcher Stelle Erdbeer, Vanille oder Schokolade liegt, daher ist es eine Aufgabenstellung zu Kombinationen.

EIS ESSEN 1

Du möchtest dir am Nachmittag noch ein Eis kaufen.
Im Eisgeschäft gibt es leider nur mehr 3 Sorten zur Auswahl: Schokolade, Erdbeer und Vanille.
Du kaufst dir eine Tüte mit 2 unterschiedlichen Eissorten.
Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es?
Es soll egal sein, ob Schokolade, Vanille oder Erdbeer oben oder unten in der Tüte liegt.

Schreibe und zeichne deine Ergebnisse im Forscherheft auf!

Abbildung 18: Eis essen

Erstaunlich ist, dass die Kinder, von den vor zwei Monaten durchgeführten Variationen beeinflusst, im Denken der Variationen verhaftet waren. Auf der Abbildung 18 ist zu sehen, wie ein Kind eine Variation ohne Wiederholung aufgezeichnet hat.

Auch im Interview argumentierten die Kinder eine Variation ohne Wiederholung. Die Studierenden blieben im Laufe des Interviews und (leider) auch bei den folgenden anspruchsvolleren Beispielen zu offen. Sie stellten selbst fest, dass es auch für sie nicht ganz einfach war, die Aufgaben zu lösen. Somit muss leider abgeleitet werden, dass zwar Variationen von den Kindern gut modelliert werden konnten, die Kombinationen aber nicht richtig verstanden wurden.

Dies zeigt die Grenzen des Einsatzes: In diesem Projekt gab es eine permanente Evaluation der Denk- und Lösungswege der Kinder durch die Studierenden. Aufgaben zur Kombinatorik erfordern andere Strategien als im üblichen Gefüge des Mathematikunterrichts. Der Einsatz anderer bzw. unbekannter Strategien ist von den Kindern kaum allein zu leisten. Um solche Aufgabenstellungen mit leistungsstarken Kindern durchzuführen, bedarf es einer Betreuung durch eine fachkundige Person.

4.3.5 „Wir haben gewürfelt und gewürfelt …“

Das Beispiel zur Wahrscheinlichkeit kam bei den Kindern recht gut an. Sie konnten würfeln und führten dies auch teilweise durch.

Spannend stellte sich die Frage, ob die Kinder das angebotene Aufgabenformat *„Würfelspiel“* durch Würfeln lösen würden oder ob sie die Lösung durch Nachdenken fänden. Es zeigten sich deutliche Unterschiede bei den zwei Gruppen, die das Aufgabenformat bearbeiteten. Fabian, Sebastian D. und Severin notierten alle möglichen Würfelergebnisse und ordneten sie der entsprechenden Würfelsumme für einen Sieg zu. Sie näherten sich der Lösung mittels Strategie. Lisa, Lukas und Verena würfelten mit zwei Spielwürfeln und ordneten das gewürfelte Ergebnis zu. Sie versuchten, die Lösung durch Probieren zu finden. In Abbildung 19 schrieb eines der Kinder, dass sie durch Würfeln zum Ergebnis kamen.

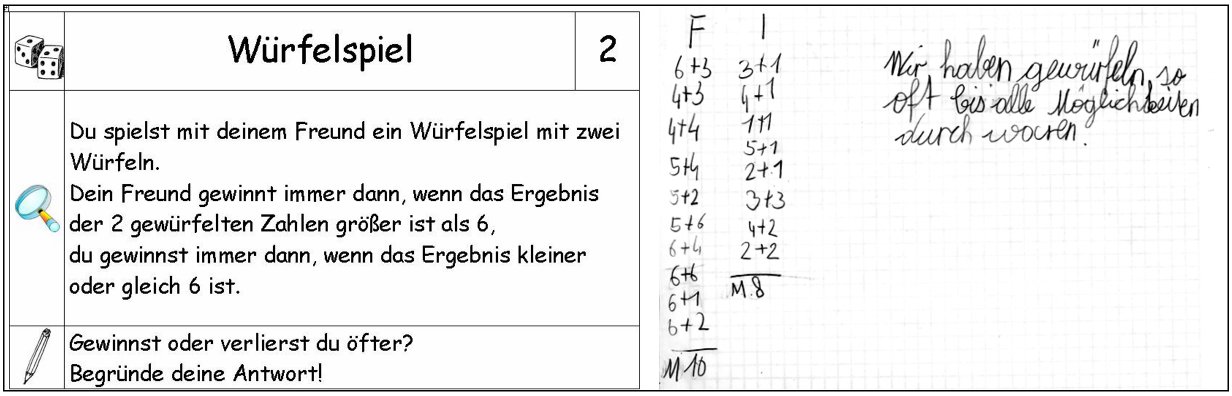


Abbildung 19: Würfelspiel

Zur ganz richtigen Zahl der Möglichkeiten kamen die Kinder deshalb nicht, weil sie nicht die Variation von zwei Würfelzahlen beachteten. Sie nahmen das Zahlenpaar nur einmal, nicht zweimal auf, wie z. B. 2 und 4, aber nicht 4 und 2. Anscheinend wirkte bei der Bearbeitung dieser Themenstellung noch das *„Eis essen“*, das Kombinationen thematisiert, nach.

4.3.6 Beliebtheit und Nachhaltigkeit der offenen Aufgaben

Ziel des Projekts ist eine inhaltliche Öffnung des Mathematikunterrichts, damit sich die Schülerinnen und Schüler ihrem Lernstand gemäß einbringen können. In der Freien Lernphase, wie sie in der 3a durchgeführt wird, bestimmen die Kinder selbst, was sie und mit wem sie lernen.

Von Interesse ist daher, welche Aufgaben den Kindern besonders im Gedächtnis geblieben sind. Sind das diejenigen, die mathematisch anspruchsvoll sind oder sind es diejenigen, die von der Sachsituation besonders ansprechend sind? Im Rahmen der Lernstanderfassung Ende Mai führten die Studierenden ein Leitfadeninterview durch.

Folgende Fragen stellten die Studierenden an die sieben Kinder, die mit dem Zahlenforscherheft arbeiten:

- Du arbeitest bereits das zweite Jahr im Zahlenforscherheft. An welche Aufgaben kannst du dich erinnern?
    - heuer (3. Schulstufe)
    - im Vorjahr (2. Schulstufe)
- Welche Aufgaben haben dir am besten gefallen?

Die Aufgaben *„Eis essen“*, *„Mmh das schmeckt“* und *„Türme bauen“* aus der dritten Schulstufe blieben den meisten Zahlenforscherkindern im Gedächtnis. Deutlich weniger präsent hingegen waren Aufgaben der zweiten Schulstufe, nur vier von sieben Kindern konnten sich überhaupt an eine Aufgabe erinnern, nämlich an *„Musterland“* und *„Die Mauer der Zahlenburg“*.

Auf die Frage *„Was hat dir am besten gefallen?“* antworteten die Kinder mit Themen aus beiden Schulstufen, nämlich *„Türme bauen“*, *„Die Mauer der Zahlenburg“*, *„Das Würfelspiel“* und *„Eis essen“*. Ganz gleich, welche Aufgabe schlussendlich die beliebteste ist, eines ist für die Zahlenforscherkinder klar, die Arbeit im Zahlenforscherheft macht Spaß, denn sie ist *„spannend“* und eine Herausforderung - *„man musste über-*

legen". Motivierend ist für die Kinder vor allem auch, dass man selbstständig (ohne Lehrperson) und mit anderen zusammenarbeiten kann.

Gesamt erinnerten sich die Kinder eher an die ansprechende Sachsituation, die mathematische Seite sollte jedoch dann für sie herausfordernd sein.

Nicht nur die Zahlenforscherkinder, auch sechs Kinder, die vorrangig mit dem GEO-Programm arbeiteten, wurden befragt.

- Sag' einmal, du hast mit der Geometrie-Schachtel gearbeitet, was hast du / habt ihr da genau gemacht?
- Hast du auch eine Lösung gefunden? Hast du dich beim Lösen der Aufgabe beteiligt?
- Offene Frage

Von sechs befragten Kindern nannten fünf den Bereich *„GEO-Brett"*, den sie meist zu zweit oder in Gruppenarbeit bearbeiteten. Ein Mädchen nannte den Bereich *„Zeichne Muster"*, sie arbeitete mit einer Partnerin. Laut Auskunft der Kinder fanden bis auf ein Kind alle Beteiligten entweder alleine oder zusammen mit einer Mitschülerin oder einem Mitschüler eine Lösung.

Laut Aussage eines Mädchens, – *„Ja, weil es war lustig und das könnten wir auch mal wieder einmal machen."* – arbeiteten die Kinder gerne mit den geometrischen Aufgabenstellungen. Bei der Befragung fällt auf, dass auch mathematische Begriffe bzw. Symbole in den Sprachgebrauch übernommen wurden. So beschreibt ein Mädchen: *„Ich habe Figuren gespannt auf einer Platte, mit einem Gummi* ***von A bis B****."*

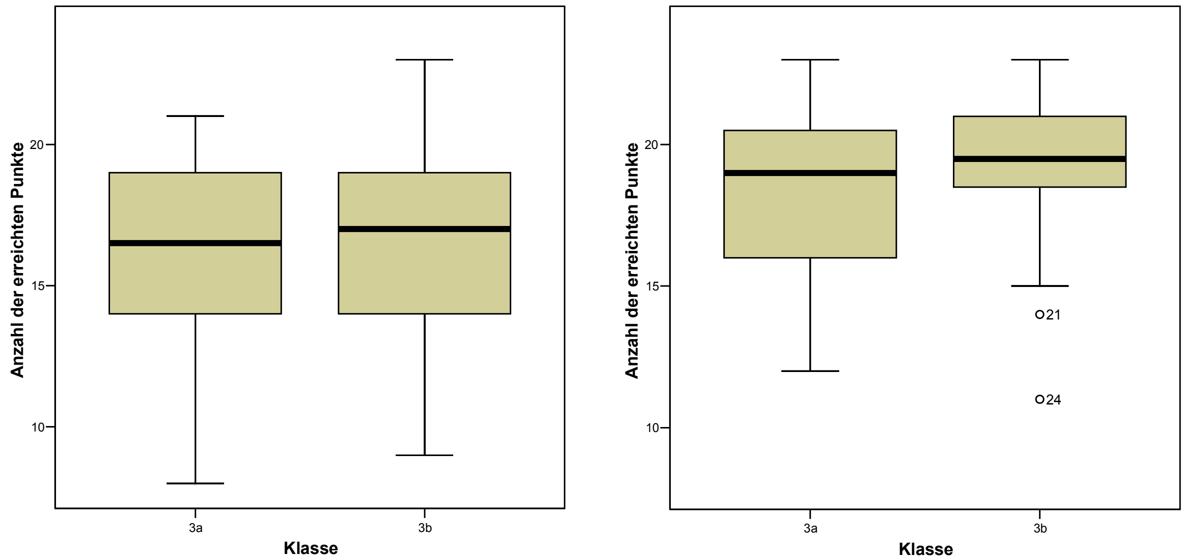
4.4 Entwicklung des Leistungsstandes der beiden Klassen

Unser Projekt setzt sich speziell mit der Förderung leistungsstarker Kinder auseinander. Um abzudecken, dass trotz der Durchführung des Projekts alle Kinder ihren individuellen Voraussetzungen und Anlagen gemäß gefördert werden, erheben wir den Lernstand aller Kinder zu Beginn und am Ende des Schuljahres. Die Lernstandserfassung soll zeigen, dass trotz der Fokussierung des Projekts auf einige wenige die geforderten Lernziele von allen erreicht werden.

Wir stellen nicht den Anspruch, den Lernfortschritt des gesamten Mathematikunterrichts evaluieren zu können, sondern betrachten den Bereich der additiven Rechenoperationen. Wir stellen zehn Aufgaben im Zahlenraum 100 und zehn Aufgaben im Zahlenraum 1000. Wir ziehen keinen normierten Test heran, sondern additive Aufgaben, die den Untersuchungen nach Lösungsstrategien von FRANKE und LEHMANN, 2005; GRASSMANN, MIRWALD, KLUNTER und VEIT, 1998; MESETH und SELTER, 2002 und SELTER, 2003 entnommen sind. Diese Aufgaben bieten nämlich auch die Möglichkeit, die in den angeführten Quellen angegebenen mit den selbst erfassten Lösungsstrategien zu vergleichen. Deshalb können die zwanzig Aufgaben, die gestellt werden, auch nicht den Anspruch erheben, valide und objektive Daten zum Lernfortschritt des gesamten Mathematikunterrichts zu liefern.

In den folgenden Ausführungen werten wir die Daten nach richtigem oder falschem Ergebnis aus. Die ebenfalls bei der Lernstandserfassung erhobenen Lösungsstrategien werden nicht angeführt, weil sie den Rahmen dieses Projektberichts übersteigen würden.

Da sich die Auswertung nur auf eine kleine Zahl von Daten bezog, werden Verfahren herangezogen, welche nur rangskalierte Daten benötigen.



Ergebnisse im Oktober 2005 | Ergebnisse im Mai 2006

Abbildung 20: Entwicklung des Lernstandes im Bereich der additiven Rechenoperationen

Die beiden Klassen unterscheiden sich im Oktober 2005 weder im Median noch in der Streuung wesentlich (Abbildung 20, linke Grafik). Der Median liegt bei der Experimentalklasse 3a bei 16,50, bei der Vergleichsklasse bei 17,00 (Tabelle 2). Der U-Test nach Mann & Whitney zeigt eine Übereinstimmung der Ränge von 82 %.

		Quartile		
	Klasse	25	50	75
Anzahl der erreichten Punkte	Experimentalklasse 3a	14,00	16,50	19,00
	Vergleichsklasse 3b	14,00	17,00	19,00

Tabelle 2: Lernstand Oktober 2005

Im Mai 2006 unterscheiden sich die Daten wieder kaum im Median, aber in der Streuung (Abbildung 20, rechte Graphik). Die Quartile bewegen sich in der Experimentalgruppe in einem weiteren Abstand. ¼ der Kinder in der Experimentalklasse erreichen ≤ 16 von 23 möglichen Punkten. ¼ der Kinder in der Vergleichsklasse erreichen ≤ 18,50 von 23 möglichen Punkten. Der Median liegt bei der Experimentalklasse 3a bei 19, bei der Vergleichsklasse 3b bei 19,50. In der Vergleichsklasse finden sich zwei Ausreißer, in der sich der niedrigste „Ausreißer"-Wert beider Klassen, nämlich die Punkteanzahl 11 (Tabelle 3) befindet. Der U-Test nach Mann & Whitney zeigt eine Übereinstimmung der Ränge von 26 %.

		Quartile		
	Klasse	25	50	75
Anzahl der erreichten Punkte	Experimentalklasse 3a	16,00	19,00	20,50
	Vergleichsklasse 3b	18,50	19,50	21,00

Tabelle 3: Lernstand Mai 2006

Vergleicht man den Zuwachs der Mediane von Oktober 2005 und Mai 2006, dann ist derselbe Zuwachs (+ 2,50) in beiden Klassen zu verzeichnen. Gesamt kann festgestellt werden, dass sich die Leistungen bezüglich additiver Rechenoperationen zwischen Experimentalklasse und Vergleichsklasse statistisch nicht bedeutsam unterscheiden. Dies bedeutet, dass die Kinder der Experimentalklasse und der Vergleichsklasse einen ähnlichen Lernzuwachs bei den additiven Rechenoperationen aufweisen. Trotz der Förderung der leistungsstarken Kinder sind die anderen Mitschülerinnen und Mitschüler der Experimentalklasse nicht vernachlässigt worden.

4.5 Wahlpflichtfach *„Schau, was ich schon kann!“*

Die Projektleiterinnen boten im Sommersemester eine Studienveranstaltung mit dem Titel *„Schau, was ich schon kann!“* und dem Untertitel *„Forschungsgeleitetes Arbeiten mit mathematisch leistungsstarken Kindern einer dritten Schulstufe“* an. Studierende des vierten und sechsten Semesters konnten diese Studienveranstaltung inskribieren.

Ziel dieser Veranstaltung ist, dass Studierende offene Aufgaben planen, die leistungsstarke Schülerinnen und Schüler auf einer dritten Schulstufe selbstständig bearbeiten können. Zusätzlich setzen sich Studierende mit qualitativen Erhebungs- und Auswertungsmethoden als ein Beispiel forschenden Lernens auseinander und führen ein Interview durch. So generieren sie Wissen über mathematische Denkweisen eines Grundschulkindes.

Die zwei Semesterwochenstunden umfassende Studienveranstaltung wurde zum Großteil in Blöcken zu vier Einheiten angeboten. In der folgenden Aufstellung sind die Struktur und die jeweiligen Inhalte angeführt.

Seminarblock (4 Einheiten)	Begabungsmodelle; Mathematische Begabung im Volksschulalter.
Seminarblock (4 Einheiten)	Kennenlernen von geeigneten Aufgaben, um mathematisch begabte Kinder zu entdecken und zu fördern: Anforderungen, Quellen, Rechnen von Beispielen.
Seminarblock (4 Einheiten)	Erstellen der Aufgaben; Evaluieren der Aufgaben innerhalb der Seminargruppe:
4 Einheiten in der Experimentalklasse (3a)	Einführen der Aufgaben in der Klasse; Betreuen der Kinder beim Bearbeiten
Seminarblock (4 Einheiten)	Informationsinput: Qualitative Datenerhebung und -auswertung; Ausarbeiten eines Interviewleitfadens.
4 Einheiten in der Experimentalklasse (3a)	Interview. Die Studierende betrachtet mit dem Kind das Zahlenforscherheft. Das Kind erklärt der Studierenden seine Eintragungen.
Seminarblock (4 Einheiten)	Transkribieren des Interviews; Datenauswertung; Dokumentation
Seminarblock (4 Einheiten)	Präsentation in der Gruppe: Erfahrungen und persönlicher Lerngewinn

Als Gründe, diese Studienveranstaltung gewählt zu haben, gaben drei Studierende an, in Mathematik immer schlecht gewesen zu waren und sich jetzt vertiefen zu wollen.

Um einzuschätzen, was leistungsstarke Kinder denken können, lösten die Studierenden im Rahmen einer Seminarveranstaltung die Problemstellungen der schon vorhandenen Karteikarten aus dem Wintersemester, wie z. B. *„Türme bauen“*. Die Studierenden konnten sich selbst eher nur dunkel erinnern, mit kombinatorischen Inhalten in ihrer Schullaufbahn konfrontiert worden zu sein. Abstrakte Lösungsstrategien standen ihnen jedoch nicht mehr zur Verfügung. Alle lösten die Beispiele durch Zeichnen bzw. Aufschreiben der Anfangsbuchstaben. Trotz oder vor allem wegen dieser konkreten Herangehensweise bildeten sich Grundvorstellungen kombinatorischer Inhalte.

Bei den Aufgaben zur Wahrscheinlichkeit stellten zwei Studierende fest, dass sie diese Inhalte noch nie gehört hatten. Das war für sie der Anlass, die Thematik zur Wahrscheinlichkeit, *„Würfelspiel“*, zu wählen. In einem Gespräch am Ende des Semesters sahen die beiden diese eigenaktive Auseinandersetzung als ideal an, *„um das wirklich zu verstehen*“. Sowohl die entstandenen Karteikarten als auch die Durchführung kann als sehr gelungen angesehen werden.

Zwei andere Studierende, die sich ebenfalls in diesen Seminarstunden mit den Inhalten auseinandersetzten, konnten die angebotenen Inhalte nur dürftig umsetzen. Die angebotene Seminargestaltung war in diesem Fall nicht ausreichend.

In einer anderen Blockungseinheit fragten wir die Studierenden nach Bereichen förderdiagnostischer Kompetenz, ein erklärtes Ziel des Projekts. Die Studierenden erstellten im Plenum eine Mindmap über förderdiagnostische Fähigkeiten an der Tafel. Die Abschrift ist in Abbildung 21 zu sehen.

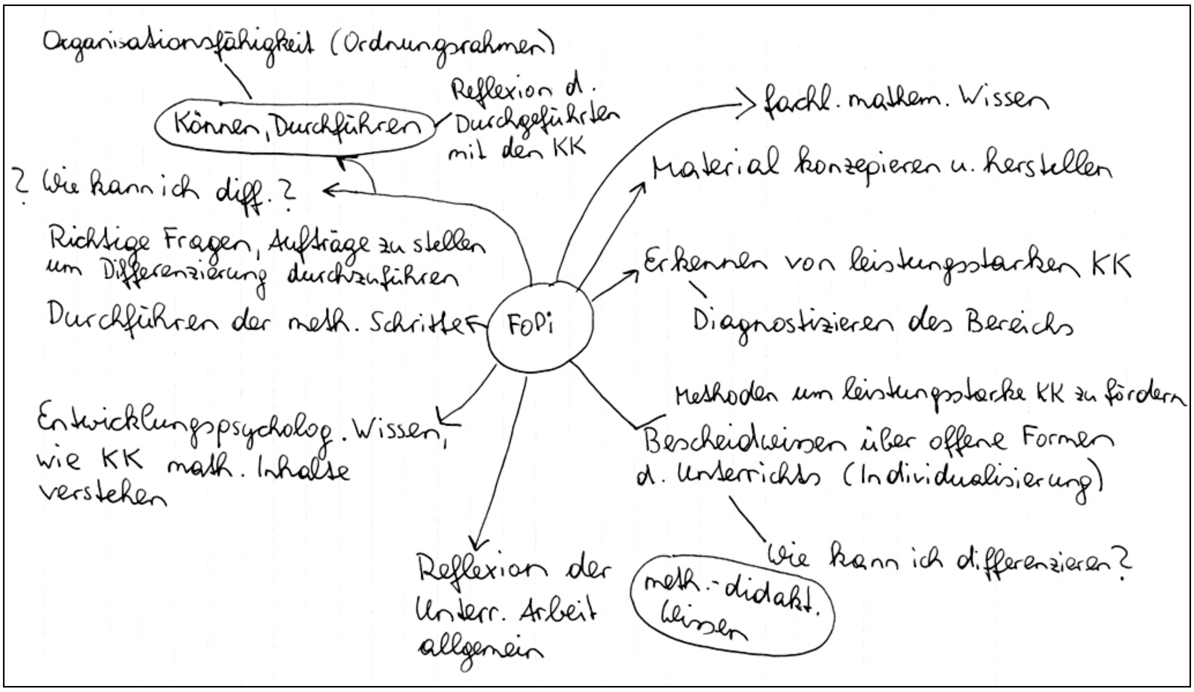


Abbildung 21: Mindmap förderdiagnostischer Fähigkeiten

Die Mindmap zeigt, dass die im vierten Semester inskribierten Studierenden ein grundlegendes Verständnis, was Förderdiagnostik umfasst, besitzen. Sie unterscheiden zwischen deklarativem Wissen (*„meth.-didakt. Wissen“*) und prozeduralem Wissen (*„Können, Durchführen“*). Offener ist, wie weit sie diese Kompetenzen bereits besitzen bzw. wie sie diese erwerben könnten. Sie selbst stellten fest, dass *„wissen, was dazugehört“* nicht schwierig sei, aber die konkrete Umsetzung bei Kindern für die einzelne Studierende nicht vorstellbar ist. Sie vertrauten in diesem Stadium der Ausbildung auf die noch folgenden Studienveranstaltungen, um mehr Kompetenz zu erlangen.

In der durchgeführten anonymen Befragung am Ende der Studienveranstaltung hoben die Studierenden hervor, dass ihnen das selbständige Arbeiten und das *“Ausprobieren”* bei den Kindern gute Lernbedingungen boten. Als Nachteil empfanden sie die eingebrachten zeitlichen Ressourcen, die im Gegensatz zu anderen interdisziplinären Wahlpflichtfächern wesentlich höher war. Als nicht notwendig sahen sie die theoretische Auseinandersetzung mit qualitativer Datenerhebung und -auswertung an, sie hätten sich viel lieber in die Arbeit mit Kindern vertieft.

4.6 Studierende schreiben über das Lernen von Kindern

Ein Ziel des Projekts ist, dass die zukünftige Lehrperson versteht, wie Schülerinnen und Schüler lernen und sich entwickeln. Die siebzig Studierenden, die den Lernstand in der Experimental- und in der Vergleichsklasse ermittelten, schrieben einen Studienauftrag, in dem sie ihre gewonnenen Ergebnisse festhielten. Die in den Studienaufträgen enthaltenen schriftlichen Aussagen über das Lernen wurden mit Hilfe einer qualitativen Inhaltsanalyse überarbeitet. Ziel war, die Inhalte des Materials in ihrem Kontext zu interpretieren. Im Mittelpunkt standen die subjektiven Theorien (persönlichen Meinungen) der ca. siebzig Studierenden. In diesem Abschnitt werden die Äußerungen dieser Studierenden zitiert, wie Schülerinnen und Schüler lernen und sich entwickeln. Folgende Themenkreise ergaben sich nach Clustern der 155 Aussagen über das Lernen der Kinder:

Themenkreise	Kernaussagen	Zitate
Intrinsische Faktoren des Lernens	Kinder verwenden unterschiedliche, teilweise ungewöhnliche und auch aufwändige Strategien.	*„Bei der Auswertung stellte ich fest, dass er manchmal Strategien anwandte, die ich gar nicht verwenden würde, mit denen er aber leicht und schnell zum Ergebnis kam.“*
Kognitionen	Kinder setzen das im Unterricht Erlernte unterschiedlich um.	*„Es ist wirklich faszinierend, wie Kinder auf Ergebnisse kommen. Sie lernen alle dasselbe, aber wenden es unterschiedlich an.“*
	Kinder kommen mit verschiedenen Strategien in gleich schneller Zeit zum Ergebnis.	*„… dass es zwar nicht einen Weg gibt, der immer der klügste ist, aber mit dem es schneller geht, wenn man ihn gut beherrscht und verinnerlicht hat.“*
	Kinder neigen, immer wieder auf die gleiche Strategie zurückzugreifen.	*Das Kind „strebt nach einer universellen Lösungsstrategie, die sich auf alle Rechnungen anwenden lässt.“*
	Kinder können ihr Regelwissen in größere Zahlenräume übertragen.	*„Es ist erstaunlich, dass Kinder fähig sind, gewonnene Erkenntnisse auf einen größeren ZR zu übertragen und so Aufgaben lösen können, obwohl sie die Zahlen vielleicht gar nicht lesen können.“*

	Kinder dieser Schulstufe tendieren zum Kopfrechnen. Kinder streben nach schriftlichen Rechenverfahren.	*„Er meinte auch, dass er eigentlich 99 % aller Rechungen im Kopf löse."* *„Das Kind zeigt eine starke Tendenz zur Anwendung algorithmischer Strategien, auch wenn diese oft fehlerhaft waren. Er begründet [..] rechnen […] wie die Großen."*
Ursachen von Schwierig-keiten	Bei mangelndem Zahlenverständnis können die Rechenoperationen nicht durchdrungen werden. Finger werden eingesetzt, um die Rechenoperationen zu lösen. Wenn die Konzentration sinkt, dann nimmt die Fehlerhäufigkeit zu. Bei oberflächlichem Lesen der Aufgabenstellung werden die Rechenoperationen verwechselt Fehlendes Verständnis wird durch regelhaftes Bearbeiten von Aufgaben ersetzt.	*„Sie hat den Rechenvorgang überhaupt nicht verstanden. Außerdem benötigt sie noch große Hilfe bei der Entwicklung von Zahlvorstellungen. Es gilt, diese Defizite zu beheben."* *„Das Kind setzte immer wieder – möglichst unauffällig bzw. versteckt – die Finger ein. Dadurch fühlte es sich sicherer."* *„… dass selbst automatisierte und für die Kinder selbstverständliche Operationen nach längerer Zeit hoher Konzentration zu Schwierigkeiten und Problemen führen können."* *„Er hat sehr schnell und überzeugt gearbeitet, aber einige Male die Operationszeichen nicht berücksichtigt."* *„Es kam zu Fehllösungen, da sie das Kommutativgesetz auf die Subtraktion übertragen wollte."*
Meta-kognitionen	Kinder sind sich ihrer eigenen Stärken, aber auch ihrer eigenen Schwächen bewusst. Das Verbalisieren des Lösungsprozesses fällt schwer.	*„Spannend war die freie Aufgabenstellung. Die Schülerin weiß genau, was sie kann und was ihr noch zu schwierig ist. Sie suchte sich nur Rechnungen aus, bei denen sie wusste, dass sie sie lösen kann." „Das Kind hatte Probleme, seinen eigenen Leistungsstand einzuschätzen."* *„Für sie ist es ganz klar, was sie tun und deshalb schwer in Worte zu fassen. Ich denke deshalb kam auch einige Male die Antwort: ‚Das hab` ich im Kopf gerechnet.'"*
Nicht kognitive Faktoren	Kinder sind sehr ehrgeizig, alles richtig zu lösen. Kinder wollen alle Aufgaben lösen. Kinder interessieren sich auch für die Lösungswege anderer Kinder. Gewisse Rechenoperationen werden bevorzugt, auch wenn sie manchmal schwieriger sind. Auch bei Volksschulkindern sind hohe Konzentrationsleistungen möglich.	*„Ich hatte das Gefühl, dass sie unbedingt alle Rechnungen richtig haben will."* *„Ich finde es toll, dass sich alle KK den Aufgaben gestellt haben, obwohl sie die Rechnungen im Unterricht noch nicht gerechnet haben."* *„Es ist anzumerken, dass der Schüler Subtraktionen viel lieber löste."* *„M. musste bei manchen Fragen länger grübeln, aber er gab nicht auf, bis er zu einer Lösung kam."*

	Durch Ausdauer und Sorgfalt kommen viele richtige Lösungen zustande.	*„Die Aufgaben wurden richtig, schnell und sorgfältig gelöst. Der S arbeitete sehr genau und konnte sein eigenes Können gut einschätzen."*
	Kinder wollen schnell fertig sein. Kinder haben kein Interesse, Aufgaben zweimal zu lösen. Kinder geben bei schwierigen Aufgaben zu schnell auf. Kinder lernen nur unter dem Einfluss spezifisch äußerer Bedingungen. Nur bei vorhandener Motivation ist ein Lernfortschritt möglich.	*„Das Kind meinte: Ich kann nur schnell rechnen."* *„…, dass er die Rechnungen […] schnell löste und er es eigentlich nie für nötig hielt nachzurechnen."* *„Sobald das Mädchen vor schwierige Aufgaben gestellt wird, schaltet sie sofort ab und versucht erst gar nicht, ein Verfahren anzuwenden."* *„Das Kind wollte ständig eine Rückmeldung und war wenig motiviert, als ich ihm erklärte, dass dieses Arbeitsblatt nicht beurteilt wird."* *„… dass sie zu kreativen, durchdachten Lösungen fähig wäre, aber dass sie sich nicht anstrengen wollte und ständig motiviert werden musste."*
	Kinder haben Angst zu versagen Kinder trauen sich nicht zu, eigene Aufgaben zu erfinden.	*„Das Mädchen hatte große Angst, etwas falsch zu machen. Erst nachdem sie etwas Vertrauen gewonnen hat, taute sie langsam auf."*
Extrinsische Faktoren des Lernens **Faktoren, welche die Aufmerksamkeit schmälern**	Die Aufmerksamkeit wird durch die räumliche und soziale Situation beeinflusst. Fehlleistungen nehmen bei Ablenkungen (Lärm, Beobachtungen im Schulhof, …) zu. Druck und Nervosität beeinflussen Leistung.	*„Wird die Konzentration des Kindes durch andere Schüler, durch die Lehrerin etc gestört, sinkt die Leistungsfähigkeit enorm."* *„Durch das Schaffen einer ruhigen Atmosphäre wäre das Kind möglicherweise nicht so leicht ablenkbar und so unkonzentriert."* *„Ich hatte das Gefühl, dass das Kind das Interview als Stresssituation empfand und darum Fehler machte."*
Faktoren, welche die Aufmerksamkeit steigern	Große Zahlen faszinieren. Knifflige Aufgaben fordern heraus.	*„Sie war von großen, runden Zahlen begeistert und war beim Rechnen mit ihnen davon überzeugt, dass sie ganz schwierige Aufgaben löste."* *„Das Finden von schwierigen Aufgaben gefiel dem Buben sehr gut. Er meinte, dass er zu Hause auch mit schwierigen Zahlen rechnet und sich gerne selbst Aufgaben überlegt."*
Didaktisch-methodi-scheKonse-quenzen	Verständnis für Zahlen, speziell für den Stellenwert ist grundlegend für das Rechnen. Hilfsaufgaben helfen, um das Strate-	*„M. hat mir gezeigt, wie ausgeprägt das Zahlen- und Operationsverständnis eines Kindes in diesem Alter schon sein kann. Dies hilft ihm, Rechnungen auch in hohen Zahlenräumen erfolgreich zu bewältigen".* *„Die Verbindung zum kleineren Zahlen-*

Geeignete Denk- und Lösungsstrategien	giewissen vom kleineren auf den größeren Zahlenraum zu übertragen.	*raum beim Bearbeiten von Aufgaben in hohem ZR stellt eine wichtige Lösungshilfe dar.“*
	Vielfältige Lösungsstrategien anwenden zu können ist gewinnbringend.	*„Er war also schon so weit, dass er je nach Aufgabe überlegen und differenzieren konnte, welcher Weg der einfachste war. Dies scheint mir eine recht hohe math. Leistung.“*
	Wenn die Lösungsstrategien gegenseitig ausgetauscht werden, erfolgt ein intensiveres Durchdringen des Rechnens. Anschauungsmittel als Lernmaterialien sind wichtige Hilfsmittel beim Lösen von Aufgaben.	*„Das Bewusstmachen von Rechenvorteilen und Strategien könnten P. helfen, solche Aufgaben schneller und effizienter zu lösen.“* *„Ich habe daraus gelernt, dass nicht alle Kinder einer Klasse ein und demselben Verfahren, einem schriftlichen Normalverfahren folgen, sondern eigene Lösungswege finden. Diese sollten die Kinder untereinander austauschen.“*
	Verbalisieren hilft zu einem tieferen Verständnis.	*„Dadurch, dass das Kind in dieser Situation gefordert wurde, ihren Lösungsweg zu versprachlichen, kam es zu einer Reflexion, wodurch das Kind auf Fehler aufmerksam wurde.“*
	Leises Mitsprechen hilft bei der Lösung.	*„Sie sprach beim Lösen der Aufgaben leise mit. Obwohl die Sprechweise nicht immer stimmte, hatte ich das Gefühl, dass ihr das Mitsprechen beim Bearbeiten half.“*
	Das Notieren der Zwischenschritte entlastet das Gedächtnis.	*„Durch die Notation von Zwischenergebnissen passierten weniger Fehler.“* *„Er verweigerte jegliche Notation von Zwischenschritten und meinte, dass er alles im Kopf lösen will.“*
	Nachrechnen oder eine Probe hilft, Fehler zu vermeiden.	*„Der Bub rechnete jede Aufgabe ohne Aufforderung nach und kontrollierte seine eigenen Lösungen.“*
	Ein individuelles Lerntempo ermöglicht ein dem Kind angepasstes Arbeiten.	*„Es macht keinen Sinn, Kinder zu hetzen oder zu bremsen.“*
Umgang mit dem Fehler	Eine falsche Lösung bedeutet nicht eine falsche Denkweise.	*„Falsch ist auch nicht gleich falsch. In falschen Lösungen können tolle Ansätze und gute Gedankengänge verborgen sein.“*
	Fehlerhafte Strategien sind ein Teilschritt des Lernprozesses und sind oft brauchbar.	*„Falsche Lösungen sind […] nicht zu verwerfen. Man soll daran weiterarbeiten.“*
	Kinder sollen eigene Fehler bewusst erkennen, nur so können Strategien zur Fehlervermeidung gefunden werden.	*„Wenn Kinder ihre typischen Fehler kennen würden, würden sie diese nicht mehr so oft machen.“*

Mehr als die Hälfte der Studierenden waren sehr erstaunt, wie verschieden Lösungsstrategien sein konnten. Eine Studierende meinte, dass sie *„die gar nicht verwenden* *würde"*. Gesamt gewannen die Studierenden die Einsicht, dass das *„grundsätzliche Beherrschen verschiedener Rechenmethoden und -strategien"* mehr im Vordergrund stehen sollte.

Der folgende Absatz bezieht sich auf eine von zwanzig Rechnungen, welche die Kinder beim Erfassen des Lernstandes lösten. Das soll verdeutlichen, warum die Studierenden in ihren Aussagen die Vielfalt von Lösungsstrategien so oft erwähnten. Das Beispiel steht zwar nicht unmittelbar in Zusammenhang mit der Thematik des Projekts, aber es erklärt die Fülle an Stellungnahmen zu Lösungsstrategien.

Die Kinder rechneten im Rahmen der Lernstandserfassung Ende Juni 2005 die Aufgabe *„784 - 199"*. Von den 24 Kindern der Klasse schrieben sechs Kinder die Zahlen nochmals untereinander an und lösten das Beispiel algorithmisch. Fünf Ergebnisse waren richtig, eines war falsch. Acht Kinder rechneten rein stellenweise, wie z. B. bei den Zehnern *„8 - 9*" oder *„90 - 80"*, und stolperten alle bei der Zehnerüberschreitung. Die Strategie *„stellenweise"* ergab kein einziges richtiges Ergebnis. Vier Kinder, die schrittweise rechneten, wie z. B. *„784 - 100 = 684; 684 - 9 = 675 und 675 - 90 = 585"*, lösten bis auf ein Kind die Rechnung richtig. Diese Kinder hatten eine brauchbare Zahlvorstellung. Hervorzuheben ist auch noch ein Mädchen, das die Rechnung mittels der Hilfsaufgabe *„784 - (200 - 1)"* löste.

Anhand dieses kurzen Auszugs ist zu erkennen, welche „Kraft" mathematische Gespräche in dieser Konstellation in sich bergen. Den Studierenden gelang es erfreulich gut, kindliches mathematisches Denken zu explorieren. Dadurch, dass die Studierenden sich intensiv vorbereiteten und die Kinder bereitwilligst mittaten, lernten die Studierenden viel über das Denken der Kinder. Als „Nebenprodukt" ergaben sich aufschlussreiche Erkenntnisse über das Spektrum an Lösungsstrategien von Kindern in diesem Alter.

	Intrinsische Faktoren des Lernens			**Extrinsische Faktoren des Lernens**		**Didaktisch-methodische Konsequenzen**		
Semester	Kognitionen Metakognitionen	Ursachen von Schwierigkeiten	Nicht kognitive Faktoren	Faktoren, die die Aufmerksamkeit schmälern	Faktoren, die die Aufmerksamkeit steigern	Geeignete Denk- und Lösungsstrategien	Umgang mit dem Fehler	Aussagen gesamt
2. Sem.	**18**	8	**22**	9	3	12	9	81
5. Sem.	**21**	10	12	4	8	12	7	74
	39	18	34	13	11	24	16	155

Tabelle 4: Aussagen der Studierenden über das Lernen der Kinder

Die Hälfte der 70 Studierenden führen Nicht kognitive Faktoren an, die das Lernen erheblich beeinflussen. Auffallend ist, dass in vielen Arbeiten ein gedankliches Abschweifen von den Studierenden *„mangelnder Konzentration"* zugesprochen wurde. Vor allem die im Semester jüngeren Studierenden machen wesentlich mehr Aussagen über Nicht kognitive Faktoren und auch über das, was stört. Studierende in einem höheren Semester wenden eher den Blick auf Perspektiven, um etwas verändern zu können.

Gesamt ist zu vermerken, dass sich Studierende eigenaktiv Wissen über mathematische Denkweisen des Grundschulkindes aneignen konnten. Studierende sehen aber auch sehr stark die Faktoren, die das Lernen beeinflussen. Studierende des zweiten

Semesters können dies nur feststellen, Studierende des fünften Semesters entwickeln mehr Perspektiven zu gutem Unterricht.

5 SCHLUSSFOLGERUNGEN

Wenn Studierende von und mit leistungsstarken Kindern lernen, dann ist es sicher genauso wichtig, dass leistungsstarke Kinder, und nicht nur diese, von und mit Studierenden lernen. Inwieweit das gelungen ist, sollen die folgenden Ausführungen klären.

5.1 Öffnung des Mathematikunterrichts, besonders für leistungsstarke Kinder

Ziel des Projekts ist Lernmaterialien und Aufgabenstellungen anzubieten, die unterschiedliche Niveaus an Bearbeitungen zulassen. Wir versuchen dabei besonders, leistungsstarke Kinder zu fördern.

Es gelang uns, eine ansprechende Sammlung an Lernmaterialien, Karteikarten und anderen Angeboten zu organisieren oder zu erstellen. Die Kinder beschäftigten sich mit der Denkschule, mit geometrischen Aufgabenstellungen, kombinatorischen Aufgabenstellungen und Aufgaben zur Wahrscheinlichkeit. In den Freien Lernphasen wählten viele, nicht nur die leistungsstarken Kinder, die angebotenen Aufgabenstellungen. Wie im Vorgängerprojekt fanden es die Kinder interessant, diese anspruchsvollen Aufgabenstellungen zu bearbeiten und sagten von sich aus, dass es auch deshalb spannend ist, weil die Problemstellungen zum Denken anregen. Sie schätzten zusätzlich, dass sie selbständig oder mit anderen zusammenarbeiten konnten.

In Publikationen zur Begabungsförderung wird immer wieder verlangt, dass im Sinne von Enrichment auch eine programmatische Bereicherung stattfinden soll. Wir wählten daher in diesem Schuljahr Aufgaben zur Kombinatorik aus. Die Aufgabenstellungen sprachen die Kinder an und sie waren mit Begeisterung bei der Sache. Sie fanden den Zugang über handelnde Tätigkeiten, indem sie legten oder zeichneten. Daraus ergaben sich die Systematisierungsversuche der Kinder. Bei den Aufgaben, die im Wintersemester angeboten wurden, war auch ein deutlicher Anstieg des Verständnisses zu erkennen.

Beim im Sommersemester angebotenen Aufgabenformat *„Eis essen“* blieb der Erfolg aus. Bedingt durch ein jugendlich sorgloses Herangehen der Studierenden kam es zu wenig bis gar keiner Klärung der Problemstellung. Pointiert formuliert könnte man feststellen, dass es zwar den Kindern Spaß machte, aber sie dabei wenig lernten. Sie blieben in ihrem Denken verhaftet, die dahinter liegende Struktur der Aufgabe wurde von den Kindern nicht erkannt.

Hier zeigt sich die Grenze unseres Anliegens: Wir waren in diesem Schuljahr mutiger und wagten uns weit weg von Zahlenaufgaben. Im Gegensatz zum Vorgängerprojekt gelang es heuer nicht immer, dass Kinder in Zusammenarbeit mit anderen Lösungsstrategien entwickelten. Wir wollten bewusst die Grenze des reinen Anbietens von Aufgaben für leistungsstarke Kinder erfahren.

Wir versuchen Lernmaterialien einzusetzen und die Karteikarten so zu gestalten, sodass wenig personelle Ressourcen notwendig sind. Dies gelang im Vorgängerprojekt recht gut. Die Kinder konnten allein mit den Anweisungen arbeiten. Wenn aber zum Lösen vorweg unbekannte Strategien notwendig sind, dann ist die gedankliche Durchdringung zu offen. In so einem Fall reicht es nicht aus, dass Kinder über gegenseitigen Austausch Lösungsstrategien entwickeln können. Auch noch so motivierende Aufgabenstellungen, wie zum Beispiel *„Eis essen“*, können das Denken nicht so fundamental anregen. Da bedarf es einer Betreuung durch eine fachkundige Person.

Diese Aufgaben waren zwar von der Sachsituation sehr ansprechend und in der Struktur herausfordernd, aber die gewünschten Kompetenzen wurden nicht erreicht. Den Kindern war das Nichterreichen der gewünschten Lösungsstrategie jedoch nicht bewusst. Im Gegenteil, etliche Kinder gaben *„Eis essen“* als Lieblingsaufgabe an. Dies kann gefährlich werden, dass Kinder zwar Freude am Arbeiten haben, aber nichts dabei lernen. Denn, dass Schule allein nur *„Spaß“* macht, kann nicht Schule charakterisieren. Lehrerinnen und Lehrer sind auch verpflichtet, dass Kinder Kompetenzen erwerben, um erfolgreich an unserer Gesellschaft teilhaben zu können.

Kinder sind in der Lage, sich in einer offenen Lernumgebung ihren Fähigkeiten gemäß einzubringen. Die Lernmaterialien und Aufgabenstellungen müssen allerdings so gewählt werden, dass die dafür notwendigen Lösungsstrategien ansatzweise vorhanden sind. Sonst sollte eine fachkundige Person die Arbeit betreuen. Das gilt auch für leistungsstarke Kinder.

5.2 Diagnostische Kompetenz bei Studierenden

In diesem Abschnitt soll die in der Einleitung gestellte Zielformulierung - ob Studierende durch das Instruieren, Beobachten und Befragen von Kindern mehr diagnostische Kompetenz erlangen - reflektiert werden.

Studierende verfügten gewiss über ein Wissen im Bereich förderdiagnostischer Kompetenz. Sie konnten dies spontan, ohne auf diverse Quellen zurückgreifen zu müssen, artikulieren. Trotzdem hatten sie nicht den Eindruck, über diese Fähigkeiten zu verfügen. Der Unterschied zwischen dem Seminaralltag, wo angesprochene Bereiche genannt und erklärt werden, und dem Arbeitsalltag in der Klasse - mehr als zwanzig Kinder gleichzeitig ihrem Lernstand gemäß zu fördern - ist sehr groß.

Unser Zugang, die Wirklichkeit zu reduzieren, aber doch im Feld zu bleiben, zeigt folgende Ergebnisse:

Der eigenaktive Erwerb von Denkweisen kann von der Seminarleiterin nur angeregt, aber nicht in die Köpfe „verpflanzt“ werden. Wenn mathematische Aufgabenstellungen anspruchsvoller sind, wie in diesem Projekt etwa die kombinatorischen Probleme, dann ist ein erheblicher kognitiv-mathematisch-analytischer Einsatz seitens der Studierenden notwendig. Sie müssen sich intensiv mit der Materie auseinandersetzen. Leider muss festgestellt werden, dass das Ziel nicht immer erreicht wurde. Obwohl Studierende gute auf das Kind abgestimmte Karteikarten entwickelten, blieb der mathematische Gehalt leicht offen.

Im mathematischen Gespräch sahen sich Kinder und Studierende als gleichwertige Partner. Die Studierenden wollten etwas über die Denkgänge der Schüler erfahren und die Kinder, als Experten ihres eigenen Denkens, gaben darüber bereitwillig Auskunft. Zwar nahm die zuvor gegangene intensive Auseinandersetzung mit Fachliteratur, das mathematische Interview mit dem Kind und die nachfolgende Auswertung erhebliche zeitliche Ressourcen in Anspruch, laut Auskunft der Studierenden lohnte es sich aber. Man erwirbt einerseits ein deklaratives Wissen über die Lernstrategien der Kinder, aber auch das erwünschte prozedurale Wissen in der Kommunikation mit einem Kind beim Feststellen der Strategien. In einem kleinen Wissensfeld wurde diagnostische Kompetenz erreicht. Lernen im prozeduralen Bereich im Rahmen der Ausbildung kann nur exemplarisch sein. Wir meinen, im förderdiagnostischem Bereich damit ein gutes Fundament zu legen.

Studierende können sich eigenaktiv Wissen über mathematische Denkweisen von Kindern aneignen, wenn die Aneignung in einer reduzierten Wirklichkeit stattfindet. Dies erfordert bei komplexeren, nicht tradierten mathematischen Inhalten eine durchaus intensive Auseinandersetzung, die nicht immer gelingt.

Von einer unserer Leitideen, die im Projekt erstellten Materialien zu vervollständigen und dann so aufzubereiten, dass wenig bis gar keine Hilfe der Lehrperson notwendig sei, müssen wir uns etwas distanzieren. Es gibt Aufgaben, die nur mit einer Fachkraft möglich sind. Das enttäuscht uns zwar ein wenig in der Projektidee, für die Profession der Lehrerinnen und Lehrer bleibt damit tradiert Bekanntes aufrecht. Eine Lehrerin oder ein Lehrer kann nicht durch ein noch so ansprechendes Medium ersetzt werden.

6 LITERATUR

BARDY, Peter (Hg., 1997). Mathematische und mathematikdidaktische Ausbildung von Grundschullehrerinnen/-lehrern. Weinheim: Deutscher Studienverlag

BRUNNER, Edith; CERMAK, Ursula; FAST, Maria; NÖSTERER, Franz; PLATZGUMMER, Franz & REPOLUSK, Elisabeth (2006). Bildungsstandards für MATHEMATIK 4. Schulstufe. Version 2.2 mit Aufgabenbeispielen. In: www.gemeinsamlernen.at [2. Juni 2006]

FRANKE, Marianne & LEHMANN, Nadine (2005). Wozu brauchen wir da noch Unterricht, die Kinder können ja schon alles. In: Grundschulunterricht, 52. Jg., Heft 7 - 8, S. 5 - 10; und

GERSTENMAIER, Jochen & MANDL, Heinz (2000). Einleitung: Die Kluft zwischen Wissen und Handeln. In: MANDL, Heinz & GERSTENMAIER, Jochen (Hg., 2000). Die Kluft zwischen Wissen und Handeln. Empirische und theoretische Lösungsansätze. S. 11 - 23. Göttingen, Bern, Toronto & Seattle: Hogrefe

GRASSMANN, Marianne; MIRWALD, Elke; KLUNTER, Martina & VEIT; Ute (1998). Untersuchungen über Vorkenntnisse und informelle Lösungsstrategien zu zentralen Inhalten des Mathematikunterrichts der Klasse 3 (Teil 2). In: Sache-Wort-Zahl, 26. Jg., Heft 17, S. 44 - 48.

HAMMERER, Franz (1998a). Offene Lernsituationen anspruchsvoll gestalten. In: Freund, Josef; Gruber Heinz & Weidinger Walter (Hrsg., 1998). Guter Unterricht – Was ist das? S. 35 – 56. Wien ÖBV Pädagogischer Verlag GmbH

HAMMERER, Franz (1998b). Didaktisch wertvolle Lernmaterialien und ihr Stellenwert in einem guten Grundschulunterricht. In: Freund, Josef; Gruber Heinz, & Weidinger, Walter (Hrsg., 1998): Guter Unterricht – Was ist das? S. 73 - 89. Wien: ÖBV Pädagogischer Verlag GmbH

HARTINGER, Andreas; MÖRTL-HAFIZOVIC, Dzenana & FÖLLING-ALBERS, Maria (2004). Situiertes Lernen in der Lehrerbildung. In: Grundschule, 36. Jg., Heft 6, S. 21 - 23

KRUMMHEUER, Götz & BRANDT, Birgit (2001). Paraphase und Traduktion. Partizipationstheoretische Elemente einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens in der Grundschule. Weinheim, Basel: Beltz Verlag

LEHRPLAN der Volksschule (2000/9). Koordiniert durch Wilhelm Wolf. Wien: Österreichischern Bundesverlag, Hölder-Pichler-Tempsky

LORENZ, Jens Holger (2002). Kinder reden über ihre Rechenwege. In: Grundschule, 34. Jg., Heft 3, S. 25 - 27.

MESETH, Verena & SELTER, Christoph (2002). Zu Schülerfehlern bei der nichtschriftlichen Addition und Subtraktion im Tausenderraum. In: Sache-Wort-Zahl, 30. Jg., Heft 45, S. 51 - 58

NEUBERT, Bernd (2003). Gute Aufgaben zur Kombinatorik in der Grundschule. In: Ruwisch, Silke; Peter-Koop, Andrea (Hrsg.). Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule. Offenburg: Mildenberger

OSER, Fritz (2001). Standards: Kompetenzen von Lehrpersonen. In: OSER, Fritz & OELKERS, Jürgen (Hg., 2001). Die Wirksamkeit der Lehrerbildungssysteme. Von der Allrounderbildung zur Ausbildung professioneller Standards. S. 215 - 342. Chur, Zürich: Rüegger 2001.

PADBERG, Friedhelm (2005/3). Didaktik der Arithmetik. Heidelberg: Elsevier Spektrum Akademischer Verlag

RADATZ, Hendrik; SCHIPPER, Wilhelm; DRÖGE, Rotraud & EBELING, Astrid (1998). Handbuch für den Mathematikunterricht 2. Schuljahr. Hannover: Schroedel

SCHRADER, Friedrich-Wilhelm & HELMKE, Andreas (2001). Alltägliche Leistungsbeurteilung durch Lehrer. In: WEINERT, Franz, H. (Hg., 2001). Leistungsmessungen an Schulen. S. 45 - 58. Weinheim, Basel: Beltz Verlag

SCHULER, Stephanie (2004). Wann ist ein mathematisches Gespräch erfolgreich? In: Arbeitskreis Interpretationswerkstatt PH Freiburg (Hg., 2004): Studieren und Forschen. Qualitative Methoden in der Lehrerbildung. Herbolzheim: Centaurus Verlags-GmbH

SCHULZ, Claudia (1991): Zahlenschlosskombinationen aus drei Ziffern. In: Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe, 19. Jg., Heft 11, S. 505 - 511

SCHÜTTE, Sybille (2002). Das Lernpotenzial mathematischer Gespräche nutzen. In: Grundschule, 34. Jg., Heft 3, S. 16 - 18.

SELTER, Christoph (2003). Flexibles Rechnen - Forschungsergebnisse, Leitideen, Unterrichtsbeispiele. In: Sache-Wort-Zahl, 31. Jg., Heft 57, S. 45 - 50

SELTER, Christoph & SPIEGEL, Hartmut (2004). Elemente der Kombinatorik. In: Müller, Gerhard N.; Steinbring, Heinz & Wittmann, Erich Ch. (Hg. 2004). Arithmetik als Prozess. S. 291 - 310. Seelze: Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung

STERN, Elsbeth (2004). Entwicklung und Lernen im Kindesalter. In: http://ifb.bildung-rp.de/forum/uebergang/TM-Stern.PDF [2. Juni 2006]

TANNENBAUM, Abraham J. (1998): Welche Schule brauchen Hochbegabte? In: BMW AG & Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus (Hg., 1998): Dokumentation Kongress Hochbegabtenförderung vom 15./16. Juli 1998 in München. S. 125 - 156

TILLMANN, Klaus-Jürgen & WISCHER, Beate (2006). Heterogenität in der Schule. Forschungsstand und Konsequenzen. In: Pädagogik, 58. Jg., Heft 3, S. 44 - 48

WARFIELD, Janet (2001). Teaching kindergarten children to solve word problems. In: Early Childhood Education Journal, 28. Jg., Heft 3, S. 161 - 167