MNI-Fonds für Unterrichts- und Schulentwicklung
S1 „Lernen und Lehren mit Neuen Medien“

DER EINSATZ VON *MATHEMATICA* IM MATHEMATIKUNTERRICHT DER AHS-OBERSTUFE

Martin Dangl, Markus Binder

BG/BRG Waidhofen an der Thaya

Waidhofen an der Thaya, im Juli 2006

INHALTSVERZEICHNIS

ABSTRACT

Computer werden im Unterricht oft als Hilfswerkzeuge gesehen und eingesetzt; die Entwicklung der entsprechenden „Werkzeugkompetenz“ hat in dieser Sichtweise kaum etwas mit der „eigentlichen“ Mathematik zu tun.

Wir sind nicht dieser Ansicht. Im Rahmen des Projektes „Mathematik lernen mit Mathematica*“ argumentieren wir, dass eine Trennung in einen mathematischen Kernbereich und in informatisch-technische Hilfsmittel weder notwendig noch sinnvoll, und im konkreten Fall meist auch nicht möglich ist.*

Der Aufwand, sich in Mathematica einzuarbeiten, ist in jedem Fall gut investiert. Mit dem Computer ändert sich die Art und Weise, wie Mathematik betrieben wird. Was dies für den Unterricht in der Schule bedeuten kann, möchten wir in der vorliegenden Arbeit aufzeigen und diskutieren.

Schulstufe:	9. und 10.
Fach:	Mathematik
Kontaktpersonen:	Mag. Martin Dangl, Mag. Markus Binder
Kontaktadresse:	BG/BRG Waidhofen an der Thaya
	Gymnasiumstraße 1
	3830 Waidhofen an der Thaya
	martin.dangl@chello.at, markusbinder@gmx.at

1 EINLEITUNG

Ein durchgängiger, umfassender Einsatz von Computeralgebrasystemen (CAS) im Mathematikunterricht ändert diesen grundlegend und nachhaltig. So wird etwa das routinemäßige Abarbeiten von Rechenschritten als mathematische Tätigkeit der Schülerinnen und Schüler immer unwichtiger; die grafischen Möglichkeiten des Computers liefern andererseits viele Anreize zu kreativer Betätigung. In jedem Fall kommt es im Unterricht zu einer gewissen Schwerpunktverlagerung: Das Operieren tritt zugunsten anderer mathematischer Tätigkeiten wie Darstellen, Argumentieren, Interpretieren und Begründen in den Hintergrund. Darüber hinaus eröffnet der CAS-Einsatz Möglichkeiten, zusammen mit den Schülerinnen und Schülern mathematisches Tun auch zu reflektieren.

Das alles ist nicht neu. Anfang der Neunzigerjahre wurden die ersten Projekte gestartet (etwa im Rahmen von ACDCA oder der Derive User Group, etwas später auch IMST); seither wird der CAS-Unterricht von vielen kompetenten Lehrerinnen und Lehrern engagiert und vor allem sehr vielfältig-kreativ entwickelt.

Eine erste Frage im *Vorfeld* dieses MNI-Projektes ist die nach den bereits auszumachenden Entwicklungslinien des „CAS-Gesamtprojektes“: Was wurde bisher erreicht, und vor allem: Was sind die *tatsächlichen* Arbeitsschwerpunkte der vielen involvierten Kolleginnen und Kollegen? Eine entsprechende Untersuchung ist *nicht* Gegenstand unseres Projektes, und würde wohl auch – für sich genommen – einen derartigen Rahmen sprengen. Wir haben aber zu obiger Frage einige Vermutungen, die in loser Verbindung zu unserer Arbeit hier stehen, und die wir im Folgenden – notgedrungen etwas vorläufig und vage – kurz darstellen möchten.

Beobachtet man die inhaltlichen Angebote einschlägiger Seminare, Arbeitstagungen und entsprechender Webseiten, so zeigt sich das CAS-Gesamtprojekt (noch immer) getragen und geprägt von einem gewissen „*Pioniergeist*“, was hier keinesfalls abwertend gemeint ist. Mit beachtlichem Engagement wird versucht, das „CAS-Feld“ zu erweitern: Gewinnung von „Neueinsteigern“ und deren Einschulung in die entsprechenden Anwenderprogramme; das „Ausloten“ von CAS-Einsatzmöglichkeiten zusammen mit der Entwicklung neuer, komplexer Anwendungsbeispiele, die Entwicklung CAS-gestützter Unterrichtseinheiten und didaktisch durchdachter Lernpfade. Neuere Entwicklungen gehen unter dem Schlagwort „Medienvielfalt“ über den Einsatz von CAS noch hinaus: Der Trend geht hier zu vorgefertigten Applets und kleineren, benutzerfreundlichen Programmen, die im Sinne einer „neuen Lern- und Prüfungskultur“ gezielt und didaktisch gut überlegt auch in Nicht-CAS-Klassen ohne längere Einarbeitungszeit sinnvoll einsetzbar sind.

Produziert wird diese erstaunliche Vielfalt des Angebots von Kolleginnen und Kollegen, die einen Großteil ihrer Arbeitszeit am Rechner verbringen und neue Einsatzmöglichkeiten erkunden, entsprechende Unterlagen entwickeln und durchaus professionell Anwendungen programmieren. In entsprechenden Veranstaltungen wird dann die erworbene Software-Kompetenz zusammen mit den jeweils eigenen Unterrichtserfahrungen weiter vermittelt. Neben der jeweils eigenen Begeisterung an der Sache ist der Umstand, dass nach wie vor ein Großteil der Kollegenschaft dem CAS-Einsatz skeptisch bis ablehnend gegenübersteht, noch zusätzliche Motivation.

Wo sehen wir nun die Defizite in dieser „Pionierzeit der CAS-Entwicklung“? Nach unserer Einschätzung fehlt es an einer ganz *allgemeinen*, fundierten (Selbst-)Reflexion des Gesamtprozesses. Es gibt Reflexion im Einzelfall, und es gibt auch didaktisch-methodische Beiträge zum CAS-Unterricht. Was fehlt, ist einfach der öffentliche Diskurs, der über die unmittelbar den Unterricht betreffenden Fragen hinausgeht und eine allgemeine Standortbestimmung zum Ziel hat, die den hier angesprochenen Entwicklungsprozess in einen größeren Gesamtkontext stellt.

Eine zweite Frage also: Was wäre von einem derartigen Diskurs zu erwarten? Auch hier können wir die Antwort nur skizzieren: Etwas informell ausgedrückt sollte sich das CAS-Gesamtprojekt durch einen entsprechenden Reflexionsprozess gegenüber dem traditionellen Unterricht „emanzipieren“.

Der Blickwinkel, von dem aus der Einsatz des Computers betrachtet wird, ist meist noch immer ein traditioneller. Die vermeintlichen Defizite seitens der CAS-Schülerinnen und -Schüler sind in diesem gewohnten, „altbewährten“ Rahmen leicht zu benennen; der „Gewinn“ lässt sich dagegen nicht so einfach verkaufen. Der „Mehrwert“ des Neuen wird nur allzu oft an traditionellen Kriterien gemessen, was das CAS-Projekt insgesamt in die Defensive drängt. Mittlerweile ist das „Neue“ gar nicht mehr so neu, und es wäre längst an der Zeit, Diskurse – sofern diese überhaupt stattfinden – auch unter anderen Gesichtspunkten zu führen.

Vor dem Hintergrund des CAS-Einsatzes bietet sich die ausgezeichnete Gelegenheit, den Mathematikunterricht insgesamt kritisch zu reflektieren. Es kann dabei nicht um eine vordergründige Werbeunternehmung für Computeralgebrasysteme gehen; diesen kommt hier eher die Rolle des Auslösers und Katalysators zu. Dazu im Folgenden einige Ansatzpunkte:

Dass dem rein algorithmischen Rechnen in der Unterrichtspraxis ein zu großer Stellenwert zukommt, wird heute schon häufig bemerkt. Im Vergleich dazu sind die tatsächlichen Rechenmöglichkeiten, wie sie in der Mittelschule entwickelt und per Hand (und mit Hilfe des Taschenrechners) bewältigt werden können, äußerst bescheiden. Es zeigt sich, dass die Gewichtung der einzelnen Inhalte durch diese Mittelschul-Rechenmöglichkeiten sehr stark mitbestimmt ist; den Schülerinnen und Schülern wird damit ein mehr oder weniger stark verzerrtes Bild von Mathematik geboten.

Ein häufig geäußerter Vorbehalt gegen den Einsatz von CAS ist der – relativ zu seinem Nutzen – angeblich hohe Aufwand, die „Bedienung des Gerätes“ (Programms) zu erlernen. Entsprechend viel Zeit gehe dabei dem Unterricht der „eigentlichen Mathematik“ verloren. Dahinter steht die Ansicht, dass der Computer als reines *Hilfsmittel* zum Einsatz kommt, und dass das Arbeiten mit dem Programm als rein mechanisches Drücken von bestimmten Tasten eben erlernt werden muss, aber mit der damit betriebenen Mathematik kaum etwas zu tun hat.

Unsere These dazu ist einfach, und steht in unserem Projekt an zentraler Stelle: Das Arbeiten mit dem Computerprogramm ist ein integraler Bestandteil mathematischen Tuns; das Erlernen des Programms ist zugleich auch Erlernen von Mathematik. Dem Einwand, mathematisches Denken werde dabei in die Maschine „ausgelagert“, ist nichts entgegenzuhalten: Im Sinne von Roland Fischers *Materialisierungsthese* ist dieser Auslagerungsprozess *immer schon* ein wesentlicher Teil von Mathematik.

> „Mathematik bietet für bestimmte, häufig auftretende Abstrakta *symbolische, materielle Darstellungsformen* an, die das Abstrakte sichtbar, handhabbar und konkret werden lassen. [...] Es ist zwar Vieles im Kopf möglich – Kopfrechnen, Ideenfindung – die eigentliche, insbesondere gesellschaftliche Wirksamkeit der Mathematik hängt mit der auslagernden Materialisierung zusammen. In diesem Sinne ist der Computer kein Zufall

> der Mathematik, er ist bislang letzter Schritt in einer Serie von Materialisierungen." ([2], Seite 27).

Und weiter:

> „Der Computer ist eine neue Darstellung [von abstrakten mathematischen Sachverhalten], er produziert aber auch neue Darstellungsarten. [...] In dem Ausmaß, in dem der Computer uns das regelhafte Operieren abnimmt, wird eine neue Kreativität in der Mathematik gefordert: Das Erfinden neuer Darstellungsformen." ([2], Seite 65)

Es wäre interessant, die Konsequenzen der Materialisierungsthese für den Mathematikunterricht weiter zu entwickeln. Vor allem aber könnten davon auch wesentliche Impulse und Orientierungen für die Diskussion um den CAS-Einsatz ausgehen.

> „Die Mathematik der Schule [...] besteht darin, genormte Darstellungsformen einzuüben. [...] Eine offene Mathematik, eine Mathematik als Darstellungs- und Kommunikationsmittel, wird darüber hinaus auch das *Erfinden neuer Darstellungsformen* fördern müssen oder zumindest den Prozess, wie es zu einer bestimmten Darstellungsform kommt, reflektieren." ([2], Seite 91)

In Bezug auf unsere Projektarbeit bringen wir die Materialisierungsthese auf die kurze Formel: „Informatik ist Mathematik". Beim Arbeiten mit dem *Mathematica*-Programm kommt man – stärker als bei üblicher Mathematik-Software – mit vielen Techniken und Konzepten aus der Informatik in Berührung: Umgang mit Variablen (verschiedene Arten der Speicherung, Übergabe von Variablen, Gültigkeitsbereiche), Umgang mit Zeichenketten, Listen, modulares Arbeiten, Erstellen kleiner Programme etc. Es gibt sicher benutzerfreundlichere Programme; mit *Mathematica* erlernt man jedoch eine sehr klar strukturierte Sprache, in der sich mathematische und informatische Konzepte überschneiden und einander ergänzen; in der konkreten Situation sind diese dann nicht mehr zu unterscheiden. Man kann mit dieser Sprache auf ganz unterschiedlichen Niveaus umgehen, in jedem Fall aber eröffnet sie ein fast unbegrenztes Feld für mathematische Betätigung, weit über den unmittelbaren Unterrichtsbereich hinaus.

> „Mathematik zu treiben besteht über weite Teile in einer *Interaktion zwischen Mensch und Darstellung* (auf dem Papier, am Bildschirm)." ([2], Seite 32).

Diese Interaktion wird durch das Arbeiten im Quellcode wesentlich differenzierter. Die Maschine steht hier dem Benutzer / der Benutzerin nicht als abgeschlossenes System mit einigen wenigen genormten Inputstellen gegenüber.

> „Man verändert die Darstellung, sieht sie an, verändert sie wieder, sieht sie an, usw. usw. Die Routinisierung bietet in Verbindung mit der auslagernden Materialisierung eine Entlastung. An die Stelle abstrakter Konzepte und deren gedanklicher Bearbeitung tritt eine ‚Mechanik der Symbole' ". ([2], ebd.)

Das Arbeiten mit *Mathematica* kommt dieser *allgemeinen* Beschreibung mathematischen Tuns ganz nahe. Gleichzeitig wird aus dieser Sicht klar, dass der Unterschied zwischen dem Arbeiten mit Bleistift und Papier und dem Arbeiten am Computer *kein prinzipieller* ist. Gerade im Hinblick auf die verschiedenen Mathematik-Programme wäre es eine sehr interessante Aufgabe, diese „Interaktion zwischen Mensch und Darstellung" auf einer ganz *allgemeinen* Ebene – unabhängig vom Computer – weiter zu analysieren. Oberflächlich betrachtet könnte man vermuten, dass mit der Leistungsfähigkeit des Programms auch die *prinzipiellen* Unterschiede in dem, was man mathematisches Tun nennt, größer werden. Aus obiger Sicht kann man aber genau das Gegenteil erwarten: Je „höher" die Sprache, d. h. je differenzierter die Interaktionsmöglichkeiten, desto unscheinbarer (unsichtbarer) wird das oft als störend beklagte „Maschinenhafte" der Computermathematik, und desto stärker tritt in dieser vergleichenden Sicht der Arbeitsweisen dann auch das „Routinehafte“ der „Bleistift-Papier-Mathematik“ in Erscheinung.

Mit diesen etwas vorläufigen Bemerkungen ist der theoretische Rahmen (Hintergrund) unseres Projektes skizziert. Es sei nochmals betont, dass es nicht unsere Absicht ist, den CAS-gestützten Unterricht und im Besonderen das Arbeiten mit *Mathematica* als den „besseren“ Mathematikunterricht zu propagieren. Der Grund, warum *wir* damit arbeiten, ist ein ganz banaler: Es gibt heute ganz einfach diese Dinge, und man kann damit in sehr kreativer und effektiver Weise Mathematik betreiben. Wir sind jedoch überzeugt, dass der Computer nicht nur den *Mathematikunterricht*, sondern Mathematik an sich verändert. Unabhängig von der jeweils eigenen Position in diesem Diskurs ist dieser Wandel Anlass zu grundlegender Reflexion. Diese Chance sollte man nicht ungenutzt lassen.

2 SCHWERPUNKTE

2.1 Warum *Mathematica*?

Wie in der Einleitung bereits angedeutet gehen wir von der These aus, dass ein gezielter Einsatz von *Mathematica* im Unterricht weit über das hinausgeht, was man üblicherweise als „Verwendung eines (elektronischen) Hilfsmittels" nennt. Einige Ziele unserer Projektarbeit sind in der einen oder anderen Weise auch mit anderer Mathematik-Software zu erreichen; gleichzeitig sehen wir aber auch – etwa im Vergleich zu Voyage (bzw. TI-92) oder Derive – wesentliche, für die inhaltliche und didaktische Konzeption des Unterrichtes relevante Unterschiede. Die vergleichende Diskussion der Vor- und Nachteile verschiedener Mathematik-Software kann nicht von dem losgelöst werden, was im Unterricht erreicht werden soll. Und genau in diesem und *nur* in diesem Sinne geht es in diesem Projekt auch um *Mathematica*.

Ein für uns wesentliches Charakteristikum von *Mathematica* liegt bereits in der klaren und übersichtlichen Konzeption der Benutzerschnittstelle. So findet man in den oben erwähnten Vergleichsprogrammen (Voyage oder Derive) neben der Eingabezeile bzw. dem Eingabefenster eigene Fenster zum Editieren von Funktionen, von Programmen, von Text, für die Grafik und für die Tabellenausgabe, und eigene Fenster mit entsprechenden Masken zur Steuerung der Optionen, und es gibt daneben eine Menge von Steuerknöpfen, etwa zum Wechseln der Fenster bzw. zum Ändern der Voreinstellungen gewisser Eingabeformate.

Dagegen besteht die Arbeitsumgebung von *Mathematica* in einem Arbeitsfile („Notebook"), in dem sämtliche Funktionen des Programms über den einzugebenden Quellcode aufgerufen und gesteuert werden. Eine einfache Division, aber auch die Programmzeilen einer aufwendigen Grafik werden in ein und derselben Sprache ausgedrückt; es fehlt die Trennung zwischen Objekt- und Metasprache, zwischen den „eigentlichen" mathematischen Ausdrücken und den Anweisungen zur Steuerung des Programms.

Das sieht auf den ersten Blick einigermaßen kompliziert und wenig benutzerfreundlich aus. In der Diskussion stellt sich vielfach die Frage, inwieweit die Schülerinnen und Schüler im Erlernen der *Mathematica*-Sprache überfordert werden, und dass darüber hinaus die eher einfachen Einsatzmöglichkeiten im Unterricht den relativ großen Aufwand des Einarbeitens in das Programm nicht rechtfertigen.

Diese allgemeinen Einschätzungen werden durch unsere bisherige, bereits jahrelange Erfahrung mit *Mathematica* im Unterricht *nicht* bestätigt. Das mag zu einem nicht unwesentlichen Teil darin liegen, dass die logisch sehr klar aufgebaute *Mathematica*-Sprache in ihrer Struktur sehr transparent und dadurch leicht durchschaubar ist. Gleichzeitig bleibt es jeder Schülerin / jedem Schüler weitgehend selbst überlassen, wie weit sie / er selbst beim Erlernen dieser Sprache gehen möchte. Der Einstieg ist in jedem Fall sehr einfach: Man kann – ohne jegliche Einschulung – in *Mathematica* wie mit einem üblichen Taschenrechner arbeiten, und die wichtigsten Algebra-, Grafik- und Tabellenfunktionen stehen dem Einsteiger ohne besondere Einschulung zur Verfügung.

2.2 Die Ausgangsthesen

In jedem Fall ist jedoch das Einarbeiten in die Sprache von *Mathematica* selbst auch schon Einarbeiten in grundlegende mathematisch-informatische Konzepte und die zu erwerbende Kompetenz weit mehr als bloß die Fähigkeit, eine bestimmte Rechenmaschine zu bedienen. Wir kommen damit zum Kernbereich unserer vorliegenden Arbeit. Den Ausgangspunkt fassen wir in den folgenden Thesen noch einmal zusammen:

(1) Es ist nicht möglich, bei der Unterrichtsarbeit mit *Mathematica* (bzw. ähnlich konzipierter Software) die „eigentliche Mathematik" von der „Arbeit an der Rechenmaschine" scharf zu trennen. In der konkreten Situation sind die Übergänge zwischen beiden Bereichen fließend.

(2) Eine künstliche und im Einzelfall eher willkürlich vorgenommene Trennung der Bereiche ist didaktisch weder notwendig noch sinnvoll. Die beiden Bereiche stützen einander wechselseitig, was sich gerade bei langfristigen Lernzielen vorteilhaft auswirken sollte.

(3) Inhaltlich gewinnen im Unterricht jene mathematischen Konzepte an Bedeutung, die auch in der Informatik eine entsprechende Rolle spielen. Entsprechende Schwerpunktverlagerungen - durchaus noch im Rahmen des gültigen Lehrplanes – sehen wir als zukunftsweisenden Aspekt unserer Arbeit.

2.3 Projektziele

In der Projektarbeit möchten wir unsere Thesen in den folgenden Zielen konkret umsetzen. Diese werden zunächst unabhängig von speziellen inhaltlichen Bereichen formuliert, und sie umfassen auch *nicht alle* interessanten Aspekte des *Mathematica*-Einsatzes.

2.3.1 Das Arbeiten mit mathematisch-informatischen Konzepten

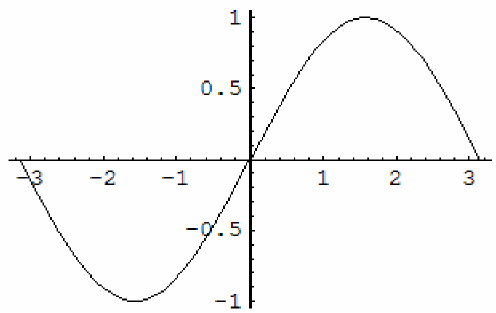
Mathematica basiert auf im Wesentlichen auf zwei sehr mächtigen mathematisch-informatischen Konzepten, die in der konkreten Arbeit ihren Niederschlag finden. Es sind dies das *Funktions-Konzept* und das *Listen-Konzept*.

Der Stellenwert von Funktionen in *Mathematica* ist stark mit Stephen Wolframs grundlegendem Konzept – „everything is an expression"[1] – verbunden. Als Beispiel seien hier zwei unterschiedliche Eingaben angeführt:

In[1]:= `Solve[3 x + 5 == 7, x]`

Out[1]= $\left\{\left\{x \to \frac{2}{3}\right\}\right\}$

In[2]:= `Plot[Sin[x], {x, -π, π}];`



[1] Siehe [6], S. 230ff

Innermathematisch ist Sin[…] – die Sinusfunktion – eine Funktion im engeren Sinn, mit Solve[…, …] löst man die angegebene Gleichung, und Plot[…, …] zeichnet den Graphen der Funktion sin(x) im Intervall [$-\pi$; $+\pi$]. In *Mathematica* liegen hingegen drei syntaktisch gleichartige Ausdrücke – *Funktionen in einem allgemeineren Sinn* – vor: Es gibt bei allen jeweils eine bestimmte Anzahl von Argumentstellen und eine eindeutige Ausgabe. Die Funktionen unterscheiden sich hingegen im Typ der zulässigen Argumente und im Typ der Ausgabe.

Das Listen-Konzept ist in *Mathematica* durchgängig – beispielsweise geben viele eingebaute Funktionen ihre Ergebnisse als Listen zurück. Der Benutzer selbst kann Listen einfach durch Zusammenfassen von Objekten in geschwungenen Klammern erstellen, aber auch mit Hilfe der Table[…]-Funktion generieren. Ein Beispiel:

```
In[1]:= Table[Expand[(x - y)^n], {n, 0, 3}]

Out[1]= {1, x - y, x^2 - 2 x y + y^2, x^3 - 3 x^2 y + 3 x y^2 - y^3}
```

Hier tritt als weiteres mathematisch-informatisches Konzept das der gebundenen und freien Variablen auf. Weitere Anwendungen finden sich häufig, zum Beispiel bei der Plot[…]-Funktion, natürlich aber auch bei Summen und Integralen. Das „handwerkliche“ Operieren – sei es das Bestimmen der Dimension einer Liste, der Zugriff auf einzelne Elemente, das Anfügen oder Entfernen von Elementen – ist eine zusätzlich notwendige Kompetenz.

Prinzipiell sind Listen in *Mathematica* Datenstrukturen, im oben angeführten Beispiel für die Solve[…]-Funktion wird eine Liste von Substitionsregeln zurückgegeben. Das mathematische Äquivalent zur Liste ist das n-Tupel. Es sind viele Operationen möglich, beschränkt man sich auf gewisse Operationen, so lassen sich Listen auch als Vektoren interpretieren. Wie immer obliegt die Verantwortung über den kontextrichtigen Umgang dem Benutzer. Abschließend ein Beispiel:

```
In[1]:= a := {4, 5, 1}
        b := {-3, 0, 2}
        a * b

Out[3]= {-12, 0, 2}
```

Dies ist eine legitime Listenoperation, aber im Rahmen der Analytischen Geometrie ist die Multiplikation sinnlos. Die Schülerinnen und Schüler sind in ihrem mathematischen Tun oft gefordert, wenn es um das Arbeiten im richtigen Zusammenhang geht; hier liefert *Mathematica* einen wichtigen Impuls bei der Festigung mathematischer Begriffe.

2.3.2 Modulares Arbeiten

Beim Lösen von Aufgaben kommt es nicht selten vor, das einzelne Arbeitsschritte oder auch ganze Teile einer Lösung wiederholt durchlaufen werden, wobei sich meist nur einzelne Parameter oder irgendwelche speziellen Einstellungen von Mal zu Mal ändern. In diesen Fällen bietet sich „modulares Arbeiten“ an.

Die einfachste Variante dieser Arbeitsweise besteht darin, entsprechende Teile des Quellcodes (in *Mathematica* sind das einzelne Input-Zellen) zu kopieren, an der gewünschten Stelle einzufügen und nach entsprechender Änderung einiger Parameter erneut auszuwerten.

Auf den ersten Blick klingt das sehr einfach und hat scheinbar nur sehr wenig mit Mathematik zu tun. Analysiert man die einzelnen Arbeitsschritte und die typischen Fehler, die dabei in der Unterrichtspraxis auftreten, so erkennt man eine Reihe von grundlegenden mathematischen Kompetenzen, die hier gefordert werden:

- Erkennen der strukturellen Ähnlichkeit einzelner Lösungsschritte
- Entscheidung über sinnvollen Einsatz des modularen Arbeitens
- Welche Parameter sind zu ändern?

Daraus ergeben sich einige weitere Fragen, die in jedem konkreten Fall zu entscheiden sind:

- Welche Zwischenergebnisse sind von der Parameteränderung betroffen?
- Wirkt sich die Änderung der Parameter auf weitere Rechenschritte aus?
- Wie kann der Wirkungsbereich der einzelnen Variablen festgelegt werden?
- An welchen Stellen des Lösungsweges können Eingriffe von außen (Auslesen von Zwischenergebnissen und ein Einsetzen per Hand) vermieden werden?

Insgesamt kommt es zu einer „globaleren" Sicht des gesamten Lösungsweges, was zwangsläufig auch eine *prinzipielle* Änderung des Arbeitsstils nach sich zieht. Meist wird die Erstversion der Ausarbeitung nach entsprechender Korrektur der Fehler weiter bearbeitet, einzelne Schritte werden zusammengezogen, einzelne Teile werden zu einer etwaigen späteren Verwendung entsprechend adaptiert, man versucht, das Speichern überflüssiger Variablen zu vermeiden und wichtige Zwischenergebnisse in geeigneter Form abzuspeichern (einfache oder indizierte Variable, Term, Funktion, Gleichung etc.). Speziell bei Grafiken wird man Details erst in einem zweiten oder dritten Arbeitsdurchgang berücksichtigen, wobei dann meist weitere Daten zu berechnen sind und damit die Ausarbeiten erneut modifiziert werden muss.

Wir möchten diese verschiedenen Aspekte des modularen Arbeitens an einem sehr einfachen *Demonstrationsbeispiel* erläutern. Die Lösung kann auch durch Kopfrechnung ermittelt werden, aber darum geht es hier nicht.

Aufgabe: Die Graphen der beiden Funktionen $f: \ y = -x^2 - 4x$ und $g: y = k \cdot x$ schneiden einander im Nullpunkt. Berechne für $k = 0.5$, $k = 1$ und $k = 1.5$ jeweils den zweiten Schnittpunkt (falls dieser existiert) und überprüfe das Ergebnis grafisch.

Version 1

```
In[1]:=  f[x_] := -x^2 + 4 x;
```

Version 2

```
In[1]:=  f[x_] := -x^2 + 4 x;
         g[x_] := k * x;
```

1

```
In[2]:= g1[x_] := 1/2 * x;
        Solve[f[x] == g1[x], x]

Out[3]= {{x → 0}, {x → 7/2}}

In[4]:= f[7/2]

Out[4]= 7/4
```

```
In[3]:= g1[x_] = g[x] /. k → 1/2;
        lsg := Solve[f[x] == g1[x], x][[2]];
        x1 = x /. lsg;
        y1 = f[x1];
```
2

```
In[5]:= g2[x_] := x;
        Solve[f[x] == g2[x], x]

Out[6]= {{x → 0}, {x → 3}}

In[7]:= f[3]

Out[7]= 3
```

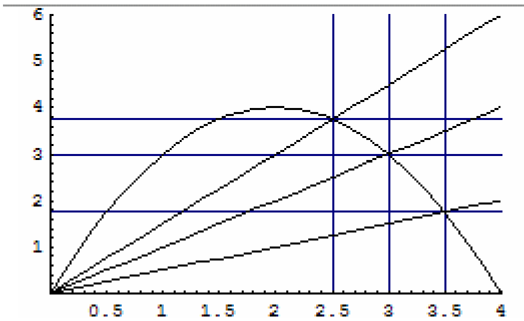
```
In[6]:= g2[x_] = g[x] /. k → 1;
        lsg := Solve[f[x] == g2[x], x][[2]];
        x2 = x /. lsg;
        y2 = f[x2];
```
3

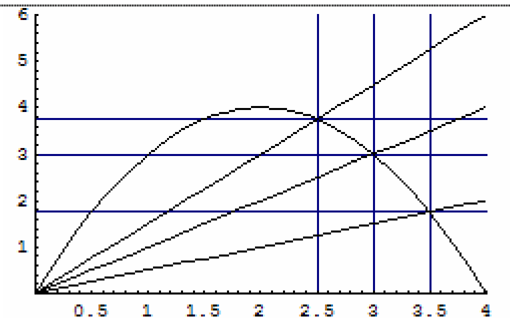
```
In[8]:= g3[x_] := 3/2 * x;
        Solve[f[x] == g3[x], x]

Out[9]= {{x → 0}, {x → 5/2}}

In[10]:= f[5/2]

Out[10]= 15/4
```

```
In[9]:= g3[x_] = g[x] /. k → 3/2;
        lsg := Solve[f[x] == g3[x], x][[2]];
        x3 = x /. lsg;
        y3 = f[x3];
```
4

```
In[11]:= Plot[{f[x], g1[x], g2[x], g3[x]},
           {x, 0, 4},
           PlotRange → {{0, 4}, {0, 6}},
           GridLines →
            {{7/2, 3, 5/2}, {7/4, 3, 15/4}}];
```

```
In[12]:= Plot[{f[x], g1[x], g2[x], g3[x]},
           {x, 0, 4},
           PlotRange → {{0, 4}, {0, 6}},
           GridLines →
            {{x1, x2, x3}, {y1, y2, y3}}];
```
5





6

Version 1 ist eine sehr einfache Variante und wurde oben bereits angesprochen. Schritt 2 (Berechnung des Schnittpunktes) wird zwei Mal kopiert; nach Änderung der Parameter werden die kopierten Zellen erneut ausgewertet (3 und 4). Zum Einzeichnen der Schnittpunkte in der Grafik müssen die Koordinaten erneut eingegeben werden (5). Die kopierten Teile sind sehr kurz und damit die Arbeitsersparnis relativ gering.

Version 2 ist dagegen schon von höherem Level. Der wesentliche Vorteil liegt darin, dass die Zwischenergebnisse nicht mehr ausgelesen und zur Weiterverarbeitung per Hand eingesetzt werden müssen (Schritt 2). Dazu sind bereits einige *Mathematica*-Kenntnisse notwendig: *Mathematica* gibt die Lösungen der Gleichung als Liste zurück. Das zweite Element dieser Liste wird herausgegriffen und über Substitution als x-Koordinate x_1 des Schnittpunktes abgespeichert. y_1 wird automatisch berechnet.

Schritt 2 ist leichter „wieder verwendbar“. Die notwendigen Änderungen in den kopierten Versionen sind bereits „schematisch“ durchführbar (Änderung der Indizes).

Für eine etwaige Änderung der k-Werte ist nur mehr ein minimaler Eingriff notwendig. Der nächste Entwicklungsschritt (***Version 3***) ist damit bereits vorbereitet.

Version 3

```
In[1]:= f[x_] := -x^2 + 4 x;
        g[x_] := k * x;
```

1

```
In[3]:= schnitt[κ_] := Module[{lsg},
          gκ[x_] = g[x] /. k → κ;
          lsg := Solve[f[x] == gκ[x], x][[2]];
          xκ = x /. lsg; yκ = f[xκ];
        ];
```

Die Berechnung des Schnittpunktes wird nun explizit in dem Modul „schnitt[κ_]“ durchgeführt; Der Anstieg k der Geraden wird als Parameter κ übergeben. Die drei Funktionen und die Koordinaten der Schnittpunkte werden als indizierte Variable angelegt.

2

```
In[4]:= schnitt[0.5];
        schnitt[1];
        schnitt[1.5];
```

Zur Berechnung der drei Schnittpunkte wird das Modul jeweils mit den entsprechenden Parametern ausgewertet. Damit sind die Koordinaten unter den entsprechenden Namen abgespeichert und stehen zu weiteren Berechnungen zur Verfügung.

3

```
In[7]:= Plot[{f[x], g0.5[x], g1[x], g1.5[x]},
          {x, 0, 4},
          PlotRange → {{0, 4}, {0, 6}},
          GridLines →
           {{x0.5, x1, x1.5}, {y0.5, y1, y1.5}}];
```

4

In der letzten ***Version 3*** werden indizierte Variable eingesetzt. Darüber hinaus muss ganz bewusst mit den verschiedenen Typen und Einsatzmöglichkeiten von Variablen umgegangen werden: Der Anstieg *k* wird als Funktonsvariable κ (eine “Form-variable“, syntaktisch durch den Unterstrich gekennzeichnet), zum Abspeichern der Lösungen *lsg* als *lokale* Variable angelegt, die Punktkoordinate jedoch als indizierte Variable mit globalem Gültigkeitsbereich.

Wir haben im obigen Demonstrationsbeispiel von den möglichen Realisierungen des mathematisch sehr einfachen Lösungsweges eher willkürlich drei herausgegriffen. Es ist Ziel unseres Unterrichtes, den Bereich der Realisierungsmöglichkeiten in *Mathematica* ständig zu erweitern, nicht aber, einige wenige Standardmethoden vorzugeben, die dann von den Schülerinnen und Schülern schematisch eingelernt werden. Diese sollen ihren jeweils eigenen Arbeitsstil entwickeln; wie weit Einzelne in dieser Entwicklung gehen, hängt nicht zuletzt von deren Interesse, Leistungsfähigkeit und –bereitschaft ab und obliegt innerhalb eines gewissen Rahmens ihrer eigenen Entscheidung.

Naturgemäß ist ein gewisses Mindestmaß an *Mathematica*-Kompetenz notwendig. Aber das ist hier nicht das Wesentliche, und erfahrungsgemäß tauchen in dieser Hinsicht auch keine größeren Probleme auf. Didaktisch gehen wir dabei so vor, dass die *Mathematica*-Kenntnisse nicht „auf Vorrat“, sondern stets an einem konkreten *mathematischen* Problem entwickelt werden. Aus unserer Sicht wäre auch hier eine Trennung in mathematische und informatische (technisch-werkzeugorientierte) Kompetenzen künstlich und nicht zweckdienlich.

Version 3 weist ohne Zweifel den höchsten Grad an Komplexität auf (wie immer dieser auch im Detail definiert sein mag). Das bedeutet aber nicht, dass dies in dieser (isolierten) Aufgabe auch die „optimale“ Lösungsvariante ist; es heißt auch nicht, dass die kompetenteren Schülerinnen und Schüler diese Version wählen sollten. Konkret würde ich Version 3 nur dann wählen, wenn damit weitere Fragestellungen verbunden wären, in denen der Anstieg *k* oder auch andere Funktionsparameter variabel zu halten sind. Aber auch in diesem Fall würde ich möglicherweise mit Version 1 beginnen, diese dann laufend modifizieren und schließlich etwas Ähnliches wie Version 3 erhalten.

Das wirft nun noch einmal ein besonderes Licht auf das, was wir in einem erweiterten Sinn „modulares Arbeiten“ nennen. Im Vergleich zur „Bleistift-Papier-Mathematik“ sind hier in der zeitlichen Abfolge der Arbeitsschritte nicht so zwingend vorgegeben. So kann es etwa mehrere „Durchläufe“ mit entsprechenden Modifikationen geben, man kann aber auch mit der Erstellung eines Moduls beginnen, das erst später ausgewertet wird, nachdem die zu übergebenden Parameter als Zwischenergebnisse vorliegen.

Man vergleiche dies mit dem Malen eines Bildes: Da mag es viele Farbschichten geben, die schließlich im fertigen Bild nicht mehr sichtbar sind, aber trotzdem wesentliche Stufen hin zur Vollendung des Kunstwerkes darstellen. Bei der Betrachtung des Bildes kommt es auf das *gleichzeitige* Erfassen aller seiner Teile an. Und wenn auch manchmal der Blick im Bild umherwandert, so ist er doch nicht an einen bestimmten Weg gebunden.

Natürlich muss auch bei traditioneller Arbeitsweise (ohne Computer) der gesamte Lösungsweg von Beginn an vorgedacht werden. Die einzelnen Schritte müssen dann aber doch wie Töne einer Melodie in der vorgezeichneten Reihenfolge ausgeführt werden.

Wir glauben, dass die hier skizzierte Arbeitsweise Kompetenzen fördert, das eigene mathematische Tun in seinem Zusammenhang leichter zu überblicken, zu diskutieren und gegebenenfalls zu reflektieren.

2.3.3 Organisation der eigenen Arbeitsunterlagen

Mit dem hierarchischen Dokumentkonzept stellt *Mathematica* auch Bedienelemente zur Handhabung und Strukturierung von Dokumenten zur Verfügung. Es gibt unter anderem Verfahren zur optischen wie auch inhaltlichen Gliederung eines Dokuments, zum Beispiel mittels Überschriftsebenen; zusätzlich können interne Verknüpfungen mit Hilfe von hyperlinkartigen Verweisen angelegt werden.

Mit diesen Möglichkeiten haben Schülerinnen und Schülern größere Freiheit beim Arbeiten und gleichzeitig auch eine größere Verantwortung im generellen Umgang mit ihren Unterlagen.

Die Organisationstätigkeit erstreckt sich in der „täglichen“ Arbeit auf Lern- und Arbeitsskripten, darüber hinaus aber auch auf das Aufbereiten von individuell abgestimmten Prüfungsunterlagen und Präsentationsdokumenten.

3 PROJEKTABLAUF

3.1 Rahmenbedingungen und Planung

Bei den Projektklassen handelt es sich um eine fünfte Klasse Realgymnasium mit 22 Schülerinnen und Schülern (erstes Jahr mit *Mathematica*) sowie um eine sechste Klasse Gymnasium mit 18 Schülerinnen und Schülern (zweites Jahr mit *Mathematica*). Die vier bzw. drei Wochenstunden Mathematik werden in einem Sonderunterrichtsraum mit Notebookausstattung in Klassenstärke sowie interaktiver Projektionstafel und Wireless-LAN abgehalten. Eine wichtige technische Rahmenbedingung ist die Verwendung einer WeLearn-Plattform, darüber hinaus haben alle Schülerinnen und Schüler privat sowohl Zugang zum Internet als auch einen PC mit einer *Mathematica*-Installation.

Die Lernplattform weist eine unkomplizierte Struktur in der Handhabung auf und erfüllt die wesentlichen Anforderungen des Unterrichts: Austausch von Daten (Unterlagen, Hausübungen, Schularbeiten) und Austausch von Informationen über Foren.

Mathematica wird nicht nur als Computeralgebrasystem, sondern auch gleichzeitig als Mittel zur Dokumentation verwendet; durch die vielfältigen Möglichkeiten zur Unterlagenerstellung kann *Mathematica* als Textverarbeitungsprogramm mit mächtiger mathematischer Unterstützung gesehen werden. Allfällige weitere Aufzeichnungen führen die Schülerinnen und Schüler in einer üblichen Schulübungs- und Hausübungsmappe. Die Vollständigkeit und Organisation der Unterlagen obliegt der Verantwortung der Schülerinnen und Schüler.

Durch das technische und organisatorische Umfeld ergeben sich automatisch bestimmte Arbeitsweisen im Unterricht. Neben notwendigen Frontalsequenzen treten häufig Phasen des selbständigen Arbeitens – besonders auch mit experimentellem Charakter – sowie der Partner- und Gruppenarbeit auf. Grundlage für die Tätigkeiten im Unterricht sind vom Klassenlehrer über die Lernplattform zur Verfügung gestellte Arbeits- und Lernskripten, die in Form von *Mathematica*-Notebooks vorliegen.

Im Rahmen des geplanten Ablaufs des Schuljahrs war eine durchgehende Beobachtung der Entwicklung der in den Projektzielen genannten Kompetenzen geplant, insofern ergab sich keine Unterteilung des Jahrs in „Projektphase“ und „Normalphase“. Unser Interesse galt (und gilt auch in den kommenden Schuljahren) langfristigen Entwicklungen im Umgang mit Mathematik.

Ebenfalls geplant waren zwei Zeiträume für Evaluationstätigkeiten, einer in der Mitte des Schuljahres und ein weiterer gegen Ende. Als externen Betreuer konnten wir Dr. Helmut Heugl gewinnen, dessen Mitarbeit uns letztlich zahlreiche zusätzliche Einsichten in unser eigenes Arbeitsgebiet einbrachte. Mehr zu den Ergebnissen der Evaluation folgt in Kapitel 4.

3.2 Bericht zur 5. Klasse

3.2.1 Allgemeine Bemerkungen

Nach einer kurzen Anlaufphase von etwa zwei Wochen, die für die Herstellung des technischen Umfelds benötigt wurde, folgte der Einstieg in das Kapitel „Gleichungen und Funktionen“. Auf eine Phase des „Erlernens des Computerprogramms

Mathematica" wurde bewusst verzichtet, im Mittelpunkt der Stunden stand demzufolge stets Mathematik. Der allgemeine Umgang mit *Mathematica* sowie spezielle Werkzeuge (z. B. zur Formatierung, zur Gliederung, zum Formelsatz) wurden bei Bedarf besprochen und flossen so – ohne selbst im Mittelpunkt zu stehen – in den täglichen Umgang mit dem Programm ein.

In die ersten zwei Monate des Schuljahrs fiel auch das aktive Wahrnehmen der Eigenverantwortung durch die Schülerinnen und Schüler. Die Anforderung, Hefte und Bücher verlässlich zur Stunde mitzubringen, unterscheidet sich doch wesentlich von der Anforderung, die (elektronischen) Unterlagen vollständig organisiert und immer verfügbar zu haben. Die Notwendigkeit gut geführter eigener Unterlagen steuerte letztendlich in positiver Weise den individuellen Einsatz bei der Sammlung und Organisation der *Mathematica*-Notebooks.

Das Kapitel „Gleichungen und Funktionen" stand wie eingangs erwähnt früh im Schuljahr auf dem Programm, und hier fand bereits eine erste Festigung mathematischer Begriffe durch *Mathematica* statt. Ein Beispiel:

Der (mathematische) Ausdruck „$y = 5x - 2$" kann ohne zusätzliche Information nicht eindeutig als Gleichung, als Definition für y oder als Substitutionsregel gedeutet werden. Im traditionellen Unterricht ist eine Unterscheidung nicht immer notwendig, da meist klar ist, „was gemacht werden muss". Tatsächliche Eindeutigkeit gibt es jedoch nur durch Überlegungen zum richtigen Kontext. Genau dazu zwingt aber *Mathematica* – im Gegensatz zu manch anderem CAS – den Benutzer. Es muss bewusst entschieden werden, welche der folgenden Umsetzungen sinnvoll ist:

```
In[1]:= y == 5 x - 2

In[2]:= y := 5 x - 2

In[3]:= y → 5 x - 2
```

Soll durch „$y = 5x - 2$" ein funktionaler Zusammenhang zwischen zwei Größen beschrieben werden, ist hingegen keine der drei Versionen brauchbar; hier verwendet man daher

```
In[4]:= f[x_] := 5 x - 2
```
.

Von Anfang an wurden grafische Darstellungen in das mathematische Arbeiten eingeflochten. Der Umgang mit Darstellungen, die Veränderung und das Erstellen von Darstellungen waren stets ein wichtiger, „dualer" Schwerpunkt zur algebraisch-rechnerischen Behandlung eines Sachverhalts. *Mathematica* bietet eine Fülle von Möglichkeiten, allein die Plot[…]-Funktion zum Darstellen funktionaler Zusammenhänge lässt durch zahlreiche Optionen vielfältige grafische Ergebnisse zu. Zu Beginn des Schuljahres wurde eher auf Kompetenzen im Verändern gegebener, fertiger Darstellungen gelegt; im Lauf des Schuljahres fand eine Ausweitung auf andere Formen (z.B. ListPlot[…] für Streudiagramme) bzw. Darstellungen mit allgemeinen Grafikobjekten wie Strecken und Punkten statt.

Die abschließenden Großkapitel – Koordinatengeometrie sowie Trigonometrie – stützten sich stark auf die eben ausgeführten Konzepte. Vor allem das Arbeiten mit grafischen Darstellungen hat eine nicht unwesentliche Steuerwirkung beim selbständigen Arbeiten: Grafiken geben eine starke Rückmeldung, ob eine Ausarbeitung in die gewünschte Richtung führt oder nicht und sind so eine nicht zu unterschätzende Plausibilitätsprüfung eines Ergebnisses.

3.2.2 Aufgabenanalyse aus der analytischen Geometrie

Ich möchte im Folgenden die Ausarbeitung einer Aufgabe diskutieren, die in der vorliegenden Form von einer Schülerin im Rahmen einer Hausübung tatsächlich so abgegeben wurde. Die Aufgabenstellung ist sehr einfach und lässt Freiraum in der Bearbeitung.

Aufgabe: Berechne den Schnittpunkt der Geraden $\vec{j}(t)=\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\3.5\end{pmatrix}$ und $\vec{k}(t)=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$. Stelle die Geraden sowie die Richtungsvektoren und alle wichtigen Punkte grafisch dar.

Lösung:

```
In[21]:= pA := {4, -1}; v := {-1, 3.5}
         j[t_] := pA + t v
         pB := {3, 1}; w := {4, -3}
         k[t_] := pB + t w
```

Die Definition der beiden Geraden erfolgt nicht direkt, sondern mit Hilfe der später noch benötigten „Teilobjekte" (Punkte A und B, Richtungsvektoren v und w). 1

```
In[25]:= loes = Solve[j[t] == k[s], {s, t}][[1]]
         j[t] /. loes
         k[s] /. loes

Out[25]= {s → 0.136364, t → 0.454545}

Out[26]= {3.54545, 0.590909}

Out[27]= {3.54545, 0.590909}
```

Die erste Zeile ist ein gutes Beispiel für das Zerlegen und Verwerten einer Funktionsrückgabe: „Solve[…]" liefert eine Liste von Substitutionsvorschriften (in diesem Fall eine „Doppelliste", die mit [[1]] in eine Einfachliste umgeformt wird). Das Einsetzen der gefundenen Parameterwerte in die Vektorfunktion dient der Überprüfung des Schnittpunkts,… 2

```
In[28]:= pS = %

Out[28]= {3.54545, 0.590909}

In[29]:= j[t] == k[s] /. loes

Out[29]= True
```

Der Schnittpunkt hat ca. die Koordinaten $S(3.55; 0.59)$.

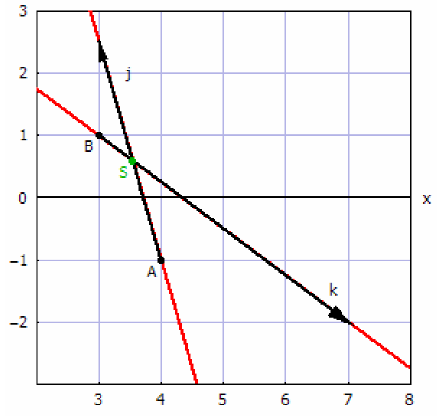
…der in der nächsten Eingabe definiert und dann in allgemeiner Form noch einmal überprüft wird. 3

```
In[35]:= Show[{xyRaster[1, 1],
             Strecke[j[-10], j[10]],
             Strecke[k[-10], k[10]],
             Punkt[pA, "A", {1, 1}],
             PfeilSchwarz[pA, pA + v],
             Punkt[pB, "B", {1, 1}],
             PfeilSchwarz[pB, pB + w],
             PunktGruen[pS, "S", {1, 1}],
             Graphics[{Text["k", {6.8, -1.5}],
               Text["j", {3.5, 2}]}]
           }, DisplayFunction → $DisplayFunction,
           PlotRange → {{2, 8}, {-3, 3}}];
```

Für die grafische Darstellung werden Punkte und Richtungsvektoren verwendet.

„**Show[…]**" und „**Graphics[…]**" sind in *Mathematica* eingebaute Funktionen, „**Strecke[…]**" und „**Punkt[…]**" hingegen Funktionen aus dem von mir vorgegebenen Pool. 4

Zum Vergleich sind „**PfeilSchwarz[…]**" und „**PunktGruen[…]**" Beispiele für die von der Schülerin individuell angepassten zusätzlichen Funktionen ihres eigenen Pools.



Die bei der Hausübungspräsentation gestellte Interpretationsfrage nach der Bedeutung der beiden Parameterwerte,
die beim Lösen auftreten, ist mit Hilfe 5
der so konzipierten Darstellung einfach: Es handelt sich um die Stauchungsfaktoren der jeweiligen Richtungsvektoren der beiden Geraden.

An Hand dieses Beispiels wird sichtbar, dass die Möglichkeit des modularen Arbeitens und die mathematisch-informatischen Konstrukte in *Mathematica* eine zum gewohnten traditionellen Bild recht unterschiedliche Planung und Durchführung der Ausarbeitung erlauben, ja fast automatisch ergeben. Das parallele Denken in Rechnung und Darstellung bietet sich in den Kapiteln der 5. Klasse an und wurde im Lauf des Jahres entsprechend forciert.

3.3 Bericht zur 6. Klasse

Die Umsetzung unserer Projektziele soll hier an konkreten Beispielen aus den beiden Bereichen „Analytische Geometrie im Raum“ und „Statistik und Datenanalyse“ dargestellt werden.

3.3.1 Aufgabenanalyse aus der analytischen Geometrie

Ein wesentlicher Vorteil des Computereinsatzes in der Geometrie besteht naturgemäß in der Möglichkeit, alles Gerechnete auch grafisch darzustellen. Ich gehe hier im Unterricht noch einen Schritt weiter, indem Aufgaben auch *konstruktiv* gelöst werden. *Mathematica* stellt gerade für dreidimensionale Grafiken eine Menge von Grafikobjekten und entsprechende Zeichentechniken zur Verfügung.

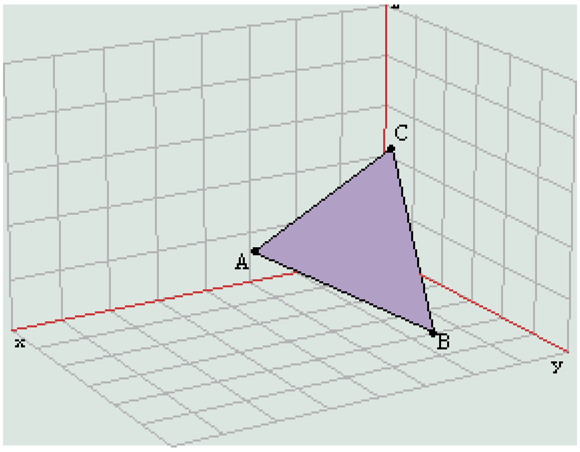
Grafikobjekte sind im Prinzip schon mit einem relativ geringen Aufwand an Quellcode zu erzeugen. Will man jedoch Punkte, Strecken, Geraden etc. auch entsprechend bezeichnen und noch diverse Optionen einzustellen, können Grafikcodes auch umfangreicher werden. In diesen Fällen ist es vorteilhaft, eigene Grafikmodule zu erstellen. Ich habe einige derartige Module erstellt und für sämtliche Arbeiten zur Verfügung gestellt, wobei diese dann von den Benutzern entsprechend adaptiert und weiter entwickelt werden konnten. Von Schülerinnen und Schülern mit Programmiererfahrung wurde diese Gelegenheit dann auch tatsächlich genutzt.

Im folgenden Beispiel werden einige dieser selbst angefertigten Module verwendet. Ich wähle hier wieder bewusst eine sehr einfache Aufgabenstellung, um die im Rahmen unserer Projektziele zur Diskussion stehenden Arbeitstechniken in den Vordergrund zu stellen.

Aufgabe

Die Ebene ε ist durch die drei Punkte $A(7|2|2)$, $B(3|8|0)$, $C(1|2|5)$ gegeben.
Bestimme die Schnittpunkte S_x, S_y und S_z der Ebene mit den Koordinatenachsen.
Zeichne die Schnittpunkte und das Dreieck $S_x S_y S_z$ als Polygon ein.

```
a := {7, 2, 2}; b := {3, 8, 0};
c := {1, 2, 5};
Show[
  Arbeitsblatt[{0, 16}, {0, 12}, {0, 10}],
  Graphics3D[Polygon[{a, b, c}]],
  StreckeP[{{a, "A"}, {b, "B", {-1, 1}},
    {c, "C", {-1, -1}}}],
  DisplayFunction → $DisplayFunction];
```



Lösung

```
ε[λ_, μ_] := a + λ (b - a) + μ (c - a);
```

Entscheiden:

In welcher Form soll die Ebene eingegeben werden (mehrere Optionen!) 1

```
lsg := Solve[ε[λ, μ] == {x, 0, 0}, {λ, μ, x}];
lsg
```

$$\left\{\left\{\lambda \to -\frac{1}{3}, \mu \to -\frac{8}{9}, x \to \frac{41}{3}\right\}\right\}$$

```
sx := {x, 0, 0} /. lsg[[1, 3]]; sx
```

$$\left\{\frac{41}{3}, 0, 0\right\}$$

Der mathematische Lösungsansatz.

Die Lösung wird zur Kontrolle angezeigt,

Der Schnittpunkt wird dann aber direkt (ohne äußeren Eingriff) unter sx gespeichert. 2

```
lsg := Solve[ε[λ, μ] == {0, y, 0}, {λ, μ, y}];
sy := {0, y, 0} /. lsg[[1, 3]]; sy
```

$$\left\{0, \frac{41}{4}, 0\right\}$$

Modulares Arbeiten: Die beiden Eingabezeilen von (2) werden kopiert und entsprechend angepasst. 3

Das Zwischenergebnis (Lösung des Gleichungssystems) wird nicht mehr angezeigt.

```
lsg := Solve[ε[λ, μ] == {0, 0, z}, {λ, μ, z}];
sz := {0, 0, z} /. lsg[[1, 3]]; sz
```

$$\left\{0, 0, \frac{41}{6}\right\}$$

Modulares Arbeiten: 4

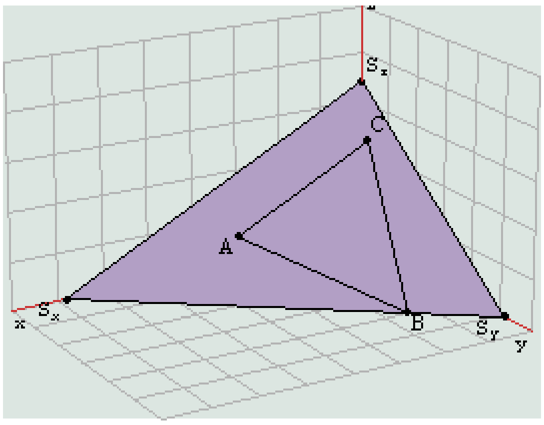
Zweite Wiederholung des Rechenschrittes (2).

```
Show[
  Arbeitsblatt[{0, 16}, {0, 12}, {0, 10}],
  Graphics3D[Polygon[{a, b, c}]],
  StreckeP[{{a, "A"}, {b, "B", {-1, 1}},
    {c, "C", {-1, -1}}}],
  Graphics3D[Polygon[{sx, sy, sz}]],
  Punkt[sx, "Sx"], Punkt[sy, "Sy"],
  Punkt[sz, "Sz", {-1, -1}],
  DisplayFunction → $DisplayFunction];
```

Modulares Arbeiten:

In die bestehende Grafik werden die einzuzeichnenden geometrischen Elemente eingefügt.

Dabei wir mit „**Polygon[…]**“ ein *Mathematica*-Grafikelement verwendet. „**Punkt[…]**“ ist dagegen ein selbst definiertes Grafikmodul, genauso wie auch „**Arbeitsblatt[…]**“ und „**StreckeP[...]**“



Die erste Grafik ist zusammen mit dem entsprechenden Quellcode Teil der Angabe.

In einem ersten Arbeitsschritt muss explizit überlegt werden, in welcher Form die Ebene eingegeben werden soll. Die Entscheidung hängt von den nachfolgenden Rechenschritten ab, verlangt aber in jedem Fall einen bewussten Umgang mit den zur Auswahl stehenden mathematischen Objekten. In diesem Fall wird die Ebene als Vektorfunktion in den beiden Parametern λ und μ dargestellt; man könnte die Ebene aber auch als Vektorgleichung, als einfachen Vektorterm oder in Normalvektorform festlegen.

Der mathematische Lösungsansatz besteht im Aufstellen der Gleichung im Schritt (2). Es muss klar sein, welche Art von Gleichung hier vorliegt, und nach welchen Variablen aufgelöst werden soll. Das Auslesen der Lösung und Speichern des Schnittpunktes ist für die meisten Schülerinnen und Schüler der 6. Klasse bereits ein Routineschritt.

Dieser Rechenschritt wird zwei Mal wiederholt, indem (2) kopiert und jeweils entsprechend adaptiert wird.

Schließlich müssen die Lösungspunkte in der Grafik gezeichnet werden. Zur Bearbeitung des gegebenen Grafikcodes muss seine syntaktische Struktur erkannt werden. Weiters müssen die verwendeten Grafikmodule „Punkt[…]“ bekannt sein, um die passenden Parameter als Argumente übergeben zu können.

In den Rechenschritten (1) und (2) zeigt sich deutlich die Verschiebung der mathematischen Kompetenzen gegenüber dem traditionellen Unterricht ohne Computereinsatz. Die Arbeit am Rechner erfordert an jeder Stelle eine klare Übersicht, mit welchen mathematischen Objekten die geometrischen dargestellt werden, und wie sie zu bearbeiten sind. Beim Rechnen mit Bleistift und Papier sind derartige Überlegungen kaum gefordert. Aufgrund der stark eingeschränkten Rechenmöglichkeiten müssen alle möglichen Rechenvorteile genutzt werden, was denkbare alternative Lösungswege von vornherein ausschließt.

3.3.2 Aufgabenanalyse aus der Statistik

Beim Erstellen bzw. Auslesen größerer Datenmengen stellt sich die Frage nach der Datenstruktur. Es wurde bereits erwähnt, dass in Mathematica dafür das Konzept der Listen zur Verfügung steht. Listen können beliebig ineinander verschachtelt werden und so jede mögliche Datenstruktur darstellen.

Das Arbeiten mit Datenstrukturen erfordert einige einfache, grundlegende mathematische Kompetenzen, die im traditionellen Unterricht (an dieser Stelle) praktisch überhaupt nicht ausgebildet und meist ausschließlich der Informatik zugeordnet werden.

Einige dieser grundlegenden Aspekte des Arbeitens mit Daten werden im folgenden Beispiel gezeigt.

Aufgabe

Die Tabelle enthält die durchschnittlichen Bevölkerungszahlen der neun Bundesländer von Österreich für die Jahre 1991 bis 2004. Vergleiche für diesen Zeitraum die Bevölkerungsentwicklung für Wien, Burgenland und Gesamtöstereich in einer entsprechenden Grafik.
Die entsprechenden Daten sind in der Liste data bereitgestellt.

Jahr	Bgld	K	NÖ	OÖ	Sbg	Stmk	Tirol	Vbg	Wien
1991	272951	550042	1479187	1320567	484807	1174524	628284	331930	1512599
1992	274943	555231	1495408	1337961	493732	1181085	636210	336160	1529979
1993	275958	558935	1508220	1350814	501215	1185486	642893	338640	1543471
1994	276908	560216	1515446	1357804	505238	1186122	647854	340471	1546059
1995	277689	561281	1520637	1360967	507454	1185830	651639	341951	1540830
1996	277703	561703	1523536	1362597	509157	1185066	655528	343135	1540591
1997	277368	561280	1525554	1363843	510501	1184310	659288	344354	1541543
1998	276973	560972	1528805	1365441	511107	1183702	662471	345766	1541552
1999	276486	560821	1532920	1368299	512049	1183146	665773	347443	1545386
2000	276083	560129	1537266	1371579	513853	1182684	669479	349257	1551236
2001	276450	560371	1542574	1376700	516442	1186273	674147	351752	1558337
2002	276597	560353	1547696	1382867	518756	1190197	678756	354466	1574109
2003	276419	559440	1552848	1387086	521238	1190574	683317	356590	1590242
2004	277586	559538	1563872	1392965	524404	1195311	688340	359388	1613329

```
data =
 {{1991, 272951, 550042, 1479187, 1320567, 484807, 1174524, 628284, 331930, 1512599},
  {1992, 274943, 555231, 1495408, 1337961, 493732, 1181085, 636210, 336160, 1529979},
  {1993, 275958, 558935, 1508220, 1350814, 501215, 1185486, 642893, 338640, 1543471},
  {1994, 276908, 560216, 1515446, 1357804, 505238, 1186122, 647854, 340471, 1546059},
  {1995, 277689, 561281, 1520637, 1360967, 507454, 1185830, 651639, 341951, 1540830},
  {1996, 277703, 561703, 1523536, 1362597, 509157, 1185066, 655528, 343135, 1540591},
  {1997, 277368, 561280, 1525554, 1363843, 510501, 1184310, 659288, 344354, 1541543},
  {1998, 276973, 560972, 1528805, 1365441, 511107, 1183702, 662471, 345766, 1541552},
  {1999, 276486, 560821, 1532920, 1368299, 512049, 1183146, 665773, 347443, 1545386},
  {2000, 276083, 560129, 1537266, 1371579, 513853, 1182684, 669479, 349257, 1551236},
  {2001, 276450, 560371, 1542574, 1376700, 516442, 1186273, 674147, 351752, 1558337},
  {2002, 276597, 560353, 1547696, 1382867, 518756, 1190197, 678756, 354466, 1574109},
  {2003, 276419, 559440, 1552848, 1387086, 521238, 1190574, 683317, 356590, 1590242},
  {2004, 277586, 559538, 1563872, 1392965, 524404, 1195311, 688340, 359388, 1613329}};
```

Lösung

```
data1 := Table[data[[j, 2]], {j, 1, 14}]; data1

{272951, 274943, 275958, 276908,
 277689, 277703, 277368, 276973, 276486,
 276083, 276450, 276597, 276419, 277586}
```

Arbeiten mit Datenstrukturen.

Es müssen bestimmte Daten aus der data-Liste herausgegriffen und zu data1 neu zusammengefasst werden. 1

```
data2 := Table[data[[j, 10]], {j, 1, 14}]; data2

{1512599, 1529979, 1543471, 1546059,
 1540830, 1540591, 1541543, 1541552, 1545386,
 1551236, 1558337, 1574109, 1590242, 1613329}
```

Modulares Arbeiten.

Die Eingabezeile von (1) wird kopiert und entsprechend adaptiert. 2

```
data3 :=
  Table[
   Sum[data[[j, i]], {i, 2, 10}],
   {j, 1, 14}];
data3

        {7754891, 7840709, 7905632, 7936118,
         7948278, 7959016, 7968041, 7976789, 7992323,
         8011566, 8043046, 8083797, 8117754, 8174733}
```

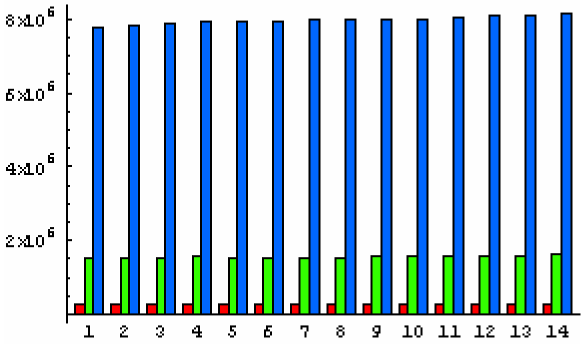
Arbeiten mit Datenstrukturen; Rechnen mit Daten:

Die Daten der einzelnen Unterlisten werden summiert und zu data3 zusammengestellt. 3

```
<<Graphics`Graphics`
BarChart[data1, data2, data3]
```

Grafische Darstellung der Daten:

Zum Zeichnen des Balkendiagramms wird die Mathematica-Funktion „**BarChart[…]**" verwendet. 4



Kritische Beurteilung der Darstellungsform:

Die Grafik ist offensichtlich nicht besonders aussagekräftig. 5

Es gibt prinzipiell zwei Möglichkeiten:

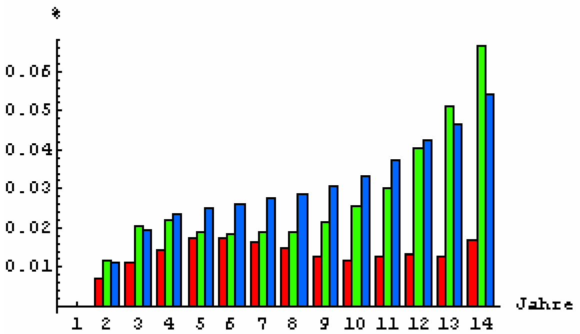
1) Änderung der Darstellung bzw. Darstellungsform.
2) Nachbearbeitung der Daten.

```
data1r := N[data1/data1[[1]] - 1]; data1r
data2r := N[data2/data2[[1]] - 1];
data3r := N[data3/data3[[1]] - 1];

        {0., 0.00729801, 0.0110166, 0.0144971,
         0.0173584, 0.0174097, 0.0161824,
         0.0147352, 0.012951, 0.0114746, 0.0128192,
         0.0133577, 0.0127056, 0.0169811}
```

Reflexion: Was ist die Aufgabenstellung?

Entscheidung: Anstelle der absoluten Zahlen wird jeweils die prozentuale Änderung der Bevölkerungszahl zum Vergleichsjahr 1991 berechnet. 6

Modulares Arbeiten. Die erste Zeile wird kopiert und entsprechend geändert.



Beurteilung der Darstellung:

Die Achsenbeschriftung kann noch verbessert werden (Jahreszahlen); es fehlt eine entsprechende Legende (welche Balken für welche Daten?) 7

Interpretation:

Was ist das Ergebnis? Was sagt das Diagramm aus?

Über modulares Arbeiten wurde bereits mehrmals gesprochen; wir konzentrieren uns hier daher jene Kompetenzen, die zum Bearbeiten der Daten und Datenstruktur notwendig ist.

Die Aufgabe besteht darin, bestimmte Daten aus der data-Liste herauszugreifen und zu einer neuen Liste zusammanzufügen (Schritt (1): Die Bevölkerungsdaten vom Burgenland). Etwas komplexer ist der Schritt 3: Hier müssen bestimmte Zahlen aus jeder einzelnen Liste herausgegriffen und addiert werden, und die berechneten Summen neu zusammengestellt werden (Die Bevölkerungsdaten von Österreich).

Die entsprechende Formel (3),

```
data3 := Table[Sum[data[[j, i]], {i, 2, 10}], {j, 1, 14}]
```

sieht einigermaßen kompliziert aus. Das Interessante ist nun nicht, wie die Einzelschritte in *Mathematica* umzusetzen sind, sondern vielmehr die obige Analyse, *welche* Schritte zu setzen sind, und wie die komplexe Formel (3) in der konkreten Arbeit *entsteht*. In den seltensten Fällen wird die Formel, so wie sie hier steht, von links nach rechts hingeschrieben. Eine mögliche Vorgangsweise könnte so aussehen:

`data[[j, i]]`	Zugriff auf das i-te Element der j-ten Zeile	1a
`Sum[data[[j, i]], {i, 2, 10}]`	In jeder Zeile werden die Elemente 2 bis 10 addiert	2a
`Table[Sum[data[[j, i]], {i, 2, 10}], {j, 1, 14}]`	Die Summen werden zu einer neuen Liste zusammengefasst	3a

Didaktisch kann man den Aufbau der Formel noch weiter erleichtern, indem man im Schritt (1a) mit konkreten Zahlen für *j* (Zeilenindex) und *i* (Spaltenindex) beginnt, auswertet, und so Schritt für Schritt kontrolliert, was man gemacht hat. Eine weitere Empfehlung ist, die Formel (3a) nicht in einer Zeile, sondern wie in (3) mehrzeilig anzuschreiben. Die Struktur wird auf diese Weise deutlich.

In der externen Evaluation (Helmut Heugl) wurden die hier zu entwickelnden Kompetenzen als sehr komplex und eher der Informatik zugehörig eingestuft. Dem möchte ich entgegenhalten,

(1) dass einerseits der Umgang mit Datenstrukturen (Vektor- und Matrizenrechnung) und indizierten Variablen (Summenbildung, Folgen, Reihen etc.), weiters mit Formeln, die gebundene und offene Variablen enthalten, sehr wohl im „Kernbereich" von Mathematik verankert ist, im traditionellen Unterricht (ohne Computer) jedoch meist nur im Darstellen der Objekte und nicht im operativen Rechnen besteht, und

(2) dass andererseits hier – nach entsprechend didaktischer Hinführung im Unterricht – erfreulicherweise keine größeren Probleme aufgetreten sind.

Eine zweite, sehr grundlegende Kompetenz wird im Schritt (5) verlangt: ein refelektierter, kreativer Umgang mit Darstellungen und Darstellungsformen. Im Inhaltsbereich „Datenanalyse und Statistik" bietet ausgezeichnete Gelegnheiten, diese sehr allgemeinen Aspekte mathematischen Tuns anzusprechen. Üblicherweise haben es die Schülerinnen und Schüler auf sehr elementarer Stufe mit sehr komplexen Begriffen und abgeschlossenen Theorien zu tun. Selbstständiges, kreatives Arbeiten muss zwangsläufig in allseits bekannten „anwendungsorientierten" Aufgaben ausgelagert werden.

Roland Fischer stellt in seinem Aufsatz ***„Offene Mathematik und Visualisierung*"** ([2], Seite 215 – 247) der gewohnten Sichtweise von Mathematik als „Sinnbild von Abgeschlossenheit, Vollständigkeit und Eindeutigkeit" eine andere Seite von Mathematik gegenüber: Mathematik als *„Angebot von Begriffen und Darstellungsformen, als Ausdrucks- und Kommunikationsmittel*" (Seite 216). In dieser *„offenen Mathemati*k" spielen allgemeine Konzepte und Begriffe nicht nur ihre entsprechende Rolle *innerhalb* geschlossener Theorien; sie haben „bereits für sich einen Erklärungsund Darstellungswert“, und können damit „für Kommunikation nützlich sein“ ([2], Seite 218). Ein besonderer Stellenwert kommt dabei der visuellen Kommunikation zu.

> „Es geht aber nicht nur um das Verstehen und Interpretieren ‚genormter' Bilder. Es geht auch um *Kreativität im Entwerfen neuer Bilde*r, ‚intelligenter Graphiken', um Sachverhalte darzustellen. Dabei geht es um Fragen wie: Ist alle wesentliche Information in der Darstellung enthalten? Worauf kommt es besonders an? Ist die Darstellung übersichtlich? Wird nichts verfälscht? Ist die Darstellung ansprechend? Usw.“ ([2], Seite 233).

Ich halte dieses Konzept einer „offenen Mathematik“ für den Schulunterricht für sehr zukunftsweisend. Die entsprechenden Ideen spielten in der Statistik und Datenanalyse zusammen mit den vielseitigen grafischen Möglichkeiten von *Mathematica* eine zentrale Rolle.

4 BEOBACHTUNGEN, EVALUATION, ERGEBNISSE

Wir wollen unsere Erfahrungen im Unterrichtsjahr und die Ergebnisse der Evaulationstätigkeit an Hand der zahlreichen Beobachtungen und Fragen darlegen, die sich in der Zusammenarbeit mit unserem Betreuer Dr. Helmut Heugl ergeben haben. Helmut Heugl ist Experte in Didaktikfragen des CAS-Einsatzes, arbeitet selbst aber *nicht* mit *Mathematica*; sein „Blick von außen" war uns sehr wichtig. Seine Fragen sind dadurch etwas „schärfer", und wir kamen auch nicht in Gefahr, uns in irgendwelchen *Mathematica*-Insiderfragen zu verlieren.

Mitte Februar organisierten wir einen ersten „Evaluationstag", Ende Mai einen weiteren. Die Rückmeldung wurde von Helmut Heugl in Form eines sehr umfangreichen Fragenkataloges ([4]) gegeben, den wir nun dazu benutzen, unsere Projektarbeit „von außen" zu durchleuchten. Viele Fragen stehen nicht in unmittelbarem Zusammenhang mit unseren engeren Projektzielen und betreffen eher das gesamte Umfeld. Aber auch das ist uns natürlich wichtig: Wir werden auf diese Weise auf etwaige Mängel aufmerksam, die sich im Zuge unserer Schwerpunktsetzungen einstellen könnten. Wir werden hier einen Auszug aus dem Fragenkatalog geben, viele andere Punkte des Katalogs sind Anregung für die weitere Arbeit und Anlass zu grundlegender Reflexion.

Die Entwicklung der „Werkzeugkompetenz" (Arbeiten mit mathematisch-informatischen Konzepten) und des modularen Arbeitens entspricht in etwa unseren Zielvorstellungen. Gemessen an der „Buchbergerschen Kreativitätsspirale" liegen wir im Trend der (österreichischen) CAS-Projekte.

Zitat:

> „Die meisten Schülerinnen und Schüler scheinen mit den *Mathematica*-spezifischen Werkzeugkompetenzen wenig Probleme zu haben."

Tatsächlich ist es so, dass nach einer relativ kurzen Phase, in der eine Gewöhnung an die grundsätzliche Programmbedienung erfolgt, bereits mathematisch mit dem Programm gearbeitet werden kann.

Zitat:

> „Verändert sich die mathematische Sprache der Schüler in Richtung *Mathematica*-spezifischerer Formulierungen?"

Hier kommt es zu einem interessanten, eher CAS-untypischen, Effekt: Eine explizite Übersetzung von mathematisch zu behandelnden Sachverhalten zuerst in mathematische Sprache und anschließend in die Sprache von *Mathematica* ist nicht notwendig, mathematische und *Mathematica*-Notation stehen eher gleichberechtigt nebeneinander. Schülerinnen und Schüler sind gewohnt, in beiden Beschreibungen zu denken, für die konkrete Behandlung eines Problems aber in *Mathematica*-Notation zu formulieren.

Zitat:

> „Deutliche Aufwertung der heuristischen Phase.
>
> Hoher Anteil an Tätigkeiten im Bereich des Interpretierens und Argumentierens, z. B. besondere Kompetenzen beim Interpretieren von Graphen.
>
> Deutliche Schwerpunkte: Visualisierungskompetenz, experimentelles Arbeiten. Weniger deutlich war die exaktifizierende Phase."

Hier liegen die Projektklassen auf der Linie typischer CAS-Klassen. Durch die Verwendung eines Computeralgebrasystems kommt es zu den üblichen Verschiebungen im Unterricht, die Verringerung des Zeitaufwands für operative Tätigkeiten lässt Raum für die oben genannten, auch im Lehrplan geforderten Kompetenzen des Interpretierens und Argumentierens. Bezüglich des letzten Punktes (exakte Begriffsbildungen, Beweisen) gibt es tatsächlich Nachholbedarf.

Zitat:

> „Warum unterstützt (bzw. verlangt) *Mathematica* das modulare Arbeiten?"

Dazu eine weitere Bemerkung: Da Eingaben in *Mathematica* selbst bereits modular (hierarchisch) aufgebaut sind, erfolgt modulares Arbeiten fast zwangsläufig, ein differenziertes Umgehen mit (mathematischen) Grundelementen ist in vielfältiger Weise möglich.

Zu Fragen des Lernmediums / Organisation der eigenen Unterlagen (Skripten) sind für uns zwei kritische Hinweise und Fragen wichtig:

Zitat:

> „Eine Papierunterlage als Lernmedium wurde nicht beobachtet. Ist ein Lernmedium aus Papier nicht mehr vorgesehen?
>
> Lernen Schüler nur am Bildschirm oder produzieren sie für das Lernen Computerausdrucke?
>
> Zur Visualisierung: Beschränkt sich die Visualisierung auf *Mathematica*-spezifische Skizzen oder werden auch Handskizzen angefertigt bzw. verlangt (nicht nur Grafen von Funktionen oder geometrische Objekte, sondern auch Struktogramme)?"

Es ist tatsächlich so, dass die Schülerinnen und Schüler nur mehr in Ausnahmefällen mit Bleistift und Papier arbeiten. Vor die Wahl gestellt, eine bestimmte Teilaufgabe mit Bleistift / Papier oder am Computer zu bearbeiten, wählen sie fast ausschließlich den Computer. Von vielen Kollegen wird die Wichtigkeit von Bleistift / Papier als Ergänzung zur Computerarbeit immer wieder betont. Für uns liegt hier eine interessante Untersuchungsfrage vor, die wir (leider) im Rahmen des vorliegenden Projektes nicht mehr weiterverfolgen können. Von entscheidender Bedeutung dürfte in dieser Frage die Computerkompetenz der einzelnen Schülerin / des einzelnen Schülers sein; die Fähigkeit, den Computer nicht nur zur Darstellung von vorgefertigten Lernhilfen zu nutzen, sondern diesbezüglich selbst eigene Produkte (Grafiken, Skizzen, übersichtliche Tabellen, Struktogramme etc.) zu erstellen.

Die Beobachtung der grundsätzlichen Organisation der eigenen Unterlagen ergibt folgende Ergebnisse:

- Einige Schülerinnen und Schüler legen ein einziges Komplettskriptum an – *Mathematica* erlaubt es, ganze Kapitel „zuzuklappen" und je nach Bedarf wieder zu öffnen – andere Schülerinnen und Schüler arbeiten mit vielen Einzeldateien, in deren Dateinamen sie fortlaufende Nummern oder das Bearbeitungsdatum einfügen.
- Das Strukturieren der Hausübungen findet sehr individuell statt: es treten sowohl originelle Formatierungsformen als auch unterschiedliche Eingabemethoden auf; kopierte Hausübungen sind dadurch praktisch nicht möglich.

- Sehr positiv aufgefallen ist, dass ein gesteigerter Hang zum Kommentieren von Ergebnissen und Vorgängen sichtbar wird; offenbar schreiben Schülerinnen und Schüler lieber dann mehr, wenn sie die Tastatur benutzen können. Erwartungsgemäß kann die Qualität der Fomulierungen nicht immer mit der Quantität mithalten, auch das sprachliche Beschreiben mathematischer Sachverhalte unterliegt einem Lernprozess.

Spezielle Aspekte zur Unterlagenorganisation und zum modularen Arbeiten wurden gegen Schluss des Schuljahres in der Anfängerklasse mittels Fragebogen untersucht. Im Folgenden einige Ergebnisse, die sich aus den Antworten ableiten lassen (der Fragebogen findet sich im Wortlaut im Anhang):

- Beim Ausdrucken von Unterlagen gibt es eine große Streuung – vom häufigen Drucken bis hin zum reinen elektronischen Arbeiten.
- Das Zusammenfassen von Merksätzen usw. auf Papier oder in *Mathematica* findet ebenfalls sehr uneinheitlich statt.
- Die Möglichkeit, ganze Blöcke in *Mathematica* zuzuklappen (ähnlich der Baumansicht in Windows), wird mehrheitlich, aber nicht durchgehend genutzt. Einige Schülerinnen und Schüler brauchen ein lineares im Gegensatz zu einem hierarchischen Skriptum.
- Die Schülerinnen und Schüler haben offenbar zu einem großen Teil die Übersicht über ihre Unterlagen und finden entsprechende Inhalte ohne Probleme.
- Das Nachformatieren von Ausarbeitungen im Nachhinein wird fallweise durchgeführt.

Dies alles sind Hinweise dafür, dass die Arbeit mit *Mathematica* sehr individuell stattfindet und die Schülerinnen und Schüler ihren eigenen Arbeitsstil pflegen.

- Bestimmte Aufgabenstellungen, die auch eine grafische Darstellung zulassen, werden bewusst so bearbeitet, dass sich Vorteile für das Erstellen der Darstellung ergeben (siehe Frage 1 des Fragebogens; Häufigkeit Antwort D und E).
- *Mathematica* wird praktisch nicht wie ein Taschenrechner bedient (siehe Frage 1 des Fragebogens; Häufigkeit Antwort B).
- Zwischenrechnungen finden nicht im Kopf statt, wenn Einzelobjekte für andere Zwecke benötigt werden (siehe Frage 1 des Fragebogens; vergleiche Häufigkeit Antwort A und D/E).

Aus diesem Arbeitsverhalten, das sich auch durchgehend in den Hausübungen widerspiegelt, kann man bereits auf eine gewisse Kompetenz in der Planung einer Ausarbeitung und einer sinnvollen (effizienten) Umsetzung schließen.

- Das Verwenden vorbereiteter Module (seien es selbstausgearbeitete oder vom Lehrer zur Verfügung gestellte) ist eine von den Schülerinnen und Schülern als positiv eingeschätzte Veränderung gegenüber dem traditionellen Unterricht. Schülerinnen und Schüler schätzen das Verwenden solcher Module nicht als Hinweis auf geringere mathematische Anforderung ein. Hierzu einige Zitate (siehe Frageblock 6 des Fragebogens, Orthografie der Zitate geglättet):
    - „Es ist viel einfacher, denn man ist seine eigenen Blöcke bereits gewohnt und man muss nicht so lange überlegen, welchen man bei welcher Aufgabe nimmt.“

- „Ich bin Grafik- und Rechenblock-Fan und finde sie sehr praktisch für langsam Schreiber (=ich) und Leute, die Spaß am Programmieren haben (=ich) […]"
- „[…] man braucht das Können um sie zu erstellen, und sie rufen nur etwas schon selbst Geschriebenes ab, also etwas das man schon selbst gemacht hat."
- „Man fühlt sich sicherer."
- „Jeder kann so die Aufgaben nach seinen Varianten lösen. "
- „Das finde ich sehr hilfreich, weil man sich bei seinen "eigenen" Grafikblöcken besser auskennt, sich vielleicht schon etwas vordefiniert hat und es einfach überschaubarer ist. Außerdem spart man Zeit."
- „Ich sehe darin keine Nachteile, ich glaube auch nicht dass man weniger können muss, weil man ja die Blöcke schon zu Hause ausgearbeitet hat."
- „Ich finde es besser, die Graphikblöcke, die man bei der SA braucht vorzubereiten, denn wenn einem bei der SA ein kleiner Fehler bei der Schreibweise eines Wortes unterläuft, funktioniert das Ganze nicht und dann verbringt man die ganze Zeit damit, herauszufinden, was man falschgemacht hat."
- „Ich sehe keine Nachteile darin, weil es zeitsparender ist und die Beispiele auf gleichem Niveau bleiben."

Zurück zum Feedbackkatalog von Helmut Heugl – Beobachtungen zur *affektiven Ebene* des Lernens:

Zitat:

> „Die Schüler scheinen ein größeres Interesse an Mathematik zu haben.
>
> Die Schüler scheinen stolz zu sein, an diesem Projekt beteiligt zu sein."
>
> „Fragen:
>
> Wie sieht es mit der Motivation der Schüler aus? (einerseits Mathematik zu treiben, andererseits mit diesem Werkzeug zu arbeiten).
>
> Sehen die Schüler in dem was sie jetzt im Mathematikunterricht machen Sinn für ihr weiteres Leben (studienmäßig, beruflich und privat)?
>
> Sind sie daran interessiert auch selbständig etwas zu entdecken, zu erforschen oder werden sie lieber vom Lehrer geführt?
>
> Gibt es einen beobachtbaren Einfluss auf die soziale Kompetenz und Persönlichkeitskompetenz der Schüler?"

Hier überwiegen klar die positiven Aspekte. Speziell zur letzten Frage („soziale Kompetenz") ist anzumerken, dass sich neben gegenseitiger Unterstützung im Rahmen von Teamarbeit auch eine gewisse Sensibilisierung bezüglich Urheberschaft (etwa bei Lösungen von Spezialaufgaben, kreativen Beiträgen bei offenen Aufgabenstellungen, Entwicklung eigener Module, Gestaltung eigener Skripten etc.) entwickelt. Wenn von Mitschülerinnen oder Mitschülern kopiert wird, dann mit Angabe der Quelle.

Ein Detail zur Motivation: Typische Fragen zum Stundenbeginn sind „Haben Sie die Hausübungen von gestern schon angeschaut?" und „Gibt's was Neues in WeLearn?".

Abschließend noch einige Fragen zur *Leistungsbeurteilung*:

Zitat:

> „Gibt es auch eine prozessorientierte Leistungsmessung? Wenn ja, welche?
>
> Wie sieht die produktorientierte Leistungsmessung aus? Gibt es außer den Schularbeiten auch andere Formen der produktorientierten Leistungsmessung?
>
> Wie sehen Schularbeiten aus?
>
> Wie und aus welchen Anteilen entsteht die Note?
>
> Wie sieht das Leistungsbild der Klassen aus?
>
> Wie erfolgt die Leistungsmessung bei kooperativen Lernformen?
>
> Wird die Hausübungsleistung in die Note mit einbezogen? Wenn ja, wie und mit welchem Gewicht?
>
> Wird auch die Werkzeugkompetenz gemessen und bei der Leistungsmessung berücksichtigt?
>
> Wird auch die Methodenkompetenz gemessen und bei der Leistungsbeurteilung berücksichtigt? (Beispiele: Kompetenz sich Informationen zu verschaffen, Präsentationskompetenz usw.)
>
> Wird auch die soziale Kompetenz gemessen und bei der Leistungsbeurteilung berücksichtigt? (Beispiel: Kompetenz sich in der Gruppe einzubringen, Kompetenz als Tutor zu wirken usw.)“

Diese Fragen sind nicht direkt Gegenstand der vorliegenden Projektarbeit, können jedoch als wichtige Aspekte des erweiterten Umfeldes nicht unberücksichtigt bleiben. Wir haben bereits erwähnt, dass der jeweilige Entwicklungsstand bei den längerfristigen Kompetenzen *nicht* in die Schulnote mit einbezogen wird.

Dagegen spielt die *prozessorientierte Leistungsmessung* als starkes Gegengewicht zu den Schularbeiten (*produktorientierte Leistungsmessung*) eine zentrale Rolle. Erstere ergibt sich in natürlicher Weise aus unserem Arbeitsstil, wo selbstständiges Arbeiten (Bearbeitung von Arbeitsskripten, offenen Aufgabenstellungen, experimentelles Lernen, Bearbeitung von Spezialthemen, die nicht für alle verbindlich sind etc.) an oberster Stelle steht. Davon werden sehr konsequent diverse Übungsaufgaben (zum Training bzw. Routinisieren gewisser Abläufe) und Wiederholungsfragen (zur Sicherung der Grundlagen) unterschieden, die *nicht* zur Benotung herangezogen werden. Technisch wird die entsprechende Kommunikation über die Lernplattform abgewickelt. Wir haben so ständig einen umfassenden Überblick über die individuellen Arbeiten und Leistungen.

Im Zusammenhang mit den Bildungsstandards treten für uns einige grundlegende Fragen auf:

(1) Sind bei Tests die „gewohnten Arbeitsmittel“ (d. h. in unserem Fall *Mathematica*) zugelassen?

(2) Können Bildungsstandards *unabhängig* von den jeweils „gewohnten Arbeitsmitteln“ überhaupt sinnvoll festgelegt werden?

(3) Sind Tests sinnvoll, in denen überhaupt keine zusätzlichen Arbeitsmittel zugelassen werden?

Häufig wird Frage (1) mit „Nein“ und Frage (3) mit „Ja“ beantwortet. Wir nennen dies den „traditionellen Standpunkt“, den wir in dieser vorliegenden Arbeit *nicht* teilen. Den Computer bei einer Prüfungsarbeit (Test) nicht zuzulassen bedeutet, dabei eine bestimmte *mathematische* Arbeitsweise und damit einen Teil der Mathematik selbst zu verbieten. Die gestellte Testaufgabe ist dann von der Art: Löse die Aufgabe nach dieser Methode, nicht aber nach jener, etwa beim Lösen eines Gleichungssystems: Arbeite mit dem Additionsverfahren, nicht aber mit Substitution. Oder beispielsweise: Bestimme die Maxima dieser Funktion, aber nicht mit Hilfe der Differentialrechnung.

Für uns sind die obigen Fragen noch keineswegs geklärt. Umgekehrt ergeben sich aus der Entwicklung der Bildungsstandards – in Zusammenhang mit dem Computer – viele Ansatzpunkte zu grundsätzlicher Reflexion des Mathematikunterrichts.

5 LITERATUR

[1] BÖHM, Josef, FORBES, Ian, HERWEYERS, Guido, HUGELSHOFER, René, SCHOMACKER, Gert (2004). The Case for CAS. T³ Europe.

[2] FISCHER, Roland (2006). Materialisierung und Organisation. Zur kulturellen Bedeutung von Mathematik. Profil.

[3] HEUGL, Helmut, KLINGER, Walter, LECHNER, Josef (1996). Mathematikunterricht mit Computeralgebrasystemen. Addison Wesley Publishing Company.

[4] HEUGL, Helmut (2006). Evaluation und didaktische Analyse des MNI-Projekts „Der Einsatz von *Mathematica* im Mathematikunterricht der Oberstufe". Unveröffentlicht.

[5] LEHMANN, Eberhard (2002). Mathematiklehren mit Computeralgebrasystem-Bausteinen. franzbecker.

[6] WOLFRAM, Stephen (2003). The *Mathematica* Book, 5th ed. Wolfram Media.

ANHANG

Fragebogen 5. Klasse, Mai 2006

Dieser Fragebogen ist Teil einer Projektarbeit, die durch den MNI-Fonds (http://imst.uni-klu.ac.at/) gefördert wird. Das Projekt wurde von Martin Dangl und mir im vorigen Schuljahr eingereicht und läuft noch bis Ende des Schujahres; es trägt den Titel "Der Einsatz von *Mathematica* im Mathematikunterricht der AHS-Oberstufe" und soll ein Schuljahr lang bestimmte Dinge beobachten, die beim Lernen von Mathematik mit *Mathematica* auftreten.
Im Rahmen des Fragebogens geht es nicht darum, dein Wissen über Mathematik oder über *Mathematica* zu testen (oder gar einen Beitrag zu deiner Mathe-Note zu finden!); es ist viel wichtiger, etwas über deinen Umgang mit Mathematik und *Mathematica* zu erfahren. Deshalb ist es sehr hilfreich, wenn du die Fragen so ehrlich und so ausführlich beantwortest wie möglich.

Danke für deine Mitarbeit!
M.B.

Wichtig: Speichere dieses Dokument nach dem Ausfüllen (z.B. auf dem Desktop deines Computers) und lade die fertig ausgefüllte Fassung in den Abgabeordner auf *WeLearn*.

Dein Name:

Frage 1

Gegeben ist die folgende Aufgabe:

"Finde eine Parameterdarstellung der Geraden g[A(2;−5), B(4;9)]."

Welche der unten aufgeführten Lösungen kommt deiner Arbeitsweise am nächsten?

1-A ☐	In[1]:= g[t_] := {2, -5} + t {2, 14}
1-B ☐	In[1]:= {4, 9} - {2, -5} Out[1]= {2, 14} In[2]:= g[t_] := {2, -5} + t {2, 14}
1-C ☐	In[1]:= pA := {2, -5} AB := {2, 14} g[t_] := pA + t AB
1-D ☐	In[1]:= pA := {2, -5} pB := {4, 9} AB := pB - pA g[t_] := pA + t AB
1-E ☐	In[1]:= pA := {2, -5} pB := {4, 9} AB = pB - pA g[t_] = pA + t AB Out[3]= {2, 14} Out[4]= {2 + 2 t, -5 + 14 t}
1-F ☐	Keine der oben angeführten Lösungen.

Begründe in zwei bis drei Sätzen, **warum** du die entsprechende Lösung gewählt hast:

Frage 2

Ein Ausschnitt aus einer anderen Aufgabe lautet:

"Finde Parameterdarstellungen für die Geraden g[P(3;−2), Q(9;3)], h[S(2;2), T(−4;−8)] und k[V(2;−9), W(0;7)]. Diese Geraden sind..."

Auf welche der Arten aus Frage 1 würdest du die beiden Parameterdarstellungen am ehesten bestimmen?

1-A	1-B	1-C	1-D	1-E	1-F
☐	☐	☐	☐	☐	☐

Falls du eine **andere** Antwort als in Frage 1 gewählt hast, begründe in zwei bis drei Sätzen, warum du hier unterschiedlich arbeiten würdest:

Frage 3

Wiederum eine Aufgabe, diesmal aus der Trigonometrie:

"Ein rechtwinkliges Dreieck ABC ($\gamma = 90°$) hat $\beta = 30°$ und $b = 40$ E. Berechne die Länge der fehlenden Kathete a."

Welche der folgenden Aussagen trifft auf deine Arbeitsweise zu:

3-A ☐	Ich müsste das Dreieck nicht skizzieren, sondern könnte gleich die fehlende Seitenlänge berechnen.
3-B ☐	Ich würde vor dem Berechnen der fehlenden Kathete auf jeden Fall das Dreieck auf Papier skizzieren.
3-C ☐	Ich würde vor dem Berechnen der fehlenden Kathete das Dreieck in *Mathematica* zeichnen, wenn ich einen entsprechenden Grafikblock zum Kopieren und Abändern zur Verfügung hätte.
3-D ☐	Ich würde vor dem Berechnen der fehlenden Kathete nur dann eine Skizze auf Papier machen, wenn ich keinen Grafikblock in *Mathematica* zur Verfügung hätte.
3-E ☐	Ich würde vor dem Berechnen der fehlenden Kathete auf jeden Fall eine Zeichnung in *Mathematica* anfertigen, auch wenn ich die Zeichnung komplett neu schreiben müsste.
3-F ☐	Keine der oben angeführten Aussagen trifft zu.

Begründe hier kurz deine Antwort:

Frage 4

Welche der folgenden Lösungen zur Aufgabe aus Frage 3 kommt deiner Arbeitsweise am nächsten (unabhängig davon, ob du eine Skizze anfertigen würdest oder nicht)?

4-A ☐	In[1]:= $\beta := 30\,°;\ G := 40$ $\text{Tan}[\beta] == \frac{G}{A}$ Out[2]= $\frac{1}{\sqrt{3}} == \frac{40}{A}$ In[3]:= Solve[%, A] Out[3]= $\{\{A \to 40\sqrt{3}\}\}$ In[4]:= $\text{N}[40\sqrt{3}]$ Out[4]= 69.282 Die Ankathete *a* ist ungefähr 69 *E* lang.
4-B ☐	In[1]:= $\beta := 30\,°;\ b := 40$ $\text{Solve}[\text{Tan}[\beta] == \frac{b}{a},\ a]$ Out[2]= $\{\{a \to 40\sqrt{3}\}\}$ In[3]:= $\text{N}[40\sqrt{3}]$ Out[3]= 69.282 Die Ankathete *a* ist ungefähr 69 *E* lang.
4-C ☐	In[1]:= $\beta := 30\,°;\ b := 40$ $a = \frac{b}{\text{Tan}[\beta]}$ Out[2]= $40\sqrt{3}$ In[3]:= N[a] Out[3]= 69.282 Die Ankathete *a* ist ungefähr 69 *E* lang.
4-D ☐	In[1]:= $\text{N}\left[\frac{40}{\text{Tan}[30\,°]}\right]$ Out[1]= 69.282 Die Ankathete *a* ist ungefähr 69 *E* lang.
4-E ☐	Keine der oben angeführten Lösungen.

Erkläre kurz, warum du die entsprechende Lösung gewählt hast:

Frageblock 5

Anschließend folgen einige Aussagen zu deinen Arbeitsunterlagen (*Mathematica*-Notebooks, Mitschriften, Zusammenfassungen usw.).
Gib an, in welchem Grad diese Aussagen für dich zutreffend erscheinen.

	häufig	fallweise	selten	nie
Ich drucke *Mathematica*-Dateien aus, um auch eine Papierversion zur Verfügung zu haben.	☐	☐	☐	☐
Ich erstelle Zusammenfassungen auf Papier oder in *Mathematica*, zum Beispiel von Merksätzen oder von *Mathematica*-Funktionen.	☐	☐	☐	☐
Ich verliere den Überblick, wenn ich einen bestimmten Inhalt – zum Beispiel eine Aufgabe oder einen Merksatz – in meinen *Mathematica*-Notebooks suche.	☐	☐	☐	☐
Ich erstelle Sicherungskopien meiner elektronischen Unterlagen.	☐	☐	☐	☐
Ich versuche, Hausübungsaufgaben übersichtlich auszuarbeiten.	☐	☐	☐	☐
Ich arbeite Aufgaben, die abzugeben sind, genauer aus als Aufgaben, die nur für meine eigenen Unterlagen bestimmt sind.	☐	☐	☐	☐
Ich arbeite Aufgaben zusammen mit Klassenkollegen/innen aus.	☐	☐	☐	☐
Nachdem ich eine Aufgabe fertiggestellt habe, formatiere ich sie noch nach (z.B. durch Fettschrift oder Farbe).	☐	☐	☐	☐
Ich verwende die Möglichkeit, Mathematica-Zellen zuzuklappen.	☐	☐	☐	☐

Frageblock 6

Welche Vorteile siehst du darin, *Mathematica*-Notebooks für die Verwendung bei einer Schularbeit vorzubereiten (zum Beispiel die "Grafikblöcke" für die 3. Schularbeit)?

Welche Nachteile siehst du dabei (muss man zum Beispiel weniger "können"?)?

Ergebnisse des Fragebogens 5. Klasse, Mai 2006

	A	B	C	D	E	F
Frage 1	5	0	0	9	3	0
Frage 2	5	0	0	8	4	0
Frage 3	3	7	4	2	0	1
Frage 4	5	5	3	4	0	0

	häufig	fallweise	selten	nie
Frage 5 (1)	4	2	4	7
Frage 5 (2)	4	5	3	5
Frage 5 (3)	3	1	7	5
Frage 5 (4)	9	6	1	1
Frage 5 (5)	12	5	0	0
Frage 5 (6)	4	4	6	3
Frage 5 (7)	3	5	7	2
Frage 5 (8)	1	7	7	2
Frage 5 (9)	7	4	4	2