Naturwissenschaftswerkstatt

WEGE ZUR DIFFERENTIALRECHNUNG

Monika Gabriel - Peer

HTBLVA Anichstraße 26 6020 Innsbruck

Innsbruck, 2003

Herzlichen Dank an die Kollegen Walter Härting, Heinz Partoll, Hannes Pittracher, deren Überlegungen direkt eigeflossen sind und an die vielen anderen mit denen ich diskutiert, überlegt, gestritten, gearbeitet .... habe – es hat gewirkt.

Danke an Koll. DI Dr. Veronika Ebert, die meine Arbeit gelesen und kommentiert hat.

INHALTSVERZEICHNIS

1 VORÜBERLEGUNGEN

1.1 Was hat mich zum Aufschreiben bewogen?

Seit Jahren suche ich nach Möglichkeiten, DI[1] umfassend darzustellen und meinen Schülern[2] verständlich zu machen. Im Lehrplan der Oberstufe nimmt die Analysis eine hervorragende Stellung ein und sollte von allen Schülern verstanden werden!! Meiner Meinung nach ist es förderlich für das Verständnis, wenn Zugänge von verschiedenen Seiten angeboten werden und die Lehrperson auch die Entwicklung der Schüler in ihre Überlegungen miteinbezieht. Ich habe mich im Laufe meiner Lehrtätigkeit intensiv mit Psychologie beschäftigt und möchte auch diese Überlegungen in die Zugänge zur DI einbauen.

Daher habe ich begonnen, meine Überlegungen zusammenzuschreiben, die bisher schon angewendeten guten Tipps von Kolleginnen und Kollegen weiterzugeben, sie anderen zur Verfügung zu stellen, sie in übersichtliche und weitergebbare Form zu bringen und sie zur Diskussion zu stellen.

Seit ich an der Verschriftlichung und Veröffentlichung arbeite und mit ihnen viel über mögliche Wege rede, habe ich schon wieder viele neue Tipps von Kolleginnen und Kollegen erhalten, die dazu angetan sind, meinen MU[3] lebendiger zu gestalten.

1.2 Psychologische und philosophische Überlegungen

In diesem Kapitel wird der Entwicklungsstand der Jugendlichen stichwortartig beschrieben und zusammengefasst, der Lehrplan an HTL beigefügt und einer Darstellung der wichtigsten Lernschritte für den 2. und 3. Jahrgang aus meiner Sicht gegenübergestellt[4].

Mit diesen Überlegungen habe ich mich vor einigen Jahren umfassend beschäftigt. Sie finden sich auf der HTL-CD, die 1998 erschienen ist und unsere Schule umfassend präsentiert, alle Abteilungen, Fachbereiche, Fachgruppen, Möglichkeiten, haben sich und ihr Selbstverständnis darauf dargestellt, ihre .Überlegungen verschriftlicht. Mir war es damals nach der Lektüre von D. Winnicott: *Der Anfang ist unsere Heimat*, Kapitel: „Sum, Ich bin“, der sich mit der Mathematik als ganzheitlicher Wissenschaft beschäftigt, wichtig, diesen Zusammenhang zwischen Mathe und Entwicklung sehr deutlich zu machen, ihn auch für uns nutzbringend darzustellen.

[1] Differential- und Integralrechnung
[2] Wenn es sich um rein maskuline Gruppen handelt, verwende ich die männliche Form
[3] Mathematikunterricht

[4] im Anhang finden Sie Literaturvorschläge zum Thema

1.2.1 Gegenüberstellung 2. Jahrgang

Entwicklung 2. Jahrgang: Experimentieren mit den eigenen Veränderungen.

In dieser Altersstufe ist es üblich, dass die Jugendlichen

- sich innerlich von den Eltern ablösen,
- eigenständige Gedanken entwickeln,
- eigene Lebensformen überlegen,
- sich dem anderen Geschlecht zuwenden,
- Gefühle schwer beschreiben und beherrschen können,
- mit Alkohol und Zigaretten experimentieren (eventuell Drogenproblematik),
- Grenzen setzen und erproben (Abgrenzungen, Ausgrenzungen, Ausländerproblematik),
- je nach erreichter eigener Stabilität leicht rekrutierbar für fanatische Ideen sind
- eigene Strukturen begreifen lernen
- beginnen, in Zusammenhängen zu denken.

Aufgabe von Eltern und Lehrenden ist es in dieser Altersstufe, sich mit den Jugendlichen auseinander zu setzen, klar eigene Standpunkte zu kommunizieren und verlässlich da zu sein. Es ist für Lernende besonders wichtig, wenn ihre Beziehungspersonen einen stabilen Hintergrund vermitteln. Außerdem sollten die Jugendlichen zu Freizeitaktivitäten motiviert werden, die kulturell höhere Ansprüche befriedigen.

Lehrplan 2. Jahrgang

Algebra und Geometrie: Vektoren (Skalarprodukt, Orthogonalität, vektorielles Produkt). Quadratische Gleichungen; Exponenzialgleichungen. Komplexe Zahlen (Darstellung, Rechenoperationen). Trigonometrie des schiefwinkeligen Dreieckes.

Funktionen: Eigenschaften; Umkehrfunktionen; quadratische Funktionen, Potenz- und Wurzelfunktionen, Exponenzial- und logarithmische Funktionen; allgemeine Sinusfunktion, Summensätze; Interpretation von Funktionsgraphen und -gleichungen; Parameterdarstellung.

Wirtschaftsmathematik: Zinseszinsrechnung; lineare Optimierung.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik: Häufigkeitsverteilung; Kenngrößen; Wahrscheinlichkeit (Additions- und Multiplikationsregel).

Anwendungen aus dem Fachgebiet; Gebrauch der in der Praxis üblichen Rechenhilfen, rechnerunterstütztes Arbeiten in der Mathematik.

Fähigkeiten, die im 2. Jahrgang erworben werden sollen:

Langsames Einüben der neuen Ordnung

- Kennenlernen anderer Denkweisen, Standpunkte, Normen und Einheiten
- Denken in Zusammenhängen
- Denken in Abhängigkeiten
- funktionales Denken
- Handeln: globales - räumliches Denken und beschreiben

1.2.2 Gegenüberstellung 3. Jahrgang

Entwicklung 3. Jahrgang: Herantasten an die eigene Identität

- der Freundeskreis gewinnt zunehmend an Bedeutung,
- teilweise bereits "fixe" Beziehungen,
- Gefühle werden wahr- und wichtiggenommen, versucht sie auszudrücken,
- nicht nur der Körper ändert sich, auch die Verhaltensweisen,
- Rivalitäten mit gleichgeschlechtlichen Erwachsenen,
- die jungen Männer und Frauen, zu denen die uns anvertrauten jungen Menschen mittlerweile herangewachsen sind, sind jetzt besonders vital, ihr körperliches Wachstum ist oft schon beendet,
- **mid - school - crisis: Bin ich ein Techniker?**
- Führerschein
- Wahlberechtigung
- Volljährigkeit – trotzdem noch jahrelang von Eltern abhängig

Im Lehrplan 3. JG:

Analysis: Zahlenfolgen, Grenzwert, Stetigkeit. Differenzialrechnung (Differenzen- und Differenzialquotient, Ableitungsregeln, Anwendungen der Differenzialrechnung). Integralrechnung (bestimmtes und unbestimmtes Integral, Integration elementarer Funktionen, Anwendungen der Integralrechnung).

Fähigkeiten, die im 3. Jahrgang erworben werden sollen:

Festigung der neuen Ordnung

- Denken in Prozessen, in endlichen und unendlichen Entwicklungen
- Erkennen von Grenzen von Entwicklungen
- Aussagen treffen können über die Verlässlichkeit der Entwicklung (Stetigkeit)
- Denken in Veränderungen
- Denken in kleinsten Varianten
- Erkennen von, arbeiten mit und erstellen von Regelhaftigkeit
- Kreativität des Denkens (Integration als großes Puzzle)
- Denken in Möglichkeiten (W-Theorie)
- Normierendes Denken, Einführung eigener Normen (Statistik)

Für mich ist es immer wieder faszinierend, wie gut Lehrstoff und Entwicklung zusammenpassen, wie genau die „Alten“ darüber nachgedacht haben und hoffe, dass es auch so bleiben möge und nicht im Zuge von Neuerungen und Raffungen im Lehrstoff verloren gehe.

Philosophische Überlegungen

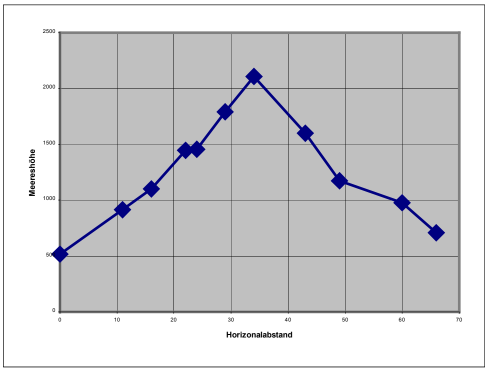
Überlegungen im Zusammenhang mit dem Unendlichen, mit funktionalen Zusammenhängen sind auch philosophischer Natur. Mathematik ist eine Möglichkeit, das Unendliche „in den Griff“ zu bekommen. Kennenlernen anderer Sichtweisen auf das Unendliche, das sind meiner Erfahrung nach Themen, auf die meine Schüler sehr ansprechen, insbesondere an der HTL.

2 INTUITIVER ZUGANG (PARTNERARBEIT)

Anregungen dazu habe ich von den Kollegen Hannes Pittracher (Tages-) und Walter Härting (Abendschule) im Rahmen unserer PFL–Ausbildung erhalten. Die beiden haben ihre (relativ kleinen) Klassen geteilt, die Schwächeren wurden vom Lehrer unterrichtet, die Selbständigen konnten sich DI in eigenständiger Arbeit aneignen. Ich habe dieses Konzept insofern abgeändert, als ich meinen Schülern eine Mischung aus Lehrerinvortrag, Schülervorträgen, Gruppenarbeit, Übungen, ... anbiete.

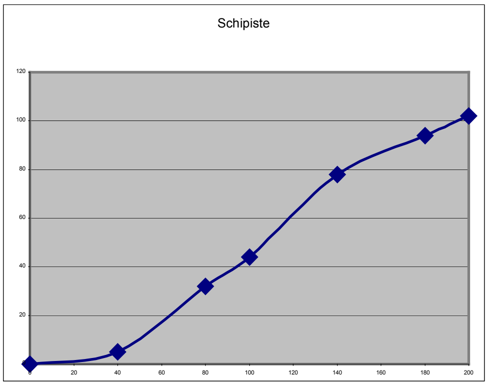
Die Arbeitsblätter finden sich unter BeispieleDI.htm

Blatt 1: Schnitt durch den St. Gotthard (Darstellung und Berechnung von Steigungen)



Hier werden Steilheiten miteinander verglichen, es wird versucht, die Steigung in einem Maß auszudrücken, mittlere Steigungen berechnet, Anstieg und Abstieg verglichen und unterschieden. An dieser Stelle mögen Schüler gerne Beispiele, die aus Berg- oder Bikingführern genommen werden, die sind realistischer, weniger mathematisch, erinnern an erfreuliche Erlebnisse und stacheln den Arbeitseifer an

Blatt 2: Schipiste (Veränderungen)



Ein Schnitt durch einen Berg ergibt kaum gerade Linien – hier ein Querschnitt durch eine Schipiste. Es werden Fragen bezüglich der Steilheit an einzelnen Punkten, einzelner Teilstrecken und der Gesamtstrecke gestellt. Dieses Beispiel führt schrittweise zu Differenzen- und Differentialquotient. Im Zusammenhang mit den angebotenen Fragen entwickeln die Schüler in Gruppen viel Verständnis für DI und sind anschließend auch theoretischen Überlegungen gegenüber offen.

Blatt 3: Freier Fall

Der Zusammenhang zwischen Fallhöhe und Zeit führt zu weiterer Präzisierung des Verständnisses von DI.

Ergebnis der Gruppenarbeit:

Obige Arbeitblätter eignen sich, um den Schülern einen intuitiven Zugang zur DI zu ermöglichen. Es gelingt ihnen selbsttätig, die zentralen Begriffe der Analysis zu begreifen und zu beschreiben.

Im Rahmen von Diskussionen wird ihnen klar, wie verschieden Begriffe verstanden und interpretiert werden können.

Ich arbeite sehr gerne mit verschiedenen Zugängen, weil ich denke, dass ich so möglichst den verschiedenen Schülertypen einigermaßen gerecht werden kann.

Es ist für alle etwas dabei:

- Für den motorischen Typen die Selbsttätigkeit im intuitiven Zugang
- Für den optischen Typen die verschiedenen Lehrervorträge und die Schaubilder
- Für den akustischen Typen ebenfalls die Lehrerinvorträge

Ich bin sicher, dass es nicht nur einen guten Zugang gibt, sondern viele, dass den Schülern immer mehrere angeboten werden sollen, obwohl ich in einem Schülerinterview vor Jahren von einem Schüler gehört habe: „*Der eine Mitschüler erklärt es so, der andere anders und wenn ich eine Version von der Tafel abschreiben will, erklärt es die Frau Professor noch einmal anders – da kenn ich mich dann gar nicht mehr aus!!*“

3 HISTORISCHER ZUGANG (SCHÜLERREFERATE)

Wir haben uns zuerst lange Zeit mit Folgen, Reihen und Grenzwerten beschäftigt. Diese Inhalte wurden durch Lehrerinvortrag vermittelt – Übungen dazu mit dem algebrafähigen Taschenrechner TI 92 und mit der CAS[5] MathCAD. Diese Vorarbeit war wichtig, weil wesentliche Informationen und Überlegungen zur DI schon angedacht waren

Anschließend wählte ich den intuitiven Zugang zur Analysis, so wie er in Kapitel 2 beschrieben wurde.

Mit dieser Vorarbeit konnten die Referate entsprechend den Kapiteln der Bücher

> R. Taschner: Das Unendliche (Blickwinkel verschiedenster Mathematiker und Philosophen auf ein großes Thema)
>
> H. Meschkovsky: Denkweisen großer Mathematiker (Leibnitz, Pascal)

verteilt werden. Die Schüler konnten in Zweier- oder Dreiergruppen oder alleine ihre Themen ausarbeiten, wofür sie etwa drei Wochen (zu Hause, in den MathCAD Stunden und mit Nachfragen bei mir) Zeit hatten. Dann waren die Referate in schriftlicher Form abzugeben, wurden von mir korrigiert und am Ende des ersten Semsters innerhalb von 5 Stunden präsentiert.

Es zeigte sich, dass einige, die sich schwerer getan hatten, sich mit der Materie sehr intensiv auseinandersetzten und so zu einem ansprechenden und gut verständlichen Vortrag gekommen waren.

Meine Erfahrungen und die Einschätzungen der Schüler, ihren Arbeitsaufwand und ihre Kritikpunkte finden sich auf der IMSTT Homepage im Bereich S3. Dort untersuche ich auch Auswirkungen auf das Lernverhalten und die Freude am Erarbeiten der Schüler, Überlegungen, wie Schülervorträge effektiv vorbereitet werden können, sowie Vorschläge für Themen.

Diese Referate haben sich sehr bewährt, alle waren mit ähnlichen Themen von ganz verschiedenen Seiten beschäftigt, sie begannen miteinander über die unterschiedlichen Sichtweisen von Philosophen und Mathematikern zu diskutieren. Einerseits haben sie sich mit „ihren“ Standpunkten intensiv auseinandergesetzt, andererseits konnten sie dadurch auch andere Sichtweisen leichter nachvollziehen.

Besonders wichtig in diesem Zusammenhang ist auch zu erwähnen, dass Schüler durch die Projekte und Vorträge gelernt haben, selber zu erklären, Verbindungen herzustellen und an Bekanntes anzuknüpfen.

[5] Computer Algebra System

4 EXAKT, KURZ UND BÜNDIG – DIFFERENTIATIONSREGELN ALLGEMEIN (LEHRERINVORTRAG)

Die Regeln wurden von Mathematikern im Laufe der Zeit gefunden, um nicht jede Funktion neu mit Hilfe der Definition des Differentialquotienten abzuleiten – um Zeit zu sparen. Sie wurden historisch ganz anders entwickelt, aber dafür bräuchten wir viel mehr Zeit!

Differentiationsregeln herzuleiten braucht üblicherweise lange, besonders Produkt- und Quotientenregel sind mühsam und ihre Herleitung klassisch nicht ganz einfach zu vermitteln. Mein Kollege Heinz Partoll hat einen Weg entwickelt, alle Differentiationsregeln in relativ kurzer Zeit mit den Schülerinnen und Schülern besprechen zu können, der meiner Meinung nach genial ist. Wichtig ist allerdings, vorher Folgen, Reihen und Grenzwerte, sowie Stetigkeit ausführlich zu behanden.

Interessant ist der Zugang für all jene, denen es wichtig ist, Mathematik zu treiben und die daneben auch für andere Zugänge und Methoden Zeit haben wollen.

4.1 Ableitung einer Funktion

<u>Definition:</u>

$f: D \to R$

$x \mapsto f(x)$ wobei $\Delta x = x - x_0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(f\left(x_0 + \Delta x\right) - f(x)\right)}{\Delta x}$$

heißt Differentialquotient (DQ) der Funktion f(x) an der Stelle x_0

An dieser Stelle ist es günstig über Differenzierbarkeit und Schreibweisen im Zusammenhang mit dem DQ, wie f'(x) , $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d}{dx} f(x)$ zu sprechen, sowie die Ableitung der Grundparabel als Beispiel vorzuführen.

Im Folgenden gelten die Funktionen f(x), u(x), v(x) als jeweils definiert von ihrer Definitionsmenge nach der Menge der rellen Zahlen, R, hintereinander ausgeführte Funktionen werden in der Form f(g(x)), bzw. u(v(x)) geschrieben. Ihre Definitionsbereiche gelten als sinnvoll definiert und sie seien differenzierbar.

4.2 Ableitung der Summe zweier Funktionen

Satz: Ist u(x), v(x) in x_0 differenzierbar, so ist auch

f(x) = u(x) + v(x) in x_0 differenzierbar und es gilt:

f'(x) = u'(x) + v'(x)

Beweis: Einsetzen in die Definition des Differentialquotienten

Das selbe gilt auch für die Subtraktion von Funktionen

4.3 Ableitung der konstanten Funktion

Satz: $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$ wobei c eine beliebige reelle Zahl ist

Die Ableitung der Funktion f(x) = c, ist Null, d. h.: f'(x) = 0

Beweis:

1) anschaulich graphisch, Steigung der konstanten Funktion in jedem Punkt

2) $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(f\left(x_0 + \Delta x\right) - f(x)\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0$$

4.4 Die Ableitung des natürlichen Logarithmus

Dazu ist es wichtig, bei Besprechung der Grenzwerte, die eulersche Zahl e als Grenzwert behandelt zu haben. Wichtig ist auch, dass $\Delta x = \frac{x}{n}$ ist

Satz: $$f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

Die Funktion f(x) = ln(x) ist im gesamten Definitionsbereich differenzierbar und hat als Ableitung f'(x) = 1/x

Beweis: (ln(x))' =

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\ln(x_0 + \Delta x) - \ln(x_0))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left[\frac{(x_0 + \Delta x)}{x_0}\right]}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left[\frac{(x_0 + \Delta x)}{x_0}\right]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left[1 + \frac{(\Delta x)}{x_0}\right]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{1}{x_0} \cdot \left[\frac{x_0}{\Delta x} \ln\left[1 + \frac{(\Delta x)}{x_0}\right]\right]\right]$$

$$\frac{1}{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \left[1 + \frac{(\Delta x)}{x_0}\right]^{\frac{x_0}{\Delta x}} = \frac{1}{x_0} \cdot \ln\left[\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right] = \frac{1}{x_0} \cdot \ln(e) = \frac{1}{x_0}$$

4.5 Die Kettenregel (Ableitung hintereinander ausgeführter Funktionen)

Satz: $f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) * v'(x)$ bezeihungsweise:

$$f(x) = v(v(x)) \Rightarrow \frac{d}{dx}(f(x)) = \frac{d}{d(z)} u(z) * \frac{d}{dx} z = \frac{du}{dz} * \frac{dz}{du}$$ wobei z = v(x)

Beweis: Dafür setze man v(x + Δx) = z + Δz und verwende die Definition des DQ

Beispiele:

1. f(x) = ln(ln(x))
2. f(x) = $(\ln(x))^2$

Anwendung:

Besteht zwischen x und y = y(x) ein Zusammenhang der Form:

g(y) = h(x), so kann die Ableitung durch Auflösung der Gleichung:

$\frac{dg(y)}{dy} = \frac{dh(x)}{dx}$ gewonnen werden.

Beispiel:

1. ln(y) = x^2 (⇔ y = $e^{(x\wedge 2)}$)
2. logarithmische Differentiation

4.6 Produkt- und Quotientenregel:

Satz: Für differenzierbare Funktionen gilt:

Produktregel: $(u(x)*v(x))' = u'(x)*v(x) + u(x)*v'(x)$

Beweis: $f(x) = u(x)*v(x)$ auf beiden Seiten logarithmieren

$\ln(f(x)) = \ln(u(x)) + \ln(v(x))$ und implizit ableiten

$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{v'(x)}{v(x)}$ mal $f(x) = u(x)*v(x)$

$f'(x) = u'(x)*v(x) + u(x)*v'(x)$

detto für die Quotientenregel!

4.7 Weitere Schritte - skizziert:

- **Die Ableitung der Umkehrfunktion**

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ kann graphisch hergeleitet werden und ist wichtig für das Folgende

- **Ableitung von Exponentialfunktion und Potenzfunktion**

Sowohl die allgemeine Exponentialfunktion, als auch die spezielle Exponentialfunktion und die Potenfzunktion können nach dem Logarithmieren implizit differenziert werden.

- **Ableitung der Kreisfunktionen und ihrer Umkehrfunktionen**

Herleitung klassisch!

- **Ableitung der Hyperbelfunktionen inkl. Umkehrfunktionen**

Als Anwendung bisher hergeleiteter Regeln!

5 TECHNISCHE BEISPIELE (SCHÜLERREFERATE)

Literatur[6]: Papula: Ingenieurmathematik

Schalk: Ingenieur-Mathematik 3, Schulbuch für HTL

Schärf: Angewandte Mathematik 3, Schulbuch für HTL

Einige Themen, die die Schüler mit Hilfe der angebotenen Literatur und des Internets bearbeitet haben:

- Biegelinien
- Spira mirabilis (Eli Maor) – inklusive verschiedener Stimmungen in der Musik
- Wurfparabel eines Wasserstrahls (nach Papula, leider fehlen einige wichtige Überlegungen, die allerdings gar nicht so leicht herzuleiten sind!)
- Die Zykloide
- Die Epizykloide
- Das Volumen eines Hühnereis
- Schubkurbeltrieb
- Fallschirmspringer

Diese Referate waren leider nicht so erfolgreich wie der erste Durchgang.

Im zweiten Semester diese Schuljahres war die Zeit sehr knapp, viele Feiertage, Streiktage, Krankheit der Lehrerin, ungünstiger Stundenplan...

So war es ziemlich schwierig, den zweiten Durchgang der Referate zu organisieren und durchzuführen. Es hat sich auch herausgestellt, dass eine mathematische Behandlung technischer Beispiele viel Nachfragen und Überlegen erfordert. Diese Denkweise ist den Schülern nicht so sehr vertraut, sie wenden gerne Regeln an und mögen nicht darüber nachdenken, warum man was wie anwenden kann und darf. Und genau da liegt der Wert dieser Referate – die wesentlich mehr Zeit erfordern würden, als in diesem Schuljahr zur Verfügung war!

[6] Literatur im Anhang

6 WEITERFÜHRENDES, WITZE, GSCHICHTLN, LUSTIGES RUND UM DI

- Treffen sich zwei Funktionen im Unendlichen. Sagt die eine zur anderen: "Lass mich vorbei! Oder ich leite Dich ab!" Sagt die andere: "Mach' doch, mach' doch... ich bin 'ne e-Funktion!" (Diese Geschichte kenne ich schon lange und hab es auf der Internetseite www.mathematik.ch wiedergefunden!) Ein Witz, den wir unseren Schülerinnen und Schülern erst nach einigen Jahren harter Arbeit erzählen können – aber dann merken sie es sich!!
- Dieses Kapitel war viel umfangreicher geplant, einige gute Geschichten finden sich in den im Anhang genannten Büchern.
- **Literatur:**

Dieter Baacke: Die 13 – 18jährigen, 6. Auflage, Beltz Grüne Reihe, 1993, ISBN 3-407-25001-0

Maor, Eli: Die Zahl e -Geschichte und Geschichten. ISBN 3-7643-5093-8, Verlag Birkhäuser, 1996

Meschkovski Herbert: Denkweisen großer Mathematiker, ISBN 3-528-281790, Verlag Vieweg, 1990

Taschner, Rudolf: Das Unendliche. ISBN 3-540-59093-5, Springer Verlag, 1995

Winnicott, Donald W.: Der Anfang ist unsere Heimat, zur gesellschaftlichen Entwicklung des Individuums, Klett Cotta 1990, ISBN 3-608-95471-6