MNI-Fonds für Unterrichts- und Schulentwicklung
S 2 „Grundbildung und Standards“

GRUNDWISSEN UND GRUNDVORSTELLUNGEN IM STOCHASTIKUNTERRICHT (11./12. SCHULSTUFE)

Mag. Monika Jarmer
HAK des Fonds der Wr. Kaufmannschaft, Franklinstraße, *1210 Wien-Floridsdorf*
Mag. Gabriela Rösler
BG u. BRG Ettenreichgasse, *1100 Wien-Favoriten*
Dr. Bernhard Salzger
Don Bosco-Gymnasium, Don Bosco-Straße, *2442 Ebreichsdorf-Unterwaltersdorf*

Juli 2005

INHALTSVERZEICHNIS

INHALTSVERZEICHNIS 2

ABSTRACT 4

1 MOTIVATION UND ERWARTUNGEN 5

2 DIE LEITLINIEN UND DAS KONZEPT 7

2.1 Leitlinien für die Auswahl von Inhalten 7

2.1.1 Weltverständnis 7

2.1.2 Alltagsbewältigung 7

2.1.3 Wissenschaftsverständnis 7

2.1.4 Berufliche Orientierung und Studierfähigkeit 7

2.2 Leitlinien für die Auswahl von Methoden 8

2.2.1 An Voraussetzungen der Schülerinnen und Schüler anknüpfen 8

2.2.2 An authentischen Problemen anwendungsbezogen lernen 8

2.2.3 Im sozialen Umfeld lernen 8

2.2.4 Mit instruktionaler Unterstützung lernen 8

3 DER UNTERRICHTSVERSUCH 9

3.1 Bericht von Mag. Monika Jarmer, HAK des Fonds der Wiener Kaufmannschaft, Franklinstraße, *1210 Wien* 9

3.1.1 Die Klassensituation 9

3.1.2 Der Unterrichtsverlauf 9

3.1.3 Reflexionen 12

3.1.4 Anhang 13

3.2 Bericht von Mag. Gabriela Rösler, BG u. BRG Ettenreichgasse, *1100 Wien* 23

3.2.1 Die Klassensituation 23

3.2.2 Der Unterrichtsverlauf 23

3.2.3 Zusammenarbeit mit Psychologie 27

3.2.4 Zusammenarbeit mit BE - Lehrausgang ins MUMOK 27

3.2.5 Besuch von Roman Sallmutter (Casinos Austria) 27

3.2.6 Anhang 30

3.3 Bericht von Dr. Bernhard Salzger, Don Bosco-Gymnasium, Don Bosco-Straße, 2442 Ebreichsdorf-Unterwaltersdorf 43

3.3.1 Die Klassensituation 43

3.3.2 Der Unterrichtsverlauf 43
3.3.3 Die Evaluation 49
3.3.4 Das Resümee 51

4 LITERATUR 56

ABSTRACT

Ziel des Projektes ist es, Grundwissen und Grundvorstellungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik zu vermitteln. Zu diesem Zweck haben wir fünf Kolleginnen und Kollegen gemeinsam, jeder/jede an seiner/ihrer Schule mit einem didaktischen Konzept von Prof. Dr. Günther MALLE (Universität Wien) den Unterricht durchgeführt. Nicht nur die verschiedenen Schulstufen (11. und 12.) sondern auch die verschiedenen Schularten (RG mit vier, G mit drei, HAK mit zwei Wochenstunden) stellten eine Herausforderung dar. Im Folgenden werden die Kolleginnen und Kollegen berichten, wie sie Ihren Unterricht aufgebaut haben und welche Erfahrungen sie mit dem Konzept gemacht haben.

Eine weitere Herausforderung ist sicher, dass wir alle <u>nicht</u> Physik als zweites Fach haben, (obwohl es in gerade diesem Zusammenhang natürlich auch sehr interessant gewesen wäre, den Zugang eines Physikers zu diesem Konzept zu beobachten – Stichwort: „Der liebe Gott würfelt nicht“ A. Einstein*), sondern dass drei von uns Germanistinnen und Germanisten sind, eine Kollegin hat Psychologie und Philosophie (ein weites Betätigungsfeld für Statistik und Stochastik, und dazu eines, in dem einem die Schülerinnen und Schüler NIE glauben, dass man das „bei so einem Studium jemals brauchen wird“ als zweites Fach.*

Sie sehen also in der Folge unsere Gemeinsamkeiten und Unterschiede im Herangehen und in der Durchführung. Uns allen gemeinsam ist, dass wir ähnliche Motivationen und Erwartungen gehabt haben, und dass wir uns der Förderung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Grundbildung verschrieben haben.

Schulstufe:	7. Klasse AHS, 8.Klasse AHS, 5. Klasse HAK
Fach:	Mathematik
Kontaktpersonen:	Mag. Monika Jarmer (HAK Floridsdorf) Mag. Gabriela Rösler (BG/BRG Favoriten) Dr. Bernhard Salzger (Don Bosco-Gymnasium Unterwaltersdorf)
Kontaktadressen:	Handelsakademie des Fonds der Wiener Kaufmannschaft, Franklinstraße 24, 1210 Wien-Floridsdorf Bundesgymnasium und Bundesrealgymnasium, Ettenreichgasse 41-43, 1100 Wien-Favoriten Don Bosco-Gymnasium, Don Bosco-Straße 20, 2442 Ebreichsdorf-Unterwaltersdorf

1 MOTIVATION UND ERWARTUNGEN

„Grundvorstellungen sind für (mathematische) Allgemeinbildung in erster Linie deshalb wichtig, weil sie unverzichtbar für mathematisches Problemlösen und für das Anwenden von Mathematik sind.“ (Günther MALLE)

Statistik und Stochastik sind aus dem heutigen Leben nicht mehr wegzudenken. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung in der 7. Klasse ist wohl eines der Kapitel der Mathematik, in denen die Praxisrelevanz am augenfälligsten ist.

Schülerinnen und Schüler finden gerade dazu einen guten ersten Zugang, der mit Experimenten anschaulich und spannend wird, stoßen dann in der mathematischen Modellbildung aber erfahrungsgemäß an einige Schwierigkeiten, die vor allem in der Sprache liegen. Ein zentraler Punkt in diesen Unterrichtseinheiten wird also auf die Formulierung von Formeln gelegt werden, ohne die gerade dieses Kapitel nicht bewältigbar ist Wie bei auch fremdsprachlichen Vokabeln habe ich die Erfahrung gemacht: *„use it or loose it“*. Was man nicht in seinem aktiven Wortschatz hat, wird man schnell vergessen. Kein Fremdsprachenlehrer würde ein Äquivalent zu z. B. „das da oben und das da unten“ für Zähler und Nenner eines Bruches durchgehen lassen, wir Mathematiker aber neigen vielleicht noch immer dazu, eine solche Ausdrucksweise als lässliche Sünde durchgehen zu lassen. Ich meine, dass mit der Möglichkeit, einen mathematischen Sachverhalt zu formulieren auch die Bereitschaft steigt, diese mathematischen Seiten im „täglichen Leben“ zu sehen und kritisch zu beurteilen. Eine gewisse mathematische Sprachlosigkeit hindert meiner Meinung nach viele Leute daran, die Dinge überhaupt wahrzunehmen, geschweige denn zu versuchen, sie zu überprüfen, was gerade in der Statistik und in deren grafischer Darstellung zu fürchterlichen Irrtümern, die oft natürlich bewusst (vielleicht auch unbewusst, aber ich unterstelle den Erzeugern gewisser Grafiken das Schlechteste) provoziert werden, führen kann

Wir haben uns von diesem Projekt ein tieferes Verständnis für die Statistik und Stochastik erwartet, die Durchführung des Projekts weist drei wesentliche Unterschiede auf:

1. Wird in einer siebenten Klasse AHS unterrichtet, so geht es vor allem um die Einführung des Begriffs Wahrscheinlichkeit, um den Zugang und die Vorstellung, die man mit dem Wahrscheinlichkeitsbegriff verbindet. Neben grundlegenden Einsichten (Wahrscheinlichkeit als Maß für eine Erwartung und hierauf Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil, Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit als subjektives Vertrauen) und Aufgaben, die diese Grundvorstellungen belegen, steht der Binomialkoeffizient im Vordergrund der Projekt- bzw. Unterrichtsarbeit. Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, die Binomialverteilung, wird die Unterrichtseinheiten abrunden.
2. Wird in einer achten Klasse AHS unterrichtet, so hat es sich als nützlich erwiesen, den Wahrscheinlichkeitsbegriff und die Vorstellungen, die damit zu verbinden sind (Wahrscheinlichkeit als Maß für eine Erwartung und hierauf Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil, Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit als subjektives Vertrauen) zu wiederholen. Ebenso günstig ist eine Kurzwiederholung der Binomialverteilung, bevor von dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung auf die Normalverteilung übergeleitet wird. Zusätzlich zu den genannten Vorstellungen, die naturgemäß weiterhin ihre Gültigkeit besitzen, kommt eine weitere Vorstellung des Integrals hinzu: Der Flä-

cheninhalt unter einer Kurve, dem Graphen der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$, kann als Wahrscheinlichkeit gedeutet werden. Bei großen Stichproben findet sich hier eine sinnvolle Anwendung, ebenso beim Testen von Hypothesen. Hier liegt bei den Schülerinnen und Schülern nicht mehr der Rechenaufwand im Vordergrund (Benutzung einer Tabelle hinsichtlich der Standardnormalverteilung oder Benutzung eines Taschenrechners mit der Möglichkeit, numerisch zu integrieren), sondern das Interpretieren eines Ergebnisses bzw. das Reflektieren über sinnvolle Fragestellungen.

3. Wird in einem fünften Lehrgang einer Handelsakademie unterrichtet, so liegt die Schwierigkeit darin, eine Einführung in die Stochastik mit nur zwei Wochenstunden zu geben. Hier stehen der Wahrscheinlichkeitsbegriff und die Vorstellungen dazu (Wahrscheinlichkeit als Maß für eine Erwartung und hierauf Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil, Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit als subjektives Vertrauen) sowie die Binomialverteilung im Vordergrund der Projekt- bzw. Unterrichtsarbeit. Die eingeschränkte Zeit lässt auch nicht sehr viel Spielraum für detaillierte Erörterungen, der praktischen Anwendung muss der Vorzug gegeben werden.

2 DIE LEITLINIEN UND DAS KONZEPT

2.1 Leitlinien für die Auswahl von Inhalten

2.1.1 Weltverständnis

Zufall und Wahrscheinlichkeit, Statistik und Stochastik, Gebiete, die täglich in den Medien vorkommen. Hier gelingt dem Lehrer/der Lehrerin die unmittelbare Anknüpfung an das Tagesgeschehen, in dieser Thematik kann man alles finden: Politik, Psychologie, Wahlarithmetik, Spiele, Wetten, Casino. Ein kleiner Teil des Spektrums wird in unseren Projekten experimentell und mathematisch erfahren.

2.1.2 Alltagsbewältigung

Wettquoten, Spiele, Würfel, alles Anwendungsgebiete die die Jugendlichen, aber auch deren Gefahren(eine Einheit über Spielsucht ist geplant, ebenso eine Einheit in Psychologie der Sucht) kommen im Projekt zur Sprache.

Graphen sind mittlerweile aus der täglichen Berichterstattung in den Medien nicht mehr wegzudenken. Die Schülerinnen und Schüler sollen lernen, sich mit ihnen auch kritisch auseinanderzusetzen, sie sollen auch die Grenzen der Aussagekraft von Graphen sehen.

2.1.3 Wissenschaftsverständnis

Fähigkeiten zur Abstraktion und Modellbildung werden geschult. Anhand von Alltagsproblemstellungen, die in eine formale Sprache übersetzt werden, werden der Wahrscheinlichkeitsbegriff erarbeitet und die Grundlagen der beschreibenden Statistik wiederholt. Auch die Grenzen der mathematischen Modellbildung werden aufgezeigt, in dem etwa Wahrscheinlichkeit auch als subjektives Vertrauen definiert wird.

Besonderes Augenmerk wird auf die Formulierung von Sachverhalten gelegt. Probleme, die in alltäglicher Sprache gestellt werden, müssen formalisiert werden. Das wird anhand dieser Beispiele geübt, Routine und Formeln werden (ja, können!!) nur spärlich eingesetzt werden, und wenn, dann stehen sie den Schülerinnen und Schülern in Form von Tabellen zur Verfügung, sodass auch ein „Auswendiglernen“ nicht notwendig zum Ziel führt. Man muss lernen, sich mit einem Problem auseinanderzusetzen und es in mathematischen Formalismus zu bringen, Rahmenbedingungen zu berücksichtigen und Texte genau zu lesen.

2.1.4 Berufliche Orientierung und Studierfähigkeit

Der vorher angesprochene Prozess der Übersetzung von Alltagstexten in die Sprache der mathematischen Formeln und Algorithmen wird den Schülerinnen und Schülern auch im Studium und im Berufsleben helfen. Als Staatsbürger werden sie Methoden der Mathematik wieder erkennen und (vielleicht) auch kritischen hinterfragen. Ein Exkurs in die Psychologie der Sucht wird für die Studienwahl vielleicht hilfreich sein.

2.2 Leitlinien für die Auswahl von Methoden

2.2.1 An Voraussetzungen der Schülerinnen und Schüler anknüpfen

Der Wahrscheinlichkeitsbegriff kommt im alltäglichen Umfeld der Schülerinnen und Schüler häufiger vor, als diese vielleicht auf den ersten Blick erkennen können. Viele, auch im Internet abrufbare Spiele und Wetten können als Beispiele herangezogen werden. Schülerinnen und Schüler erstellen einen Fragebogen für Unterstufenklassen und Oberstufenklassen und wiederholen mit dessen Auswertung auch gleich die statistische Komponente, gleichzeitig interessiert meinen Schülerinnen und Schüler auch, was Unterstufenschülerinnen und Schüler zum Wahrscheinlichkeitsbegriff zu sagen haben und welche Vorstellungen diese damit verbinden.

2.2.2 An authentischen Problemen anwendungsbezogen lernen

Ein Kurzreferat über die Spielmöglichkeiten beim Roulette, eine Stunde gemeinsames Würfeln und dessen nachträgliche Aufarbeitung, der vorher erwähnte Fragebogen und dessen Auswertung, hier sind wir in der glücklichen Lage, „nur“ die Technik vermitteln zu müssen, die Probleme ergeben sich in mannigfaltigen Zusammenhängen eigentlich von selbst. Mit diesen elementaren Kenntnissen kann man an die Sache herangehen, Vertiefung ist jederzeit und zu jedem Ende möglich, dann wird man auch in Zukunft „draußen“ ein Instrument in der Hand haben, an dem man MEHR gelernt hat, als „Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik“.

2.2.3 Im sozialen Umfeld lernen

Der Fragebogen wird gemeinsam gestaltet und ausgewertet, Kurzreferate zu interessanten Themen werden (eventuell auch gemeinsam) vorbereitet, das gemeinsame Problemlösen steht im Mittelpunkt.

2.2.4 Mit instruktionaler Unterstützung lernen

Man kann dieses Stoffgebiet je nach Belieben ausbauen, das werden die verschiedenen Berichte aus den verschiedenen Schularten und Schulstufen zeigen, die Instruktion steht nur am Beginn im Vordergrund, jedes Problem ist anders und neu, man wird in den Berichten sehen, wie verschiedene Schülergruppen darauf reagiert haben.

3 DER UNTERRICHTSVERSUCH

3.1 Bericht von Mag. Monika Jarmer, HAK des Fonds der Wiener Kaufmannschaft, Franklinstraße, *1210* ***Wien***

3.1.1 Die Klassensituation

Der Unterrichtsversuch wurde in zwei fünften Jahrgängen durchgeführt. In der einen Klasse waren 27 Schüler, die ein Jahr zuvor aus zwei dritten Jahrgängen zusammengelegt wurden. In dieser Klasse wurde der graphikfähige Taschenrechner TI-83 verwendet.

Die zweite Klasse war eine Laptopklasse (Derive) mit 18 Schülern.

Für den Unterrichtsversuch machte es keinen Unterschied, ob Taschenrechner oder Derive verwendet wurde.

3.1.2 Der Unterrichtsverlauf

In zehn Unterrichtsstunden (Anfang November bis zu den Weihnachtsferien - unterbrochen durch eine Schularbeit zu anderen Themen) spannte sich der Bogen von der Einführung bis zur Binomialverteilung. Die Vertiefungs- und Übungsphase zur Binomialverteilung erfolgte im Jänner und ist nicht mehr dokumentiert. Mein Ziel war es, dass die Schüler die Binomialverteilung nicht rein formal abhandeln sondern auch wissen, warum die Formel so aussieht und was sie da tun.

In den ersten sieben Unterrichtsstunden liegt der Schwerpunkt auf den Grundvorstellungen **(GV)** zum Wahrscheinlichkeitsbegriff.

Ziel der achten Stunde war es, GV zu diskreten Zufallsvariablen und deren Verteilungen vor allem durch Visualisierung (Graphen) zu erzeugen.

Die neunte und zehnte Unterrichtsstunde dienten dem Versuch, die GV zum Binomialkoeffizienten als n-Tupel sowie die Formel der Binomialverteilung als GV zu erzeugen.

3.1.2.1 Einstieg

Das Konzept stammt, wie bereits erwähnt, von Prof. Dr. G. Malle.
Der Einstieg erfolgte über „Was ist ein Zufallsversuch?“ (Werfen einer Münze, etc.) und „Was ist ein Versuchsausfall?“ (Zahl, Kopf; usw.)
Wie kann man Wahrscheinlichkeiten angeben? Als relativer Anteil **(GV 2a)** Und sie ist ein Maß für die Erwartung (0 –1) **(GV 1).**

3.1.2.2 Erweiterung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

In der <u>zweiten Stunde</u> habe ich die Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit **(GV 2b)** behandelt: die Schüler hatten Würfel mit. Ebenso teilte ich Reisnägel aus und wir versuchten die Wahrscheinlichkeit zu ermitteln, mit der ein Nagel auf den Kopf oder auf die Spitze fällt.

In der dritten Stunde diskutierten wir Wahrscheinlichkeit als „subjektives Vertrauen" (Expertenmeinung, Wahrscheinlichkeit für einen Supergau etc) **(GV2c)** und verglichen den Wahrscheinlichkeitsbegriff mit dem Längenbegriff aus der Physik. (Lesestoff – vgl. dazu das Lehrbuch von G. Malle et al. „Mathematik verstehen 6")
Was ist ein sicheres Ereignis, was ein unmögliches? Wann spricht man von einem Gegenereignis? **(GV3 und 4)**

3.1.2.3 Additions- und Multiplikationsregel

In der vierten, fünften und sechsten Stunde wurden diese Regeln für Versuchsausfälle (anfangs immer mit einem Baumdiagramm!) erläutert und durch Übungen gefestigt. In der siebenten Stunde erfolgte die Verallgemeinerung der Additions- und Multiplikationsregel für Ereignisse. In diesem Zusammenhang demonstrierte ich ein Beispiel für die bedingte Wahrscheinlichkeit - vor allem, um auf die Abhängigkeit vom Informationsstand hinzuweisen: **(GV 7)**

Die 628 Beschäftigten einer Firma verteilen sich gemäß nebenstehender Tabelle. Eine Person X wird zufällig ausgewählt. Berechne:

	Frauen	Männer	Gesamt
Raucher	201	189	390
Nichtraucher	98	140	238
Gesamt	299	329	628

1) P(X ist Raucher).
2) P(X ist Raucher), wenn man bereits weiß, dass eine Frau ausgewählt wurde.
3) P(X ist Raucher), wenn man bereits weiß, dass ein Mann ausgewählt wurde.

Lösung: 1) P(X ist Raucher) = $\frac{390}{628} \approx 0{,}62$

2) P(X ist Raucher) = $\frac{201}{299} \approx 0{,}67$

3) P(X ist Raucher) = $\frac{189}{329} \approx 0{,}57$

P(X ist Raucher $\mid$ X ist eine Frau) $\approx 0{,}67$

3.1.2.4 Häufigkeits- und Wahrscheinlichkeitsverteilung

Als Vorlage dieser Einheit (achte Stunde) diente das Buch Mathematik Oberstufe 3 von Bürger, Fischer, Malle, Hpt-Verlag, 1.Auflage 1991

1) Zeichnen eines Stabdiagramms zur Wahrscheinlichkeit der Augenzahl eines Würfels; (Gleichverteilung)
2) Augensumme zweier Würfel (Dreiecksverteilung)
3) Anzahl der Wappen bei dreimaligem Münzwurf (Binomialverteilung)

Definition einer diskreten Zufallsvariablen.
Anschließend teilte ich eine Kopie aus dem oben genannten Buch aus: Seite 249: Zusammenhang zwischen Häufigkeitsverteilungen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen
Man sieht an den drei Stabdiagrammen, wie sich mit steigendem n (Erhöhung des Stichprobenumfangs) die Häufigkeitsverteilung der Wahrscheinlichkeitsverteilung nähert. ***(GV)***

3.1.2.5 Binomialkoeffizient

<u>Def</u>.: Die Anzahl der n-Tupel, in denen ein Element genau k-mal und ein zweites E-lement

genau (n – k) - mal vorkommt, wird mit $\binom{n}{k}$ bezeichnet. [lies: n über k] ***(GV)***

Der Weg zu dieser Definition führte über den Zusammenhang von Baumdiagramm und Pascal´sches Dreieck. Die Erläuterung des Begriffs n-Tupel war notwendig, da in der HAK die Vektorrechnung nicht vorgesehen ist.

Für die Ermittlung dieser Zahl verwies ich schließlich noch auf die Formelsammlung, auf ein Programm des Taschenrechners bzw. Derive und ergänzte auch noch die Formel $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Zum Abschluss der Stunde stellte ich die Aufgabe: *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei sechsmaligem Würfeln, zweimal einen Sechser zu erhalten?*

$P(X=2) = \binom{6}{2}(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^4 = 15*1/36*625/6^4 = 0,2$

Die Binomialverteilung wurde bisher noch nicht angesprochen.

3.1.2.6 Binomialverteilung

Thema dieser Stunde war die graphische Darstellung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen.

Wir zeichneten ein Balkendiagramm zu

„Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei sechsmaligem Würfeln 0, 1, 2, ...6 mal einen Sechser zu würfeln.“

Mit den vorhandenen Einzelwerten behandelten wir dann die Fragestellung $P(X\leq 2)$ und $P(X\geq 4)$ rein rechnerisch.

Nun erst formalisierten wir die Binomialverteilung wie folgt:

$P(X=k) = \binom{n}{k}p^k (1-p)^{n-k}$ **(GV)**

Begründung für die Bezeichnung „Binomialverteilung“:

1) es handelt sich exakt um die Koeffizienten des Binomischen Lehrsatzes und

2) es handelt sich um zwei Versuchsausfälle: Ereignis tritt ein oder es tritt nicht ein.

Anmerkung: In der Hak muss eindringlich betont werden, dass es sich um den Binomialkoeffizienten handelt und nicht um einen „Binomi*na*lkoeffizienten“!!

Erwähnung des Galton-Bretts und dessen Zusammenhang mit den Binomialkoeffizienten und dass man dieses im Technischen Museum (in Wien) bewundern kann.

3.1.3 Reflexionen

Die ganze Unterrichtssequenz hat den Schülern sehr gut gefallen. Es gab immer wieder Bemerkungen und Hinweise, dass der Unterricht interessant sei. Die Mitarbeit war rege und auch die schwachen Schüler machten einen aufmerksamen Eindruck.

Die Ergebnisse der Lernkontrollen und die Aufgaben der Schularbeit und auch dann der Matura waren zufriedenstellend. Allerdings betrifft dies nur die Teile, die zu rechnen waren. Verbale Antworten fielen eher schwach aus. Definitionen wurden brav auswendig gelernt aber nicht verstanden. (Bei einer Lernkontrolle fragte ich nach der Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil – worauf viele die Definition für relative Häufigkeit als Antwort gaben. Der Grund war ein Druckfehler in den Unterlagen.)

Der Begriff des n-Tupels blieb überhaupt nicht hängen. Die Verwendung dieses Begriffs wäre daher sicher bereits im zweiten Jahrgang im Rahmen der Matrizenrechnung notwendig.

Stattdessen hatten die Schüler die Vorstellung von „Anzahl der Wege“ und die „Unterste Reihe des Baumes“. (Dies lassen verbale Äußerungen der Schüler während der Stunden vermuten.)

Die Gewichtung der Lehrinhalte auf den Wahrscheinlichkeitsbegriff allgemein sowie auf die Additions- und Multiplikationsregel (inkl. Baumdiagramm) hat den Weg zum Verständnis der Binomialverteilung geebnet.

Nicht gelungen ist, dass die Schüler die Inhalte verbal beschreiben können. Um die Schüler aus der mathematischen Sprachlosigkeit herauszuführen, bedarf es mit Sicherheit mehr Zeit.

3.1.4 Anhang

14.3 Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit Blatt 1

Definition: Ein Zufallsversuch werde n-mal unter den gleichen Bedingungen durchgeführt. Tritt dabei ein bestimmtes Ereignis E genau k-mal ein, so nennt man den Quotienten $h_n(E) = \frac{k}{n}$

die **relative Häufigkeit des Ereignisses E** unter den n Versuchen.

In der folgenden Tabelle sind die Ergebnisse einer Wurfserie angegeben, in der ein Würfel 10 000-mal geworfen wurde.

Augen-zahl	Nach 100 Würfen absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit	Nach 1 000 Würfen absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit	Nach 10 000 Würfen absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit
1	20	0,20	176	0,176	1697	0,1697
2	14	0,14	160	0,160	1653	0,1653
3	16	0,16	163	0,163	1645	0,1645
4	21	0,21	169	0,169	1695	0,1695
5	12	0,12	162	0,162	1633	0,1633
6	17	0,17	170	0,170	1677	0,1677

Wir sehen: Je mehr Würfe man durchführt, desto mehr nähert sich im Großen und Ganzen die relative Häufigkeit jeder Augenzahl dem Wert $\frac{1}{6}$ = 0,1666…, also dem relativen Anteil jeder Augenzahl an allen Augenzahlen. Man kann daher (mit einer gewissen Unsicherheit) die relative Häufigkeit als Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer bestimmten Augenzahl nehmen.

Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil: Ein Zufallsversuch werde n-mal unter gleichen Bedingungen durchgeführt (n groß). Als Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses E kann man (mit einer gewissen Unsicherheit) die relative Häufigkeit von E unter diesen n Versuchen nehmen, dh.:

$$P(E) \approx h_n(E)$$

Der südafrikanische Mathematiker John Kerrich war während des zweiten Weltkrieges in Jütland gefangen und verbrachte seinen Gefängnisaufenthalt zum Teil damit, eine Münze $10\,000$-mal zu werfen. Seine Ergebnisse sind in der nebenstehenden Tabelle angegeben.

Anzahl der Würfe	Abs. Häuf. von „Zahl"	Anzahl der Würfe	Abs. Häuf. von „Zahl"	Anzahl der Würfe	Abs. Häuf. von „Zahl"
10	4	100	44	1 000	502
20	10	200	98	2 000	1 013
30	17	300	146	3 000	1 510
40	21	400	199	4 000	2 029
50	25	500	255	5 000	2 533
60	29	600	312	6 000	3 009
70	32	700	368	7 000	3 516
80	35	800	413	8 000	4 034
90	40	900	458	9 000	4 538
				10 000	5 067

1) Übertrage die Tabelle in das Heft und ergänze sie durch die relativen Häufigkeiten von „Zahl".

2) Nähern sich die relativen Häufigkeiten von „Zahl" dem relativen Anteil $\frac{1}{2}$? Gibt es dabei irgendwelche Auffäligkeiten?

Es gibt Fälle, wo die Bestimmung einer Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil und als relative Häufigkeit zu deutlich unterschiedlichen Resultaten führt. Ein solches Beispiel wird in der nächsten Aufgabe behandelt.

14.14 Jeder Schülerin bzw. jeder Schüler soll einen Reißnagel 30-mal werfen und notieren, wie oft jede der beiden nebenstehenden Lagen auftritt. Anschließend sind die Ergebnisse aller Schüler zusammenzufassen und die absolute bzw. relative Häufigkeit der beiden Lagen zu ermitteln.

Die relativen Häufigkeiten für die beiden Lagen hängen von der Bauart des Reißnagels ab. In der folgenden Tabelle sind die Ergebnisse einer Wurfserie angegeben, in der ein bestimmter Reißnagel 300-mal geworfen wurde.

Anzahl der Würfe	50	100	150	200	250	300
Relative Häufigkeit der ersten Lage	0,740	0,730	0,733	0,725	0,732	0,730
Relative Häufigkeit der zweiten Lage	0,260	0,270	0,267	0,275	0,268	0,270

Eine naive Überlegung mit relativen Anteilen würde jeder der beiden Lagen die gleiche Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ zuordnen. Die Versuchsserie ergibt aber relative Häufigkeiten für die beiden Lagen, die deutlich von $\frac{1}{2}$ abweichen, nämlich ungefähr 0,7 für die erste Lage und 0,3 für die zweite Lage. In einem solchen Konfliktfall gibt man im Allgemeinen der relativen Häufigkeit den Vorrang vor dem relativen Anteil. Der Grund dafür liegt im Verdacht, dass die einzelnen Versuchsausfälle nicht die gleiche Chance des Eintretens haben. Nur unter dieser Bedingung darf man nämlich den relativen Anteil als Wahrscheinlichkeit nehmen. Im Fall des Reißnagelwurfs erscheint es auch plausibel, dass die erste Lage gegenüber der zweiten bevorzugt ist, weil der Schwerpunkt des Reißnagels tiefer liegt.

Beachte: Der relative Anteil darf nur dann als Wahrscheinlichkeit genommen werden, wenn man annehmen kann, dass alle Versuchsausfälle die gleiche Chance des Eintretens haben. Die relative Häufigkeit kann aber auch dann als Wahrscheinlichkeit genommen werden, wenn diese Annahme nicht gerechtfertigt ist.

Führt ein ähnliches Experiment wie mit dem Reißnagel mit anderen Gegenständen durch, zB mit einer Schraube oder einem Neujahrsschweinchen wie in Abb. 14.4.

Abb.14.4

Wird ein Baustein mit ungleichen Seitenflächen geworfen, so kann er auf drei Arten zu liegen kommen (siehe Abb. 14.5). Ermittelt die Wahrscheinlichkeiten dieser Lagen durch eine Versuchsserie mit einem bestimmten Baustein.

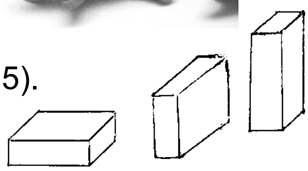


Abb. 14.5

Aufgaben zur Multiplikationsregel für Versuchsausfälle Blatt 3

15.03 Max spielt an einem Automaten, bei dem man mit der Wahrscheinlich= keit $\frac{1}{8}$ gewinnt, und anschließend an einem Automaten, bei dem man mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{9}$ gewinnt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Max

a) bei beiden Automaten gewinnt, **b)** bei beiden Automaten verliert,
c) beim ersten Automaten gewinnt und beim zweiten verliert,
d) beim ersten Automaten verliert und beim zweiten gewinnt?

15.04 Max spielt dreimal an einem Automaten, bei dem man mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ gewinnt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Max

a) dreimal gewinnt, **b)** dreimal verliert?

15.05 Eine Münze wird dreimal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) dreimal Zahl kommt, **b)** dreimal Wappen kommt,
c) beim ersten Mal Zahl und sonst immer Wappen kommt?

15.06 Ein Rouletterad (siehe Seite ...) wird zweimal gedreht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass **a)** zweimal schwarz kommt, **b)** zweimal rot kommt,
c) das erste Mal schwarz und das zweite Mal rot kommt,
d) das erste Mal rot und das zweite Mal schwarz kommt.

15.07 Ein Rouletterad (siehe Seite ...) wird dreimal gedreht. Jemand entscheidet sich beim ersten Spiel zwischen Rot und Schwarz, beim zweiten Spiel zwischen Manque und Passe, beim dritten Spiel zwischen 1., 2. und 3. Kolonne. Berechne die Wahrscheinlichkeiten aller 12 möglichen Versuchsausfälle.

15.08 Bei der Fließbandproduktion eines technischen Produkts ist im Durchschnitt eines von 100 Produkten defekt. Zur Kontrolle werden zwei Produkte zufällig ausgewählt. Berechne die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses:

a) Beide Produkte sind defekt. **b)** Das erste Produkt ist defekt, das zweite nicht.
c) Das erste Produkt ist nicht defekt, das zweite ist defekt.
d) Keines der beiden Produkte ist defekt.

15.09 Ein Verkehrsunternehmen weiß aus Erfahrung, dass ca. ein Fünftel der Fahrgäste ohne Fahrschein fährt. Ein Kontrollor überprüft nacheinander drei zufällig ausgewählte Fahrgäste. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) der erste Fahrgast einen Fahrschein hat, die anderen beiden aber nicht,
b) die ersten beiden Fahrgäste einen Fahrschein haben, der dritte jedoch nicht,
c) alle drei Fahrgäste einen Fahrschein haben? (*Hinweis*: Da das Verkehrsunternehmen sehr viele Fahrgäste hat, ändert sich an den Wahrscheinlichkeiten nichts, wenn sehr wenige Fahrgäste bereits ausgewählt wurden.)

15.10 In einer Stadt ist ca. jeder fünfte Autolenker nicht angegurtet. Ein Polizist hält hintereinander drei Autos an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) alle drei Lenker angegurtet sind, **b)** die ersten beiden Lenker angegurtet sind, der dritte jedoch nicht, **c)** der erste Lenker angegurtet ist, die anderen beiden jedoch nicht, **d)** keiner der drei Lenker angegurtet ist?

15.11 Ein Meinungsforschungsinstitut macht eine telefonische Umfrage. Das Institut weiß aus Erfahrung, dass zur betreffenden Zeit nur etwa ein Drittel der Angerufenen zu Hause ist und dass etwa die Hälfte der Erreichten die telefonische Auskunft verweigert. Das Institut nimmt an, dass auch etwa die Hälfte der Nichterreichten die telefonische Auskunft verweigern würde. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig angerufene Person **a)** zu Hause ist und Auskunft gibt, **b)** nicht zu Hause ist, aber Auskunft geben würde?

15.14 Aus der Urne in Abb. 15.10 werden nacheinander zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinli

a) die erste Kugel weiß und die zweite schwarz ist,
b) die erste Kugel weiß und die zweite rot ist,
c) die erste Kugel schwarz und die zweite rot ist,
d) die erste Kugel schwarz und die zweite rot ist,
e) die erste Kugel rot und die zweite weiß ist.
f) die erste Kugel rot und die zweite schwarz ist.

15.15 Wie Aufgabe 15.14, nur ohne Zurücklegen.

15.16 Aus der Urne in Abb. 15.11werden nacheinander zwei Kuç ohne Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinli

a) die erste Kugel weiß und die zweite schwarz ist,
b) die erste Kugel weiß und die zweite rot ist,
c) die erste Kugel schwarz und die zweite rot ist,
d) beide Kugeln weiß sind,
e) beide Kugeln schwarz sind,
f) beide Kugeln rot sind?

15.17 Wie Aufgabe 15.16, nur mit Zurücklegen.

15.20 In einem Karton befinden sich zwölf Glühlampen, von denen drei defekt sind. Ein Kunde zieht blind zwei Glühlampen aus dem Karton. Wie groß ist die Wahr= scheinlichkeit, dass
a) beide Glühlampen in Ordnung sind, **b)** beide Glühlampen defekt sind.

15.21 In einer Schulklasse sind 30 Jugendliche. Drei davon machen grundsätzlich keine Mathe- Hausübung, der Rest macht die Mathe-Hausübung stets. Die Lehrerin kontrolliert nacheinander zwei zufällig ausgewählte Klassenmitglieder. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie a) zwei Klassenmitglieder mit Hausübung, b) zwei Klassenmitglieder ohne Hausübung erwischt.

15.22 Unter den 15 Schülern und 18 Schülerinnen einer Klasse werden zwei Preise verlost, wobei ausgeschlossen ist, dass beide Preise an dieselbe Person gehen. Berechne die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses:
a) Beide Preise gehen an einen Schüler. **b)** Beide Preise gehen an eine Schülerin. **c)** Der erste Preis geht an einen Schüler, der zweite an eine Schülerin. **d)** Der erste Preis geht an eine Schülerin, der zweite an einen Schüler.

15.23 In einer Klasse mit 20 Schülern sollen ein Klassensprecher, sein Stellvertreter und ein Kassier gewählt werden, wobei kein Klassenmitglied mehr als eine Funktion übernehmen soll. Wie groß wäre die Wahrscheinlichkeit, dass Gabriele Klassensprecher, Peter Stellvertreter u. Heinz Kassier wird, wenn zufällig gewählt würde?

15.24 Ein Fuhrunternehmen besitzt 15 Lastkraftwagen, von denen 5 technische Mängel aufweisen. Ein Kontrollor wählt zu Prüfzwecken 4 von den 15 Lastkraftwagen zufällig aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird
a) keiner, **b)** jeder der ausgewählten Lastkraftwagen technische Mängel aufweisen?

15.26 Bei der Millionenshow im Fernsehen erhält man zu jeder Frage vier Antwortmöglichkeiten A, B, C, D. Jemand kann zwei aufeinander folgende Fragen nicht beantworten und wählt jedes Mal zufällig eine der vier Antwortmöglichkeiten aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,dass er in beiden Fällen die richtige Antwort erwischt?

15.27 Ein Multiple-Choice-Test besteht aus drei Fragen, zu denen es jeweils sechs Antwortmöglichkeiten A, B, C, D, E, F gibt. Jemand kreuzt bei jeder Frage blind eine Antwortmöglichkeit an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, alle drei Fragen richtig zu beantworten?

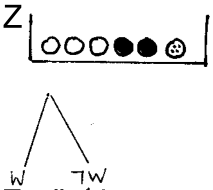
Blatt 5

15.30 Aus einem Kartenspiel mit 32 Karten (8 Herz, 8 Karo, 8 Pik und 8 Treff) werden nacheinander mit Zurücklegen drei Karten gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) alle drei Karten Herzkarten sind,
b) die ersten beiden Karten Herzkarten sind, die dritte Karte aber nicht,
c) die erste Karte eine Herzkarte ist, die anderen beiden Karten aber nicht,
d) keine der drei Karten eine Herzkarte ist?

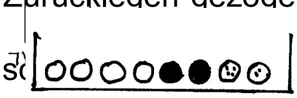
15.31 In einer Urne sind 9 Kugeln mit den Nummern von 1 bis 9. Es werden 4 Kugeln **a)** mit Zurücklegen, **b)** ohne Zurücklegen gezogen. Ist es wahrscheinlicher, die Folge (1, 2, 3, 4) oder die Folge (4, 1, 7, 8) zu erhalten? Schätze zuerst und rechne dann.

15.33 Aus der Urne in Abb. 15. 13 werden zwei Kugeln ohne Z ezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses:



a) Genau eine der beiden Kugeln ist weiß.
b) Genau eine der beiden Kugeln ist schwarz.
c) Genau eine der beiden Kugeln ist rot.

15.34 Aus der Urne in Abb. 15.15 werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses.



a) Beide Kugeln haben dieselbe Farbe. **b)** Eine Kugel ist s
c) Die zweite Kugel ist weiß. **d)** Keine der Kugeln ist rot.

15.35 Ein Würfel wird zweimal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses:

a) Die erste Zahl ist gerade, die zweite ungerade.
b) Die erste Zahl ist kleiner als 3, die zweite größer als 4.
c) Die erste Zahl ist eine Primzahl, die zweite nicht.
d) Die erste Zahl ist eine gerade Primzahl, die zweite eine ungerade Primzahl.

Blatt 6

Aufgaben zur Additionsregel für Versuchsausfälle

15.37 Aus der Urne in Abb. 15.19 werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses:

Abb. 15.19

a) Beide Kugeln haben dieselbe Farbe.
b) Mindestens eine Kugel ist schwarz.
c) Die zweite Kugel ist rot. **d)** Die erste Kugel ist schwarz.

15.38 Aus der Urne in Abb. 15.20 werden zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkei des folgenden Ereignisses:

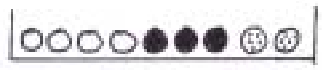


Abb. 15.20

a) Keine Kugel ist weiß.
b) Alle Kugeln sind weiß. **c)** Mindestens eine Kugel ist weiß.
d) Mindestens eine Kugel ist schwarz oder rot.

15.39 In einem dunklen Zimmer sind in einer Schublade 4 schwarze, 6 graue und 2 braune Socken. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zwei Socken gleicher Farbe aus dieser Lade zu ziehen, wenn **a)** zwei Socken, **b)** drei Socken gezogen werden?

15.40 Eine Münze wird dreimal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses:
a) Es kommt zweimal Zahl. **b)** Es kommt mindestens einmal Zahl.
c) Es kommt öfter Kopf als Zahl. **d)** Es kommt beide Male das Gleiche.

15.41 Jemand setzt beim Roulette viermal hintereinander **a)** auf rot, **b)** abwechselnd auf rot und schwarz. Mit welcher Wahrscheinlichkeit verliert er alle vier Spiele?

15.42 In einer Urne befinden sich drei weiße, zwei schwarze und eine rote Kugel. Es wird dreimal ohne Zurücklegen gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses:
a) Keine der gezogenen Kugeln ist rot. **b)** Es kommen genau zwei weiße Kugeln vor. **c)** Alle Kugeln habe dieselbe Farbe, **d)** Jede Farbe kommt vor,
e) Die zweite Kugel ist schwarz.

15.43 Aus einem Kartenspiel mit 32 Karten, worunter 4 Asse sind, werden 5 Karten ohne Zurücklegen gezogen.
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass kein As unter den Karten ist?
c) Überprüft das Ergebnis durch eine Versuchsserie. (Jede Schülerin und jeder Schüler führe 20 Versuche durch.)

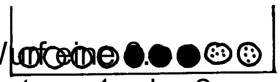
15.44 In einem Säckchen befinden sich die Buchstaben T, T, O, O. Nacheinander werden die Buchstaben aus den Säckchen gezogen und aneinander gereiht.
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, den Namen OTTO zu erhalten?
d) Überprüft das Ergebnis durch eine Versuchsserie. (Jede Schülerin und jeder Schüler führe 20 Versuche durch.)

15.45 Vater, Mutter und Sohn spielen drei Tennispartien, und zwar spielt der Sohn abwechselnd gegen Vater und Mutter. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Sohn gegen den Vater gewinnt, ist $\frac{1}{3}$, und die Wahrscheinlichkeit, dass er gegen die Mutter gewinnt, ist $\frac{2}{3}$. Es wird vereinbart, dass der Sohn Sieger gegen die Eltern ist, wenn er zwei Partien hintereinander gewinnt. Soll der Sohn zuerst gegen den Vater oder zuerst gegen die Mutter spielen? Berechne für beide Möglichkeiten seine Gewinnwahrscheinlichkeit.

Zweckmäßige Verwendung des Gegenereignisses

15.48 Ein Würfel wird dreimal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses:

a) Es kommt die Folge (1, 2, 3). **b)** Es kommt bei keinem Wurf eine 6.



c) Es kommt bei mindestes einem Wurf eine 6. **d)** Es kommt nur 1 oder 2.

15.49 Eine Münze wird viermal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses:

a) Es kommt immer Zahl. **b)** Es kommt immer Kopf.

c) Es kommt mindestens einmal Zahl. **d)** Es kommt mindestens einmal Kopf.

15.50 In einer Urne sind 5 weiße, 6 schwarze und 4 rote Kugeln. Berechne die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses:

a) Keine der Kugeln ist weiß. **b)** Keine der Kugeln ist schwarz.

c) Keine der Kugeln ist rot. **d)** Die erste Kugel ist nicht rot oder die zweite Kugel ist nicht schwarz. (*Hinweis* zu d): Gegenereignis!)

Teilversuche, die nicht hintereinander ausgeführt werden

15.52 In einer Schule sind 97 % der Schüler gegen Tetanus und 52 % gegen Frühsommermeningitis geimpft. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig ausgewählter Schüler a) gegen beide Krankheiten, b) gegen mindestes eine dieser Krankheiten geimpft?

15.53 Max spielt an einem Automaten, bei dem man mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{8}$ gewinnt. Seine Freundin riskiert mehr und spielt gleichzeitig an einem Automaten, bei dem man nur mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{15}$ gewinnt (aber dafür im Falle des Gewinns mehr erhält). Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt mindestens einer der beiden?

15.54 Eine Firma führt drei neue Produkte ein. Aufgrund vorangegangener Erfahrungen mit ähnlichen Produkten wird geschätzt, dass das Produkt A mit der Wahrscheinlichkeit 0,8, das Produkt B mit der Wahrscheinlichkeit 0,6 und das Produkt C mit der Wahrscheinlichkeit 0,5 erfolgreich sein wird. Es wird angenommen, dass die Erfolge der drei Produkte voneinander unabhängig sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei der drei Produkte erfolgreich sein werden?

15.55 Eine Diebstahlsicherung löst im Einbruchsfall mit der Wahrscheinlichkeit 0,9, eine andere mit der Wahrscheinlichkeit 0,95 Alarm aus. Ein Hausherr lässt beide Anlagen so einbauen, dass sie unabhängig voneinander funktionieren.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit geben beide Anlagen im Einbruchsfall Alarm?

b) Mir welcher Wahrscheinlichkeit gibt im Einbruchsfall mindestes eine der beiden Anlagen Alarm? (*Hinweis* zu b): Gegenereignis!)

15.56 Eine Kohlenmonoxid-Warnanlage für Garagen arbeitet mit einer Zuverlässigkeit von 90 %, dh. Die Wahrscheinlichkeit, dass sie bei Gefahr Alarm gibt, ist 0,9. Zur Sicherheit lässt ein Garagenbesitzter an zwei verschiedenen Stellen seiner Garage je eine solche Warnanlage einbauen. Berechne die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses:

a) Beide Anlagen geben bei Gefahr Alarm.

b) Mindestens eine der beiden Anlagen gibt bei Gefahr Alarm.

Multiplikations- und Additionsregel für Ereignisse Blatt 8

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir die Multiplikations- und Additionsregel für Versuchsausfälle zur Multiplikations- bzw. Additionsregel für beliebige Ereignisse.

Verknüpfung von Ereignissen

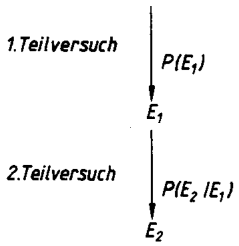
Im vorigen Abschnitt haben wir desöfteren Ereignisse der Art „E_1 und E_2" bzw. „E_1 oder E_2" betrachtet (zum Beispiel „Erste Kugel weiß und zweite Kugel weiß" bzw. „Erste Kugel weiß oder zweite Kugel weiß"). Man schreibt kurz $E_1 \wedge E_2$ bzw. $E_1 \vee E_2$. Eine genauere Definition sieht so aus:

Definition: Es seien E_1, E_2 Ereignisse eines Zufallsversuches.
(1) Das Ereignis „E_1 und E_2", symbolisch $\mathbf{E_1 \wedge E_2}$, tritt genau dann ein, wenn sowohl das Ereignis E_1 als auch das Ereignis E_2 eintritt.
(2) Das Ereignis „E_1 oder E_2", symbolisch $\mathbf{E_1 \vee E_2}$, tritt genau dann ein, wenn mindestens eines der Ereignisse E_1 bzw. E_2 eintritt.

Multiplikationsregel für Ereignisse

Die Multiplikationsregel haben wir bisher nur für Versuchsausfälle formuliert: Die Wahrscheinlichkeit eines einem Weg entsprechenden Versuchsausfalles ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang des Weges. Wir überlegen uns jetzt, dass diese Regel auch für beliebige Ereignisse gilt und werden die Regel dabei etwas präziser formulieren.

Wir betrachten einen aus zwei Teilversuchen bestehenden Zufallsversuch und interessieren uns dafür, dass beim ersten Teilversuch das Ereignis E_1 und beim zweiten Teilversuch das Ereignis E_2 eintritt . (Baumdiagramme kann man nicht nur für Versuchsausfälle, sondern auch für Ereignisse zeichnen.)



Das Ereignis E_1 tritt beim ersten Teilversuch mit der Wahrscheinlichkeit $P(E_1)$ ein. Falls beim ersten Teilversuch das Ereignis E_1 bereits eingetreten ist, tritt das Ereignis E_2 beim zweiten Teilversuch mit der bedingten Wahrscheinlichkeit $P(E_2 | E_1)$ ein. Wir schließen daraus:

Multiplikationsregel für Ereignisse:

Sind E_1, E_2 Ereignisse eines Zufallsversuchs, dann gilt:

$$P(E_1 \wedge E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2 | E_1)$$

Additionsregel für Ereignisse **Blatt 9**

Die Additionsregel haben wir bisher nur für Versuchsausfälle formuliert: Sind A und B zwei Ausfälle eines Zufallsversuchs, dann gilt: $P(A \vee B) = P(A) + P(B)$. Wir überlegen uns jetzt, dass diese Regel unter einer bestimmten Voraussetzung auch für Ereignisse gilt.

15.68 Ein Würfel wird geworfen. Wir betrachten die Ereignisse:
E_1: Es kommt eine Zahl ≤ 2.
E_2: Es kommt eine Zahl ≥ 4.
Berechne $P(E_1)$, $P(E_2)$. Gilt $P(E_1 \vee E_2) = P(E_1) + P(E_2)$?

Lösung: $P(E_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(E_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Das Ereignis $E_1 \vee E_2$ tritt genau dann ein, wenn eine der Zahlen 1, 2 oder eine der Zahlen 4, 5, 6 kommt. Es tritt also genau dann ein, wenn eine der Zahlen 1, 2, 4, 5, 6 kommt. Somit ist $P(E_1 \vee E_2) = \frac{5}{6}$. Wie man sieht, gilt:

$$P(E_1 \vee E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

15.69 Ein Würfel wird geworfen. Wir betrachten die Ereignisse:
E_1: Es kommt eine ungerade Zahl.
E_2: Es kommt eine Primzahl
Berechne $P(E_1)$, $P(E_2)$. Gilt $P(E_1 \vee E_2) = P(E_1) + P(E_2)$?

Lösung: $P(E_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(E_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Das Ereignis $E_1 \vee E_2$ tritt genau dann ein, wenn eine der Zahlen 1, 3, 5 oder eine der Zahlen 2, 3, 5 kommt. Es tritt also genau dann ein, wenn eine der Zahlen 1, 2, 3, 5 kommt. Somit ist $P(E_1 \vee E_2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Wie man sieht, gilt:

$$P(E_1 \vee E_2) \neq P(E_1) + P(E_2)$$

An den letzten beiden Aufgaben sehen wir: Die Beziehung $P(E_1 \vee E_2) = P(E_1) + P(E_2)$ gilt manchmal, aber nicht immer. Die beiden Aufgaben lassen jedoch vermuten, dass diese Beziehung genau dann gilt, wenn die Ereignisse E_1 und E_2 nicht gleichzeitig eintreten können. In Aufgabe 15.68 war es unmöglich, dass E_1 und E_2 zugleich eintreten: es kann ja nicht gleichzeitig eine Zahl ≤ 2 und eine Zahl ≥ 4 kommen. In Aufgabe 15.69 war dies jedoch möglich: Es kann ja eine Zahl kommen, die zugleich ungerade und Primzahl ist, nämlich die Zahl 3 oder die Zahl 5.

Definition: Zwei Ereignisse eines Zufallsversuches heißen **einander ausschließend**, wenn sie nicht beide zugleich eintreten können.

Wir vermuten somit die folgende Regel:

Additionsregel für Ereignisse: Sind E_1 und E_2 einander ausschließende Ereignisse eines Zufallsversuchs, dann gilt:

$$P(E_1 \vee E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

15.61 Man weiß, dass ein bestimmtes Kosmetikprodukt bei ca. 8 % der Benutzer eine Hautrötung hervorruft. Bei 3 % derjenigen, bei denen eine Hautrötung hervorgerufen wird, tritt auch ein Juckreiz auf. Jemand kauft sich dieses Produkt. Berechne mit Hilfe der Multiplikationsregel für Ereignisse, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Anwendung des Produkts bei diesem Benutzer sowohl ein Hautrötung als auch einen Juckreiz hervorrufen wird.

15.63 Eine Firma bietet $500\,000$ Lose an, unter denen sich 10 Gewinnlose befinden. Aus den 10 Personen, die ein Gewinnlos ziehen, wird in einer spektakulären Show eine Person ausgelost, die ein Auto erhält. Berechne mit Hilfe der Multiplikationsregel, mit welcher Wahrscheinlichkeit man dieses Auto gewinnen kann.

15.64 Man weiß, dass ca. 30 % der Bewohner einer bestimmten Region ein bestimmtes krankheitserregendes Virus in sich tragen. Die Krankheit kann nur durch dieses Virus hervorgerufen werden, doch bricht sie nur bei ca. 2 % der Virusträger aus. Berechne mit Hilfe der Multiplikationsregel für Ereignisse, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Bewohner dieser Region tatsächlich an dieser Krankheit erkrankt.

15.65 Ein Flugzeug verkehrt zwischen den Städten A und B. Wegen gelegentlicher schlechter Witterungsverhältnisse kann es nur in 98 % aller Fälle in A starten und nur in 95 % aller Fälle in A starten und in B landen. Ermittle mit Hilfe der Multiplikationsregel für Ereignisse die Wahrscheinlichkeit, dass das Flugzeug in B landet, wenn es in A bereits gestartet ist.

15.66 Die Wahrscheinlichkeit, dass der Bus vom Flughafen zum Bahnhof pünktlich abfährt, beträgt 0,75. Die Wahrscheinlichkeit, dass er pünktlich abfährt und pünktlich ankommt, beträgt 0,60. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt er pünktlich an, falls er pünktlich abfährt?

15.67 In einer Stadt schneit es an einem Dezembertag mit der Wahrscheinlichkeit 0,40. Ein verschneiter Dezembertag wird mit der Wahrscheinlichkeit 0,70 von einem weiteren verschneiten Dezembertag gefolgt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für zwei aufeinander folgende Dezembertage, dass es **a)** an beiden Tagen schneit, **b)** an mindestens einem der beiden Tage nicht schneit?

3.2 Bericht von Mag. Gabriela Rösler, BG u. BRG Ettenreichgasse, *1100* ***Wien***

3.2.1 Die Klassensituation

In dieser Klasse sind 19 Schülerinnen und Schüler, alle haben seit der ersten Klasse Englisch, seit der dritten Klasse Latein und seit der fünften Klasse Französisch beziehungsweise Italienisch, ein „klassisches“ neusprachliches Gymnasium. Die 10 Schülerinnen und 9 Schüler sind sehr leistungswillig, großteils sehr fleißig und ihre Stärken liegen eindeutig *nicht* in den Natruwissenschaften und schon gar nicht in der Mathematik.

3.2.2 Der Unterrichtsverlauf

3.2.2.1 Einstieg:

Nach dem Konzept von Univ. Prof. Dr. Günther Malle wurde mit dem Wahrscheinlichkeitsbegriff als relativer Anteil begonnen. Im Verlauf der Diskussion der praktischen Beispiele ergab sich, dass eine Schülerin, die bereits volljährig ist, schon im Casino war, daher wurde in der nächsten Stunde ein Kurzreferat zum Thema „Roulette“ gehalten.

Dann wurde in Gruppen gewürfelt, um den Begriff der relativen Häufigkeit zu veranschaulichen.

Ein Fragebogen wurde gemeinsam erstellt, an seiner Auswertung wurden Begriffe aus der beschreibenden Statistik wiederholt:

Die Schülerinnen und Schüler legten ihn einer 2. , einer 3. und einer 8. Klasse vor. Unmittelbar nach dem Fragebogen findet man die Auswertung der Fragen, die schriftlich zu beantworten waren.

Fragebogen: ***Warum fällt das Butterbrot meistens auf die Butterseite?***

Ein Fragebogen der 7.B zur Wahrscheinlichkeitsrechnung

1.) Wenn du eine Münze in die Höhe wirfst und wieder auffängst, was siehst du öfter? Kreuze das Zutreffende an!

Die Seite mit der Zahl ☐ Die Seite mit dem Wappen ☐ Beide Seiten sind gleich wahrscheinlich ☐

Bei mir kommt immer die Seite

Warum? --

2.) Glaubst du, dass es Zahlen gibt, die beim Würfeln besonders oft vorkommen?

Ja ☐ Nein ☐

Wenn ja, welche?
Mehrfachantworten sind möglich!

1 ☐ **2** ☐ **3** ☐ **4** ☐ **5** ☐ **6** ☐

3.) Fällt das Butterbrot wirklich immer auf die Butterseite?

Ja ☐ Beide Seiten sind gleich wahrscheinlich ☐ Nein ☐ Das kann man so nicht sagen ☐ Murphy's Law ☐

„Murphy's Law" besagt, dass alles, was schief gehen kann, auch schief geht.

Wenn man nun einer Katze, die ja bekanntlich immer auf den Füßen landet, ein Butterbrot auf den Rücken bindet, und die Katze fallen lässt, was passier?

4.) Aus einem Spiel der Wettanbieter „betandwin.com" Was bedeutet für dich diese Zeile?

Sturm Graz - Rapid Wien

Sturm Graz	3.60		X	3.25		Rapid Wien	1.90	

AUSWERTUNG DER SCHRIFTLICH BEANTWORTETEN FRAGEN

2. Klasse

3.) Katze:

- Es kann nicht mehr gehen, weil seine Füße gebunden sind.
- Sie fällt auf ihre Füße.
- Sie hat kein Gleichgewicht mehr.
- Sie fliegt.
- Die Katze fliegt auf den Rücken.
- Das Butterbrot fällt auf die Butterseite.

4.) Wettanbieter:

- Es bedeutet, dass jemand 3.60 Euro wettet, dass Sturm Graz gewinnt.
- Wenig zahlen, mehr gewinnen.
- Dass Rapid am Meisten Gewinn bringen würde.
- Wettquoten:

3. Klasse

1.) Warum?

- Wurftechnik (welche Seite liegt oben bevor man wirft?)
- Keine Ahnung, blöde Frage
- Wie man Münze wirft und auffängt
- Weil das so ist
- Ist vielleicht schwerer oder nur Glück
- Mit Gleichgewicht zu tun

3.) Wenn man nun eine Katze, die ja bekanntlich immer auf den Füßen landet, ein Butterbrot auf den Rücken bindet, und die Katze fallen lässt, was passiert?

- Katze fällt schneller weil ihr Gewicht erhöht wird.
- Katze landet auf den Füßen.
- Katze fällt auf den Füßen weil sie schwerer ist.
- Katze landet auf den Füßen, aber was hat die Katze mit dem Butterbrot zu tun?
- Katze landet auf den Füßen weil das Butterbrot leichter als die Katze ist.
- Es kommt auf die Höhe des Tisches an.
- Katze bricht sich die Wirbelsäule und beide Seiten der Katze sind gleich.
- Katze landet trotz des Butterbrots auf die Füße wegen ihrer Reflexe

4.) Was bedeutet diese Zeile

- Gar nichts
- Spielbewertung
- Je ne sais pas
- Wette nicht
- Nix
- Es ist eine Gleichung

- Keine Ahnung – hasse Rapid
- Sturm Graz spielt gegen Rapid, sonst keine Ahnung
- Einfach eine Gleichung

8. Klasse

1.) Wenn du eine Münze in die Höhe wirfst und wieder auffängst, was siehst du öfter? Kreuze das Zutreffende an!
- Zahl 50%, Wappen 50%   P(x)=1/2; P(x') =1/2
- Weil Ergebnismenge Ω= {Seite 1/ Seite 2}=> 2 Möglichkeiten

3.) Fällt das Butterbrot wirklich immer auf die Butterseite?
- Katze= schwerer als Brot => landet auf Pfoten
- Katze reißt sich Brot vom Rücken => frisst es Katze landet auf den Füßen (5.)
- Katze kippt auf eine Seite
- *lol* Katze landet auf den Beinen außer Butterbrot ist schwerer (2.)

4.) Aus einem Spiel der Wettanbieter „betandwin.com" Was bedeutet für dich diese Zeile?

- Geld auf Graz ; Quote von 3.60 eine höhere Gewinn beim Sieg von Graz erhalten als bei Rapid; es ist unwahrscheinlich, dass Graz gewinnt-> höhere Quote
  3.60= Wahrscheinlichkeit, dass Graz gewinnt-> x= Gleichstand
  1.90= Wahrscheinlichkeit, dass Sturm gewinnt
- Nix (4.)
- Keine Ahnung ich wette nicht.
- Wahrscheinlichkeit mit der ein Match unentschieden ausgeht.
- Pfff… Keine Ahnung
- Sturm Graz weniger Geld setzt als auf Rapid setzt -> Rapid größere Chancen zu gewinnen

3.2.2.2 Beschreibende Statistik

Die Klasse verbrachte mit mir drei Stunden im EDV-Raum, alle Auswertungen wurden von den Schülerinnen und Schülern mit Excel und Word selbst erstellt, gestaltet und gemeinsam diskutiert.

Begriffe wie „arithmetisches Mittel", „geometrisches Mittel", „Streuung", „Varianz" und „Standardabweichung" wurden im Internet recherchiert und auf einem Arbeitsblatt (im Anhang) zusammengefasst.

3.2.2.3 Weiterführung des Unterrichtes nach dem Skriptum von Günther MALLE

Folgende Definitionen, Sätze und Beispiele wurden behandelt:

unmögliche und sichere Ereignisse - Gegenereignis

bedingte Wahrscheinlichkeit

Baumdiagramme, dazu im Anhang das Arbeitsblatt

Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

Multiplikationsregel für Versuchsausfälle

Additionsregel für Versuchsausfälle

Unabhängige Ereignisse

Der Satz von BAYES

Binomialverteilung: Der Versuch mit dem Galton-Brett und 1000 Kugeln wurde durchgeführt.

Eine Sammlung der an die Schülerinnen und Schüler ausgegebenen Beispiele findet sich im Anhang.

3.2.3 Zusammenarbeit mit Psychologie

Im Psychologieunterricht wurden dem Thema „Sucht“ und da besonders der nicht durch Drogen hervorgerufenen Sucht zwei Stunden gewidmet, sodass eine Beleuchtung der Problematik auch von dieser Seite her zustande kam.

3.2.4 Zusammenarbeit mit BE - Lehrausgang ins MUMOK

Während des Projektes wurde auch ein Lehrausgang ins Museum moderner Kunst gemacht, die Ausstellung von John Baldessari wurde besichtigt und unter dem Aspekt „Ordnung“ und „Kunst“ im Museum mit der dortigen Museumspädagogin besprochen. Im Anschluss ergab sich auch in der Klasse in der nächsten Mathematikstunde eine lebhafte Diskussion zum Thema „Was ist Kunst?“ „Zufall in der Kunst“

Anlass waren Fotografien Baldessaris, die serienweise (300 Bilder!) in die Luft geworfene Bälle, oder am Strand liegende Bälle oder vier Fisolen zeigen, und denen eben ein gewisses Ordnungsprinzip zu Grunde liegt, das man, wie bei einem Rätsel selbst erraten muss (Fisolen, Bälle am Strand) oder das dabeisteht (geworfener Ball zum Zeitpunkt der Aufnahme möglichst im Zentrum des Bildes, das Zentrum ist mit einem Kreis markiert). Dies war für die Schülerinnen und Schüler und für mich Anlass, über Kunst – Ordnung und Zufall nachzudenken.

3.2.5 Besuch von Roman Sallmutter (Casinos Austria)

Wir haben erst einen Fragenkatalog zusammengestellt, der Herrn Sallmutter per Mail übermittelt wurde, im Anschluss findet man den Bericht über diese Stunde, den eine Schülerin verfasst hat.

3.2.5.1 Fragenkatalog für den Besuch von Roman Sallmutter (Casinos Austria)

Wie spricht man Sie an? (Herr Croupier ist uns komisch vorgekommen) das läuft auf die Frage, was die genaue Berufsbezeichnung ist, hinaus.

Gibt es eine spezielle Ausbildung oder welche Fähigkeiten muss man mitbringen?

Empfindet man für die Spieler Verantwortung (zum Beispiel wenn man weiß, dass sich einer verrennt oder auszuticken beginnt und sich um Kopf und Kragen bringt, greift man ein?)

Wie sind Ihrer Meinung nach die Gewinnchancen?

Welche Leute kommen (Protze, Hausfrauen, Geldsäcke)?

Beobachten Sie spezielle Techniken bei den Spielern? Systeme, immer mit der linken Hand, Ticks, Tricks?

Bluffen?

Schwindeln?

Betrügen?

Bestechung?

Kann man etwas über die Höhe der Einsätze sagen?

Stört Sie die Dauerbeobachtung durch Kameras oder bietet das auch eine gewisse Sicherheit?

Ist das überhaupt so?

Wie viel verdienen Sie?

3.2.5.2 Bericht

GEGEN DIE MATHEMATIK KANN MAN NICHT GEWINNEN

Zusammenfassung des Gespräches mit Roman Sallmutter (Casinos Austria)

von Katharina PAL

Herr Sallmutter arbeitet im Casino Kärntnerstraße, es gibt in Österreich zwölf Casinos (alle Casinos Austria)

Unterschied Casinos Austria – Casinos im grenznahen Bereich – Internet (win2day)

> Casinos Austria haben strenge Vorgaben vom heimischen Gesetzgeber, eine Automatenhalle im Prater hat das nicht, sie machen sich selbst Konkurrenz mit dem Internet - Geschäft, was die Angestellten nicht freut.

Öffnungszeiten sind 13.00 – 3.00, Freitags bis 4.00

Arbeitszeit: 60 Minuten, dann 1/4h Pause – am anstrengendsten (physisch) ist Black Jack.

Es ist ein reiner Männerberuf (schon längere Zeit niemand neuer mehr eingestellt, damals gab es noch ein Nachtarbeitsverbot für Frauen) Korrekte Bezeichnung: Spieltechnischer Angestellter.

Ausbildung: Ein 2 mal drei Monate dauernder Kurs Gute Beobachtungsgabe, hohe Konzentrationsfähigkeit, exzellente Kopfrechenkenntnisse.

Publikum: Ab 13.00 unter anderem auch Pensionisten, die praktisch jeden Tag kommen, ab 20.00 hauptsächlich Pärchen, die einen schönen Abend mit Restaurantbesuch verbringen möchten, ab Mitternacht oft Geschäftsleute aus der Umgebung.

Glücksspielgesetz verlangt Sorgfaltspflicht, das bedeutet Ausweisleistung, man kann sich ganz oder teilweise sperren lassen, neueste höchstgerichtliche Urteile nehmen Casinos mehr in die Verantwortung. Bei hohen Einsätzen sind die Casinos verpflichtet, mitzuschreiben. Auch Beobachtung von einzelnen Spielern ist wichtig. Besonders hohe Jetons (10 000€) werden ebenfalls registriert.

Gehalt nicht vorhersehbar, da man von den Trinkgeldern lebt, diese werden nach einem bestimmten Schlüssel über alle Casinos in Österreich verteilt. Es gibt schlechte Monate, wie zum Beispiel den Juni und gute, wie zum Beispiel den Dezember.

Die Spieltische sind nicht mit Video überwacht, alles andere schon. Es liegt daher in der Kompetenz des Croupiers, und das ist ein Qualitätsmerkmal, denn sonst könnten viele diesen Job machen. Daher wollen die Croupiers auch keine Videoüberwachung.

Versuch zu manipulieren: Am häufigsten wird versucht nach „rien ne va plus“ noch zu setzen. Zu späterer Abendstunde spielt bei solchen Versuchen auch Alkoholkonsum eine Rolle. Beim Black Jack war es so, dass mit 6 Kartenspielen à 52 Karten gespielt wurde und nicht nach jedem Spiel die Karten wieder untergemischt wurden, das hat für gut trainierte Spieler einen Vorteil gebracht, aber das ist seit einiger Zeit durch ein vollautomatisches System, das die Karten nach jedem Spiel wieder untermischt ersetzt worden. Trotzdem hat man bei Black Jack die größten Chancen, wenn man einige Regeln gut beherrscht.

Es gibt auch immer wieder Spieler, die beim Roulette versuchen, aus den letzten Zahlen auf die nächsten zu schließen, was Herrn Sallmutter aber zu dem Satz veranlasst hat: Gegen die Mathematik kann man nicht gewinnen.

3.2.6 Anhang

3.2.6.1 Arbeitsblätter:

3.2.6.1.1 Grundbegriffe der STATISTIK

1.) Definition: Grundgesamtheit:

2.) Definition: Stichprobe:

3.) Mittelwert (e):

a) das arithmetische Mittel:

b) das geometrische Mittel:

c.) Zentralwert (Median):

d) Modalwert:

4.) Streuungsmaße
Definition: Spannweite

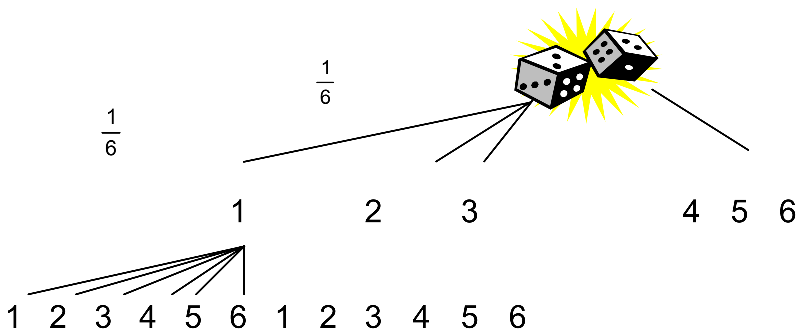
a) mittlere lineare Abweichung

b) Varianz

c) Standardabweichung

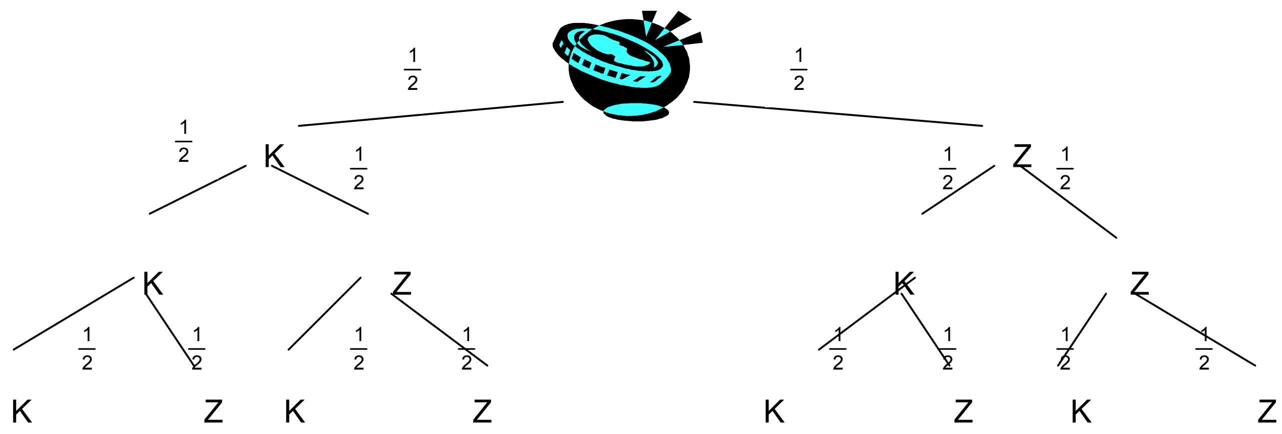
3.2.6.1.2 BAUMDIAGRAMM:

WÜRFELN:



Die Wahrscheinlichkeit, 2 mal hintereinander einen 1 er zu würfeln ist also $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = 0{,}02\dot{6}$

MÜNZE

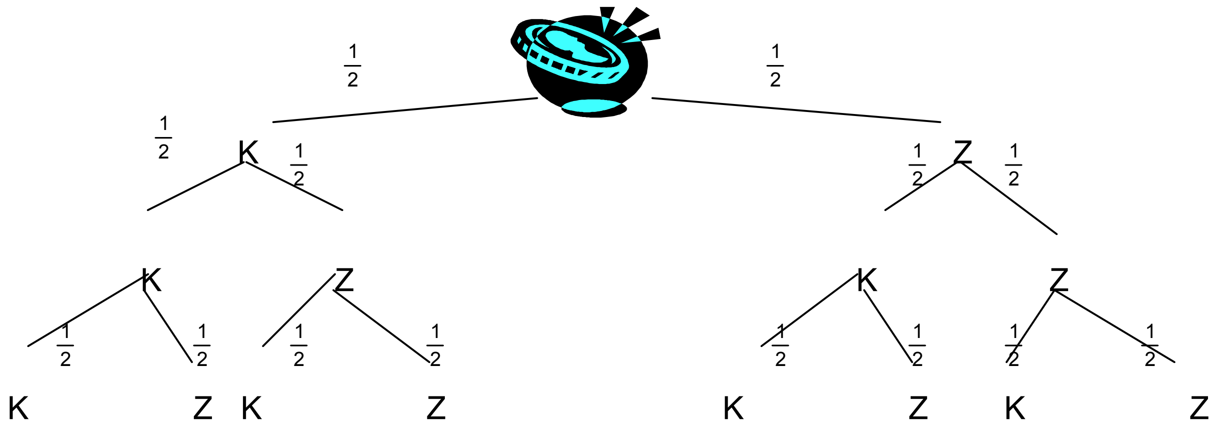


KKK KKZ KZK KZZ ZKK ZKZ ZZK ZZZ

Es gibt beim ersten Zug 2 verschiedene Ausfälle und beim zweiten wieder und beim dritten wieder, also gibt es insgesamt 8 verschiedene Ausfälle. Nach dem senkrechten Weg im Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit $:\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{2}$ also:

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0{,}125 = 12{,}5\,\%$

Ergänze das Baumdiagramm um einen weiteren Wurf!



3.2.6.1.3 Aufgabensammlung aus dem Skriptum

3.2.6.1.3.1 Grundaufgaben 1

1.) Max spielt an einem Automaten, bei dem man mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{8}$ gewinnt, und anschließend an einem Automaten, bei dem man mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{9}$ gewinnt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Max

a) an beiden Automaten gewinnt,
b) bei beiden Automaten verliert,
c) beim ersten Automaten gewinnt und beim zweiten verliert
d) beim ersten Automaten gewinnt und beim zweiten verliert?

2.) Max spielt dreimal an einem Automaten, bei dem man mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ gewinnt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Max

a) dreimal gewinnt
b) dreimal verliert?

3.) Eine Münze wird dreimal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) dreimal Zahl kommt
b) dreimal Wappen kommt
c) beim ersten Mal Zahl und sonst immer Wappen kommt?

4.) Ein Roulettrad wird zweimal gedreht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) zwei Mal schwarz kommt,
b) zweimal rot kommt

c) das erste Mal schwarz und das zweite Mal rot kommt

d) das erste Mal rot und das zweite Mal schwarz kommt?

5.) Ein Rouletterad wird dreimal gedreht. Jemand entscheidet sich beim ersten Spiel zwischen Rot und Schwarz, beim zweiten Spiel zwischen Manque und Passe und beim dritten Spiel zwischen erster, zweiter und dritter Kolonne. Berechne die Wahrscheinlichkeit aller 12 möglichen Versuchsausfälle

6.) Ein Verkehrsunternehmen weiß aus Erfahrung, dass ca. $\frac{1}{5}$ der Fahrgäste ohne Fahrschein fährt. Ein Kontrollor überprüft nacheinander drei zufällig ausgewählte Fahrgäste. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) der erste Fahrgast einen Fahrschein hat, die anderen beiden nicht,

b) die ersten beiden Fahrgäste einen Fahrschein haben, der dritte jedoch nicht

c) alle drei Fahrgäste einen Fahrschein haben.

7.) In einer Stadt ist ca. jeder fünfte Autolenker nicht angegurtet. Ein Polizist hält nacheinander drei Autos an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) alle drei Lenker angegurtet sind

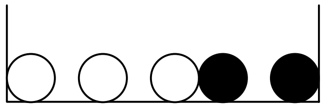
b) die ersten beiden Lenker angegurtet sind, der dritte jedoch nicht

c) der erste Lenker angegurtet ist, die beiden anderen jedoch nicht

d) keiner der drei Lenker angegurtet ist?

3.2.6.1.3.2 Grundaufgaben 2

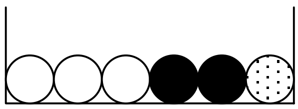
1.) In einer Urne sind 3 weiße und 2 schwarze Kugeln. Es werden nacheinander zwei Kugeln blind gezogen, wobei die erste Kugel in die Urne zurückgelegt wird.



Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass
a) beide Kugeln schwarz sind
b) die erste Kugel schwarz und die zweite weiß ist.

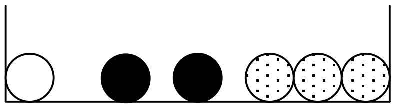
2.) Wie oben nur ohne Zurücklegen

3.) Aus nebenstehender Urne werden nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
a) die erste Kugel schwarz und die zweite weiß ist?
b) die erste Kugel weiß und die zweite schwarz ist
c) die erste Kugel schwarz und die zweite rot ist?
d) die erste Kugel rot und die zweite schwarz ist
e) die erste Kugel rot und die zweite weiß ist
f) die erste Kugel weiß und die zweite rot



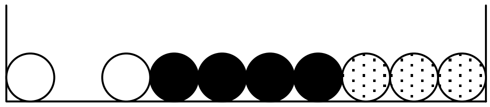
4.) Wie oben nur ohne Zurücklegen

5.) Aus nebenstehender Urne werden nacheinander zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
a) die erste Kugel weiß und die zweite schwarz ist?
b) die erste Kugel schwarz und die zweite weiß ist?
c) die erste Kugel schwarz und die zweite rot ist?
d) die erste Kugel rot und die zweite schwarz ist?
e) die erste Kugel rot und die zweite weiß ist
f) die erste Kugel weiß und die zweite rot



6.) Wie oben nur ohne Zurücklegen

7.) In einer Urne sind zwei weiße (w), vier schwarze(s) und drei rote(r) Kugeln. Aus der Urne werden drei Kugeln ohne zurücklegen gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeit für (www) (wws) (wwr) mit einem Baumdiagramm!



8.) In einer Urne sind drei weiße, vier schwarze und fünf rote Kugeln. Es wird zweimal gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeit für alle Paare (ww), (ws), (wr), (sw), usw.
a) ohne Zurücklegen
b) mit Zurücklegen.

3.2.6.1.3.3 Grundaufgaben 3

1.) Ein Meinungsforschungsinstitut macht eine telefonische Umfrage. Das Institut weiß aus Erfahrung, dass zur betreffenden Zeit nur etwa ein Drittel aller Angerufenen zu Hause ist und dass etwa die Hälfte der Erreichten die telefonische Auskunft verweigert. Das Institut nimmt an, dass auch etwa die Hälfte der Nichterreichten die telefonische Auskunft verweigern würde. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig angerufene

- Person zu Hause ist und Auskunft gibt
- Nicht zu Hause ist, aber Auskunft geben würde?

2.) Unter den 15 Schülern und 18 Schülerinnen einer Klasse werden zwei Preise verlost, wobei ausgeschlossen ist, dass beide Preise an dieselbe Person gehen. Berechne die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

- beide Preise gehen an einen Schüler
- beide Preise gehen an eine Schülerin
- der erste Preis geht an einen Schüler und der zweite an eine Schülerin
- der erste Preis geht an eine Schülerin und der zweite an einen Schüler

3.) In einer Klasse mit 20 Schülern soll ein Klassensprecher, sein Stellvertreter und ein Kassier gewählt werden, wobei kein Klassenmitglied mehr als eine Funktion übernehmen soll. Wie groß wäre die Wahrscheinlichkeit, dass Gabriele Klassensprecherin, Peter Stellvertreter und Heinz Kassier wird, wenn zufällig gewählt würde?

4.) Ein Fuhrunternehmen besitzt 15 Lastkraftwagen, von denen 5 technische Mängel aufweisen. Ein Kontrollor wählt zu Prüfzwecken 4 von den 15 Lastkraftwagen zufällig aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird

- keiner
- jeder

der ausgewählten Lastkraftwagen technische Mängel aufweisen?

5.) Bei der Millionenshow im Fernsehen erhält man zu jeder Frage vier Antwortmöglichkeiten A, B, C, D. Jemand kann zwei aufeinander folgende Fragen nicht beantworten und wählt jedes Mal zufällig eine der vier Antworten aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er in beiden Fällen die richtige Antwort erwischt?

6.) Ein Multiple-Choice-Test besteht aus drei Fragen, zu denen es jeweils sechs Antwortmöglichkeiten A,B,C,D,E und F gibt. Jemand kreuzt bei drei Fragen blind eine Antwortmöglichkeit an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, alle drei Fragen richtig zu beantworten?

7.) Ein Rouletterad wird zweimal gedreht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt man, wenn man

jedes Mal auf eine gerade Zahl setzt

jedes Mal auf eine ungerade Zahl setzt

jedes Mal auf Passe setzt

jedes Mal auf die erste Kolonne setzt

jedes Mal auf die Transversale {25,26,27} setzt?

3.2.6.1.3.4 Grundaufgaben 4

1.) Ein Rouletterad wird dreimal gedreht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt man, wenn man

- das erste Mal auf rot, die anderen beiden Male auf eine gerade Zahl setzt
- das erste Mal auf ungerade, die anderen beiden Male auf Manque setzt
- das erste Mal auf das 1. Dutzend, das zweite Mal auf Cheval {20,21} und das dritte Mal auf schwarz setzt?

2.) Aus einem Kartenspiel mit 32 Karten (8Herz, 8Pik, 8Karo, 8Treff) werden nacheinander mit Zurücklegen drei Karten gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

alle drei Karten Herzkarten sind

die ersten beiden Karten Herzkarten sind, die dritte aber nicht.

3.) In einer Urne sind neun Kugeln mit den Nummern von 1 bis 9. Es werden vier Kugeln

a) mit Zurücklegen

b) ohne Zurücklegen

gezogen.

Ist es wahrscheinlicher, die Folge (1 , 2 , 3 , 4) oder die Folge (4 , 1 , 7 , 8) zu erhalten? Schätze zuerst und rechne dann.

3.) In einer Urne sind n Kugeln mit den Nummern von 1 bis n . Es werden k Ziehungen

a) mit Zurücklegen

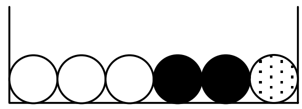
b) ohne Zurücklegen

durchgeführt.

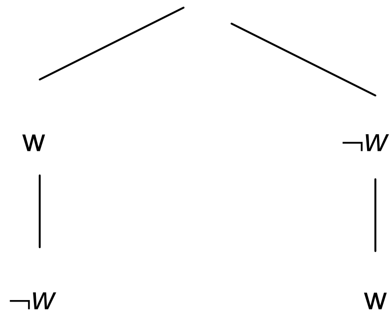
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Folge von k Nummern.

4.) Aus nebenstehender Urne werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses:

- genau eine der beiden Kugeln ist weiß
- genau eine der beiden Kugeln ist schwarz
- genau eine der beiden Kugeln ist rot.



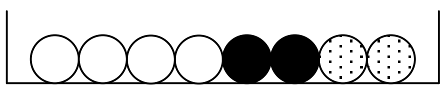
Versuch es auch mit folgendem Baumdiagramm:



Der Autor unseres Skriptums meint: „Dieses Baumdiagramm sollte genügen, die anderen Wahrscheinlichkeiten ergeben sich von selbst." Versuche es selbst!

5.) Aus nebenstehender Urne werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeiten für:

- beide Kugeln haben dieselbe Farbe
- eine Kugel ist schwarz, die andere rot
- die zweite Kugel ist weiß
- keine der Kugeln ist rot



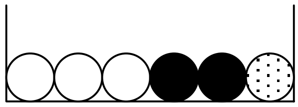
3.2.6.1.3.5 Grundaufgaben 5

1.) Ein Würfel wird zweimal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse.

- Die erste Zahl ist gerade, die zweite ungerade
- die erste Zahl ist kleiner als drei, die zweite größer als vier
- die erste Zahl ist eine Primzahl, die zweite nicht
- die erste Zahl ist eine gerade Primzahl, die zweite eine ungerade Primzahl.

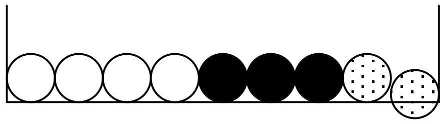
2.) Aus nebenstehender Urne werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses:

- Beide Kugeln haben dieselbe Farbe
- Mindestens eine Kugel ist schwarz
- die zweite Kugel ist rot
- Die erste Kugel ist schwarz



3.) Aus nebenstehender Urne werden zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses:

- Keine Kugel ist weiß
- Alle Kugeln sind weiß
- Mindestens eine Kugel ist weiß
- Mindestens eine Kugel ist schwarz oder rot.



4.) In einem dunklen Zimmer sind in einer Schublade 4 schwarze, 6 graue und zwei braune Socken. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zwei Socken gleicher Farbe zu erwischen, wenn man

- zwei Socken zieht
- drei Socken zieht

5.) Eine Münze wird dreimal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

- Es kommt zweimal Zahl
- Es kommt mindestens einmal Zahl
- Es kommt öfter Kopf als Zahl
- Es kommt beide Male das Gleiche.

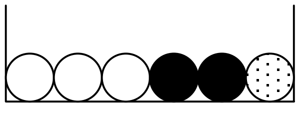
6.) Jemand setzt beim Roulette

- viermal hintereinander auf rot
- abwechselnd auf rot und schwarz

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er alle vier Spiele verliert?

7.) Aus nebenstehender Urne wird dreimal ohne Zurücklegen gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses:

- keine der gezogenen Kugeln ist rot
- Es kommen genau zwei weiße Kugeln vor
- Alle Kugeln haben dieselbe Farbe
- Jede Farbe kommt vor
- Die zweite Kugel ist schwarz.



3.2.6.1.3.6 GRUNDAUFGABEN 6

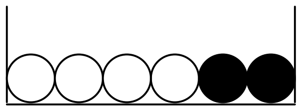
1.) Aus einem Kartenspiel mit 32 Karten, worunter 4 Asse sind, werden 5 Karten ohne Zurücklegen gezogen.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass kein As unter den Karten ist?

2.) In einem Säckchen befinden sich die Buchstaben T,T,O,O. Nacheinander werden die Buchstaben aus dem Säckchen gezogen und aneinander gereiht.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, den Namen OTTO zu erhalten?

3.) Aus der nebenstehenden Urne werden nacheinander alle 6 Kugeln gezogen. Die erste schwarze Kugel kann an erster, zweiter, ...,fünfter Stelle kommen. Was ist am wahrscheinlichsten? Schätze zuerst und rechne dann.



Die drei obigen Aufgaben eignen sich gut zum Selbst-Ausprobieren!! (einige Leute machen jeweils 20 Versuche, dann kann man schon gut auf die relativen Häufigkeiten aus den absoluten Häufigkeiten schließen)

4.) Vater, Mutter und Sohn spielen drei Tennispartien, und zwar spielt der Sohn abwechselnd gegen Vater und Mutter. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Sohn gegen den Vater gewinnt ist $\frac{1}{3}$, und die Wahrscheinlichkeit, dass er gegen die Mutter gewinnt ist $\frac{2}{3}$. Es wird vereinbart, dass der Sohn Sieger gegen die Eltern ist, wenn er zwei Partien hintereinander gewinnt. Soll der Sohn zuerst gegen den Vater oder zuerst gegen die Mutter spielen? Berechne für beide Möglichkeiten seine Gewinnwahrscheinlichkeit.

5.) Ein Würfeln wird dreimal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses:

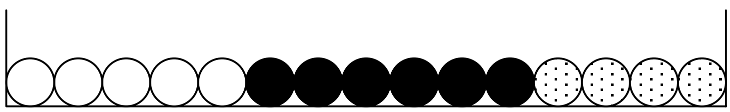
- Es kommt die Folge 1,2,3
- Es kommt bei keinem Wurf eine 6
- Es kommt mindestens bei einem Wurf eine 6.
- es kommt nur 1 oder 2

6.) Eine Münze wird viermal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses:

- Es kommt immer Zahl
- Es kommt immer Kopf
- Es kommt mindestens einmal Zahl
- Es kommt mindestens einmal Kopf.

7.) Aus der nebenstehenden Urne wird zweimal gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses:

- keine der Kugeln ist weiß
- keine der Kugeln ist schwarz



- keine der Kugeln ist rot.

3.2.6.1.3.7 Grundaufgaben 7

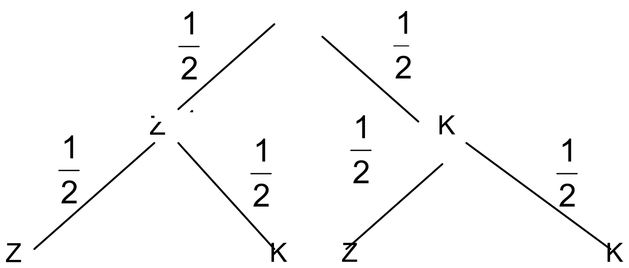
Teilversuche, die nicht hintereinander ausgeführt werden

Bsp.: Zwei Münzen werden gleichzeitig geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zweimal Kopf zu erhalten?

Lösung:

Der Versuch besteht aus zwei Teilversuchen (Erster Teilversuch: Wurf der ersten Münze, zweiter Teilversuch: Wurf der zweiten Münze). Die beiden Teilversuche werden allerdings nicht hintereinander, sondern gleichzeitig ausgeführt.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ändert sich aber nicht, wenn man sich die beiden Teilversuche hintereinander ausgeführt denkt. Somit ist P(Es kommt zweimal Kopf) = $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$



1.) In einer Schule sind 97% der Schülerinnen und Schüler gegen Tetanus und 52% gegen Frühsommermeningitis geimpft. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig ausgewählter Schüler
   - gegen beide Krankheiten
   - gegen mindestens eine dieser Krankheiten geimpft ist.

2.) Max spielt an einem Automaten, bei dem man mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{8}$ gewinnt. Seine Freundin riskiert mehr und spielt gleichzeitig an einem Automaten, bei dem man mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{15}$ gewinnt (aber im Falle eines Gewinnes mehr erhält). Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt mindestens einer der beiden?

3.) Eine Firma führt drei neue Produkte ein. Aufgrund vorangegangener Erfahrungen mit ähnlichen Produkten wird geschätzt, dass das Produkt A mit der Wahrscheinlichkeit 0,8, das Produkt B mit der Wahrscheinlichkeit 0,6 und das Produkt C mit der Wahrscheinlichkeit 0,5 erfolgreich sein wird. Es wird angenommen, dass die Erfolge der Produkte voneinander unabhängig sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei der drei Produkte erfolgreich sein werden?

4.) Eine Diebstahlsicherung löst im Einbruchsfall mit der Wahrscheinlichkeit 0,9, eine andere mit der Wahrscheinlichkeit 0,95 Alarm aus. Ein Hausherr lässt beide anlagen so einbauen, dass sie unabhängig voneinander funktionieren.
   - Mit welcher Wahrscheinlichkeit geben beide Anlagen im Einbruchsfall Alarm?

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit gibt im Einbruchsfall mindestens eine der beiden Anlagen Alarm?

3.2.6.1.3.8 Grundaufgaben 8

1.) Man weiß, dass ein bestimmtes Kosmetikprodukt bei ca. 8% der Benutzer eine Hautrötung hervorruft. Bei 3% derjenigen, bei denen es eine Hautrötung hervorruft, tritt auch Juckreiz auf. Jemand kauft sich dieses Produkt. Berechne mithilfe der Multiplikationsregel für Ereignisse, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Anwendung des Produktes bei diesem Benutzer sowohl Hautrötung als auch Juckreiz hervorrufen wird.

2.) Bei einem Zufallsversuch tritt das Ereignis E_1 in p% aller Fälle ein. Man nimmt an, dass in q% aller Fälle, bei denen E_1 eintritt, auch das Ereignis E_2 eintritt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sowohl E_1 als auch E_2 eintritt?

3.) Eine Firma bietet 500 000 Lose an, unter denen sich 10 Gewinnlose befinden. Aus den 10 Personen, die ein Gewinnlos gezogen haben, wird in einer spektakulären Show eine Person ausgelost, die ein Auto erhält. Berechne mit Hilfe der Multiplikationsregel. Mit welcher Wahrscheinlichkeit man dieses Auto gewinnen kann.

4.) Man weiß, dass ca. 30% der Bewohner einer bestimmten Region ein bestimmtes krankheitserregendes Virus in sich tragen. Die Krankheit kann nur durch dieses Virus hervorgerufen werden, doch bricht sie nur bei 2% der Virusträger aus. Berechne mithilfe der Multiplikationsregel für Ereignisse, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Bewohner dieser Region tatsächlich an dieser Krankheit erkrankt.

5.) Ein Flugzeug verkehrt zwischen den Städten A und B. Wegen gelegentlich schlechter Witterungsverhältnisse kann es nur in 98% aller Fälle in A starten und nur in 95% aller Fälle in A starten und in B landen. Ermittle mit Hilfe der Multiplikationsregel für Ereignisse, die Wahrscheinlichkeit, dass ein Flugzeug in B landet, wenn es in A bereits gestartet ist.

6.) Die Wahrscheinlichkeit, dass der Bus vom Flughafen zum Bahnhof pünktlich abfährt, beträgt 0,75. Die Wahrscheinlichkeit, dass er pünktlich abfährt und pünktlich ankommt, beträgt 0,6. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt er pünktlich an, wenn er pünktlich abgefahren ist?

7.) In einer Stadt schneit es an einem Dezembertag mit der Wahrscheinlichkeit 0,40. Ein verschneiter Dezembertag wird mit der Wahrscheinlichkeit von 0,7 von einem weiteren verschneiten Dezembertag gefolgt. Wie gro0ß ist die Wahrscheinlichkeit für zwei aufeinander folgende Dezembertage, dass es

   a) an beiden Tagen schneit

   b) an mindestens einem der beiden Tage nicht schneit?

3.2.6.1.3.9 Grundaufgaben 9

1.) Max und seine Freundin Eva spielen im Casino Roulette. Wir betrachten die Ereignisse E_1: Max gewinnt, E_2: Eva gewinnt. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer der beiden gewinnt, und überprüfe die Beziehung

   $P(E_1 \vee E_2) = P(E_1) + P(E_2)$, falls die beiden folgendermaßen setzen:

a) Max setzt auf die Transversale {1, 2, 3} Eva auf Passe {über 18}

b) Max setzt auf ungerade, Eva wiederum auf Passe.

2.) Überprüfe, dass die Ereignisse E_1 und E_2 einander ausschließen und berechne $p(E_1 \vee E_2)$ mit Hilfe der Additionsregel für Ereignisse.

a) Wurf eines Würfels: E_1: Es kommt eine gerade Zahl, E_2: Es kommt 3.

b) Ziehen aus einer Urne, die 26 Zettel mit den Buchstaben A, B, C, D, … enthält. E_1: Es kommt ein Buchstabe von A bis J, E_2: Es kommt ein Buchstabe von Q bis Z.

c) Zweimaliger Münzwurf E_1: Es kommt zweimal Zahl, E_2: Es kommt zweimal Kopf.

d) Zweimaliger Münzwurf: E_1: Es kommt genau einmal Zahl, E_2: Es kommt genau einmal Kopf.

3.) Ein Würfel wird geworfen: Zeige mit Hilfe der Multiplikationsregel für unabhängige Ereignisse, dass die Ereignisse E_1 und E_2 unabhängig sind.

a) E_1: Es kommt eine gerade Zahl E_2: Es kommt 2 oder 3

b) E_1: Es kommt eine ungerade Zahl. E_2: Es kommt eine Zahl ≥ 5.

c) E_1: Es kommt eine Zahl ≤ 4. E_2: Es kommt eine der Zahlen 2,3,5.

d) E_1: Es kommt 1 oder 2 E_2: Es kommt eine Primzahl.

4.) Ein Würfel wird geworfen. Sind die Ereignisse E_1 und E_2 unabhängig? Entscheide mit Hilfe der Multiplikationsregel für unabhängige Ereignisse,

a) E_1: Es kommt 1,2 oder 4 E_2: Es kommt 3 oder 4

b) E_1: Es kommt 2, 3, 5 oder 6 E_2: Es kommt eine Zahl 3 oder 4

c) E_1: Es kommt 2, 4, 5 oder 6 E_2: Es kommt 1 oder 3.

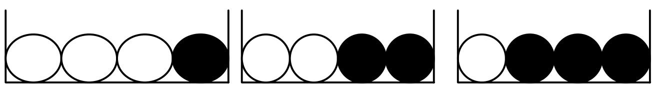
d) E_1: Es kommt 2, 4, 5 oder 6 E_2: Es kommt 1, 2 oder 4.

5.) Zwei Würfel werden geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit

a) zwei 6-er zu erhalten?

b) einen Pasch (zwei gleiche Augenzahlen) zu erhalten?

6.) Nebenstehend sind drei Urnen abgebildet. Eine Urne soll zufällig ausgewählt werden und aus ihr soll zufällig eine Kugel gezogen werden.



a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Kugel schwarz?

b) Falls eine schwarze Kugel gezogen wird, mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt diese aus Urne 1, 2 oder 3?

3.2.6.1.3.10 Grundaufgaben 10

1.) Man weiß, dass derzeit 0,01% aller Menschen einer bestimmten Region an TBC erkrankt sind. Bei einem bestimmten TBC-Test reagieren 99% aller Erkrankten positiv, aber auch leider 3% aller Nichterkrankten. Eine Person wird aus dieser

Region zufällig ausgewählt. Sie reagiert auf den Test positiv. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person tatsächlich an TBC erkrankt ist?

2.) Drei Firmen erzeugen das gleiche Produkt jeweils im gleichen Ausmaß. Erfahrungsgemäß sind 3% der von der Firma A erzeugt

Produkte defekt, 2% der von der Firma B erzeugten und 1% der von der Firma C erzeugten. Ein Produkt wird zufällig ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es defekt?

Falls ein defektes Produkt ausgewählt wurde, mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt es von der Firma A, B, C?

3.) Die Schülerzahlen der sechsten Klasse einer Schule sind:

6A: 30, davon 21 Mädchen

6B: 32, davon 11 Mädchen

6C: 29, davon 15 Mädchen.

Ein Sechstklässler wird zufällig ausgewählt.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es ein Mädchen?

Falls ein Mädchen ausgewählt wurde, mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt es aus der 6a, 6Bbzw 6c?

4.) In einer Stadt gibt es 100 Taxis, von denen 40 grün und 60 blau sind. In einer Nacht wurde ein Passant von einem Taxi überfahren, wobei der Lenker Fahrerflucht beging. Aufgrund polizeilicher Ermittlungen kommen zwei Lenker in die engere Wahl, einer mit einem grünen Taxi und einer mit einem blauen Taxi. Eine Augenzeugin schwor vor Gericht, dass das Taxi grün war. Daraufhin wird der Lenker des grünen Taxis verurteilt. Ein kritischer Polizeibeamter führte anschließend einen Versuch durch und stellte fest, dass die Augenzeugin in der Nacht 6 von 10 grünen Taxis als grün bezeichnete, aber leider auch 3 von 10 blauen Taxis. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das von der Augenzeugin gesehene Taxi tatsächlich grün war?

Zeichne auch ein Baumdiagramm mit Absolutzahlen.

5.) Ein Würfel wird fünfmal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augenzahl 6

- genau drei Mal vorkommt
- genau vier Mal vorkommt

6.) Ein Würfel wird fünfmal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augenzahl 6

- höchstens zwei Mal kommt
- mindestens vier Mal kommt?

3.3 Bericht von Dr. Bernhard Salzger, Don Bosco-Gymnasium, Don Bosco-Straße, 2442 Ebreichsdorf-Unterwaltersdorf

3.3.1 Die Klassensituation

In der achten Klasse Aufbaugymnasium sind 15 Schülerinnen und Schüler. Da bereits ein Jahr zuvor ein IMST²-Projekt zum Thema Differenzenquotient und Differentialquotient durchgeführt wurde, ist diese Art von Projekt den Lernenden bereits vertraut. In der siebenten Klasse wurde hinsichtlich Stochastik eine Einführung in den Wahrscheinlichkeitsbegriff geboten, weiters wurden Baumdiagramme gezeichnet und besprochen, Additions- und Multiplikationsregel durchgenommen, ebenso wurden die Binomialverteilung und das Testen von Hypothesen mit Hilfe der Binomialverteilung vorgestellt und damit Aufgaben gerechnet. Bereits in der siebenten Klasse ergaben sich teilweise recht interessante Fragen von Seiten der Schüler, die nun in der achten Klasse wieder aufgegriffen werden konnten.

3.3.2 Der Unterrichtsverlauf

3.3.2.1 Einstieg (Grundvorstellungen):

Bevor nun in der achten Klasse einfach „im Stoff weitergemacht“ wurde, sollte den Schülerinnen und Schülern noch einmal das Wichtigste aus der siebenten Klasse vor Augen geführt werden. Mit der Überschrift „Was soll man sich unter einer Wahrscheinlichkeit vorstellen?“ und mit Bezug auf einen Artikel von Günther und Sonja Malle (mit demselben Titel) sollte an bereits Gelerntes angeknüpft werden.

Die Antworten auf die eben erwähnte Frage waren teilweise korrekt, teilweise kurios, teilweise bizarr und teilweise falsch. Einige Antworten (sprachlich ein wenig restauriert) mögen nun angeführt werden:

- „Wahrscheinlichkeit ist die Möglichkeit, dass ein Ereignis eintritt.“
- „Wahrscheinlichkeit ist Schicksal.“
- „Wahrscheinlichkeit ist der Versuch, mit mathematischen Hilfsmitteln die Zukunft vorherzusagen.“
- „Wahrscheinlichkeit ist der Anteil einer Möglichkeit, die eintreten kann, wobei man nie eine bestimmte Gewissheit haben kann.“
- „Wahrscheinlichkeit heißt Schlüsse aufgrund von Erfahrungen und Möglichkeiten zu ziehen.“

Letztlich wurde ein Schlussstrich unter diverse Definitionsversuche gezogen, da die Schülerinnen und Schüler wissen wollten, was jetzt wirklich unter Wahrscheinlichkeit zu verstehen sei.

Folgende Grundüberlegung wurde an den Anfang gestellt: „Wahrscheinlichkeit ist ein Maß für eine Erwartung.“ Der Grad der Erwartung kann nun entweder durch eine Zahl von 0 bis 1 oder als Prozentangabe von 0% bis 100% ausgedrückt werden.

Die drei Grundvorstellungen konnten von Schülerseite anhand von Beispielen aus dem Alltag bzw. aus bereits Gelerntem erkannt werden:

„Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil“

„Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit“

„Wahrscheinlichkeit als subjektives Vertrauen“

Zudem folgten einige weitere grundlegende Erkenntnisse, die kaum einer weiteren Reflexion bedurften: Wahrscheinlichkeiten sind stets unsicher, Wahrscheinlichkeiten sind stets vom Informationsstand abhängig und Wahrscheinlichkeiten sind stets subjektiv.

3.3.2.2 Die weiteren Unterrichtseinheiten:

3.3.2.2.1 Wiederholung der Binomialverteilung

Dem „methodischen Leitfaden zur Stochstik“ von Univ. Prof. Dr. Günther Malle folgend stand zunächst eine Wiederholung der grundlegenden Aspekte der Binomialverteilung im Vordergrund. Hierzu wurde folgende Aufgabe gerechnet:

Aufgabe: Ein Würfel wird fünfmal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Sechser 1) genau dreimal, 2) genau viermal, 3) höchstens zweimal, 4) mindestens viermal kommt?

Aus der Lösung für 1) ($P(H=3)=\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2\approx 0{,}03$) lassen sich die Lösungen für die anderen drei Teilaufgaben ersehen. Den Schülerinnen und Schülern wurde somit das Prinzip der Binomialverteilung, wie es in der siebenten Klasse ausführlich besprochen worden war, wieder klar.

Eine weitere Aufgabe machte nun deutlich, dass man mit der Binomialverteilung oft an die Grenzen des Machbaren stoßen kann:

5.18 Eine Münze wird 1000-mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 520-mal „Zahl“ kommt? (BÜRGER; FISCHER; MALLE, Mathematik Oberstufe 4)

Analog zur vorigen Aufgabe sähe der Lösungsweg folgendermaßen aus:

$$P(H\le 520)=P(H=0)+P(H=1)+...+P(H=520)=$$
$$=\binom{1000}{0}\cdot 0{,}5^0\cdot 0{,}5^{1000}+\binom{1000}{1}\cdot 0{,}5^1\cdot 0{,}5^{999}+...+\binom{1000}{520}\cdot 0{,}5^{520}\cdot 0{,}5^{480}$$

Hier stößt man an zeitliche und konditionelle Grenzen, würde man ohne Zuhilfenahme von geeigneten Computerprogrammen die Lösung suchen.

3.3.2.2.2 Annäherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

Nun gilt es, eine einfachere Lösungsmethode zu finden, die ein brauchbares Ergebnis liefert. Mit Hilfe von Histogrammen und Tabellen (BÜRGER, FISCHER, MALLE, Mathematik Oberstufe 4, S. 105ff.) wird nun eine Möglichkeit vorgestellt, Wahrscheinlichkeiten durch Flächeninhalte darzustellen. Somit ist zusätzlich eine weitere wichtige Deutung des Integrals als Wahrscheinlichkeit vermittelt worden. Jene Kurve, die jener Annäherung zugrunde liegt, ist die gaußsche Glockenkurve.

die jener Annäherung zugrunde liegt, ist die gaußsche Glockenkurve. Hier handelt es sich um den Graphen der Funktion $\varphi(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$, wobei $\mu = n \cdot p$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$. Den Flächeninhalt, den diese Kurve mit der ersten Achse in dem Intervall $[-\infty; x]$ einschließt, bezeichnet man als $\Phi(x)$.

Da in dieser Klasse mit dem grafikfähigen Taschenrechner Texas Instruments TI-82 gerechnet wurde, lag es nahe, diese Funktion für weitere Berechnungen einzuprogrammieren. Auf die Überführung in die Standardnormalverteilung wurde dennoch nicht verzichtet. Schlussendlich stellte sich heraus, dass etwa die Hälfte der Klasse mit der Standardnormalverteilung und die andere Hälfte mit dem TI-82 rechnete.

Natürlich kam die Frage, ob man nun auf die Binomialverteilung überhaupt verzichten könne. Dies führte zu der Faustregel: „Die Näherungsformel für binomialverteilte Zufallsvariablen darf verwendet werden, wenn $n \cdot p > 5$ und $n \cdot (1-p) > 5$."

Die darauffolgende Unterrichtseinheit war dann den wichtigsten Aspekten der Normalverteilung gewidmet. Vor allem die Begriffe Erwartungswert μ und Standardabweichung σ standen im Mittelpunkt der Betrachtungen, so auch die folgende Definition:

„Eine Zufallsvariable X, deren Wahrscheinlichkeit durch eine gaußsche Glockenkurve mit den Parametern μ und σ festgelegt ist, nennt man normalverteilt mit den Paramtern μ und σ. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X bezeichnet man als Normalverteilung mit den Paramtern μ und σ."

In diesem Zusammenhang wurde auch die Standardglockenkurve (μ = 0 und σ = 1 mit $x = \mu + z \cdot \sigma$) vorgestellt und folgender Satz hierzu genannt:

„Ist eine Zufallsvariable X normalverteilt mit den Paramtern μ und σ, dann gilt für alle $z \in \mathbb{R}$: $P(X \leq \mu + z \cdot \sigma) = \Phi(z)$." Die zugehörige Tabelle ist sowohl im Lehrbuch als auch in der Formelsammlung vorhanden.

Mit diesen Kenntnissen wurden nun einige Aufgaben dazu gerechnet, z. B.:

Aufgabe 1: Bei einer Bolzenproduktion sei der Bolzendurchmesser annähernd normalverteilt mit den Parametern μ = 3,5 und σ = 0,4 (Angaben in mm). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig herausgegriffener Bolzen höchstens einen Durchmesser von 4,0mm hat?

Aufgabe 2: Bei einer Bolzenproduktion sei der Bolzendurchmesser annähernd normalverteilt mit den Parametern μ = 3,5 und σ = 0,4 (Angaben in mm). Mit welcher Wahrscheinlichkeit a) überschreitet sein Durchmesser den Wert 4,1mm, b) liegt sein Durchmesser zwischen 3,3mm und 3,9mm, c) weicht sein Durchmesser von 3,5mm um höchstens 0,1mm ab?

Bei Aufgabe 2 (wie auch bei allen anderen Aufgaben, die mit Hilfe der Normalverteilung gerechnet wurden), lag es nahe, eine Skizze der Glockenkurve mit den Paramtern μ und σ und der „Grenze" x bzw. den „Grenzen" x_1 und x_2 zu zeichnen, um so ohne gedankenloses Heranziehen einer eingelernten Formel, sondern „mit Hausverstand" an die Problemlösung herangehen zu können. Welcher Wert (Flächeninhalt) von welchem abzuziehen oder dazuzuzählen ist, lässt sich nämlich ohne Schwierigkeiten aus einer schnell angefertigten Skizze der Glockenkurve ablesen. Dies wurde von den Schülerinnen und Schülern durchaus so gesehen.

Weitere Aufgaben waren unter anderem die folgenden aus BÜRGER, FISCHER, MALLE, Mathematik Oberstufe 4:

5.56 Familie Adam erwartet ein Kind und weiß auch schon, dass es ein Mädchen wird. In dem betreffenden Krankenhaus wird angenommen, dass das Gewicht eines neugeborenen Mädchens normalverteilt mit $\mu = 2{,}9$ und $\sigma = 0{,}6$ (Angaben in kg) ist. Ein neugeborenes Mädchen mit höchstens 2,25kg wird als untergewichtig, eines mit mindestens 3,75kg als übergewichtig bezeichnet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Kind der Familie Adam a) normalgewichtig, b) untergewichtig, c) übergewichtig sein wird?

5.58 Der Intelligenzquotient IQ einer Versuchsperson wird mit Hilfe von Intelligenztests bestimmt, die so zusammengestellt sind, dass die Zufallsvariable IQ annähernd normalverteilt mit $\mu = 100$ und $\sigma = 15$ ist. Für wie viel Prozent der Versuchspersonen würde sich mit diesen Tests folgendes Resultat ergeben: a) $IQ \leq 60$ (Schwachsinn), b) $IQ \geq 140$ (Genialität), c) $60 \leq IQ \leq 140$ (Normalität), d) $90 \leq IQ \leq 110$

5.64 Eine Maschine füllt Packungen mit Kaffee ab, wobei die Abfüllmenge annähernd normalverteilt mit $\mu = 1{,}00$ und $\sigma = 0{,}02$ (Angaben in kg) ist. a) Welche Abfüllmenge wird von 90% der Packungen nicht unterschritten? b) Angenommen, die Maschine hat sich im Lauf der Zeit so verstellt, dass der Erwartungswert der Abfüllmenge von $\mu = 1{,}00$ auf $\mu = 1{,}05$ (kg) angewachsen ist, jedoch σ gleich geblieben ist. Welche Abfüllmenge wird jetzt von 90% der Packungen nicht unterschritten? Unterscheidet sich das Ergebnis stark von dem unter a) berechneten Ergebnis?

5.66 Eine Metallhobelmaschine erzeugt Metallplatten, deren Dicke annähernd normalverteilt mit dem Sollwert $\mu = 10$ und der Standardabweichung $\sigma = 0{,}02$ (Angaben in mm) ist. Platten, deren Dicke höchstens 9,95mm oder mindestens 10,05mm beträgt, werden als Ausschuss betrachtet. a) Wie viel Prozent Ausschuss sind zu erwarten? b) Wie viel Prozent der Plattendicken unterschreiten die untere Toleranzgrenze 9,95mm, wie viel Prozent der Plattendicken überschreiten die obere Toleranzgrenze 10,05mm? c) Wie müsste man die Toleranzgrenzen $\mu - c$ und $\mu + c$ wählen, damit 95% der Plattendicken innerhalb dieser Toleranzgrenzen liegen?

5.70 Die Masse von Luftpostbriefen ist erfahrungsgemäß annähernd normalverteilt mit $\mu = 1{,}95$ und $\sigma = 0{,}05$ (Angaben in g). Eine Luftverkehrsgesellschaft nimmt (zum Normaltarif) keine Briefe über 2g an. a) Falls diese Luftverkehrsgesellschaft keine Kontrollen durchführt, wie viel Prozent an Briefen über 2g muss sie dann annähernd in Kauf nehmen? b) Welches maximale Briefgewicht müsste die Luftverkehrsgesellschaft tolerieren, damit dieses nur von 1% aller Briefe überschritten wird?

Bei einigen Aufgaben hat es sich als sinnvoll herausgestellt, die Standardnormalverteilungskurve heranzuziehen, da es leichter ist, die gefragte Grenze zu ermitteln als mit dem Programm der TI-82.

3.3.2.2.3 Testen von Hypothesen

Auch beim den Vorstellungen zum Testen von Hypothesen wurde auf bereits Gelerntes zurückgegriffen: auf das Testen mit Hilfe der Binomialverteilung, welches bereits in der siebenten Klasse erarbeitet worden war. Die folgende Aufgabe stand am Anfang der Überlegungen:

Aufgabe: Ein Geschäftsmann verkauft in seinem geschäft Lose und behauptet, dass nur 40% der Lose Nieten seien. Ein kritischer Kunde vermutet, dass dieses Anteil höher sei. Er erhebt eine Stichprobe vom Umfang 20 und stellt fest, dass von den 20 Losen 13 Nieten sind (das sind 65% der Lose in der Stichprobe). Dies kommt ihm zu hoch vor und er verwirft die Behauptung des Geschäftsmannes. Kann er sicher sein, richtig gehandelt zu haben?

Zunächst wurde hier relativ unisono von Seiten der Schülerinnen und Schüler richtig geantwortet, dass er sich niemals wirklich sicher sein kann, denn Stichproben seien ja immer zufällig ausgewählt und außerdem jeweils Schwankungen unterworfen.

Diese Aufgabe wurde nun mathematisch aufgeschlüsselt: Der Geschäftsmann behauptet, dass ein gewissen relativer Anteil $p = 0{,}4$ seiner Lose aus Nieten bestehe. Ein Kunde vermutet, dass dieses Anteil höher sei. In einer Stichprobe vom Umfang $n = 20$ wird festgestellt, dass von den $n = 20$ Losen $k = 13$ Nieten sind. Da dem Kunden dies zu hoch vorkommt, verwirft er die Behauptung des Geschäftsmannes. Dies würde er naturgemäß auch tun, sollte er in der Stichprobe mehr als $k = 13$ Nieten vorfinden. Ist H die Häufigkeit der Nieten in der Stichprobe, verwirft er die Behauptung des Geschäftsmannes demnach, wenn sich in der Stichprobe $H \geq 13$ ergibt. Hätte der Geschäftsmann nun Recht und der Kunde verwirft aufgrund des Ergebnisses der Stichprobe $H \geq 13$ die Behauptung des Geschäftsmannes, so beginge er einen Irrtum. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist gleich der Wahrscheinlichkeit, mit der das Ereignis $H \geq 13$ eintritt, somit $P(H \geq 13)$. $P(H \geq 13)$ nennt man Irrtumswahrscheinlichkeit des Kunden unter der Voraussetzung, dass der Geschäftsmann Recht hat. Mit Hilfe der Binomialverteilung (Tabelle) erhält man das Ergebnis $P(H \geq 13) \approx 0{,}02$. Somit würde er in zwei von hundert Stichproben einen Irrtum begehen, wenn der Geschäftsmann Recht hätte und der Kunde sehr oft Stichproben vom Umfang 20 erhöbe und dabei bei jedem Stichprobenergebnis $H \geq 13$ die Behauptung des Geschäftsmannes verwärfe.

Den wohl eindrucksvollsten Beleg für die Aussagekraft dieser Tests lieferte die folgende Aufgabe, die an die vorangegangene anknüpft:

Aufgabe: Der Geschäftsmann behauptet nach wie vor, dass nur 40% seiner Lose Nieten seien. Der Kunde erhabt eine Stichprobe vom Umfang 20 uns stellt fest, dass von den 20 Losen k Nieten sind. Berechne die Irrtumswahrscheinlichkeit $P(H \geq k)$ des Kunden unter der Voraussetzung, dass der Geschäftsmann Recht hat, für k = 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14! Stelle die Ergebnisse in einer Tabelle übersichtlich dar und interpretiere sie!

Folgende Tabelle ergibt sich hieraus:

k	8	9	10	11	12	13	14
$P(H \geq k)$	0,58	0,40	0,25	0,13	0,06	0,02	0,01

Für k = 8 lässt sich erkennen: Der Kunde würde in 58 von hundert Stichproben (d. h. in 58% aller Fälle) einen Irrtum begehen, wenn der Geschäftsmann Recht hätte und der Kunde sehr oft Stichproben vom Umfang 20 erhöbe und dabei bei jedem Stichprobenergebnis $H \geq 8$ die Behauptung des Geschäftsmannes verwärfe.

Je größer k ist, desto kleiner ist die Irrtumswahrscheinlichkeit. Die Größe der Irrtumswahrscheinlichkeit kann aber nicht objektiv ermittelt werden. Dies sorgte für Diskussionen bei den Schülerinnen und Schülern ob der Objektivität solcher Untersuchungen. Und genau dies war auch ein Ziel dieser Vorgangsweise im Unterricht: das kritische Auseinandersetzen mit Daten und Ergebnissen. Dass 5% bzw 1% als gängige Vorgaben für Irrtumswahrscheinlichkeiten gelten, war bereits in der siebenten Klasse verwendet worden, konnte aber nun noch einmal reflektiert werden. So wurde der Begriff der maximal zugelassenen Irrtumswahrscheinlichkeit noch nachdrücklicher vermittelt. Eine weitere Aufgabe aus den Unterlagen von Prof. Dr. Malle wurde als Hausübung gegeben:

Aufgabe: Ein Politiker behauptet, dass 45% der Wähler die Partei A wählten. Ein kritischer Journalist vermutet, dass dieser Anteil niedriger sei. In einer Stichprobe vom Umfang 20 findet er fünf Personen vor, die die Partei A wählen wollen (das sind nur 25% der befragten Personen). Kann er die Behauptung des Politikers mit der maximal zugelassenen Irrtumswahrscheinlichkeit 0,05 verwerfen?

Bei der Besprechung dieser Aufgabe stellte sich heraus, dass $P(H \leq 5) \approx 0{,}055$ ist. Hier wurde spekuliert, ob er die Behauptung nicht doch verwerfen könne, da 0,055 doch fast 0,05 ist. Nun wurde klargestellt, dass selbst bei einem ermittelten Ergebnis von $P(H \leq 5) = 0{,}05$ die Behauptung nicht verworfen werden kann, da man sich vorher die Vorgabe gesetzt hat, dass erst bei $P(H \leq k) < 0{,}05$ die Behauptung verworfen werden kann. Wenn man schon eine Grenze (nicht ganz, aber doch relativ willkürlich) bei 5% setzt, dann darf nachher nicht daran gerüttelt werden.

Neu war nun, dass das einseitige Testen von Hypothesen auch mit Hilfe der Normalverteilung durchgeführt werden kann. Hierzu wurde dieselbe Aufgabenstellung (Geschäftsmann, Kunde) gewählt, nur findet man nun in einer Stichprobe vom Umfang 500 genau 220 Nieten. Man hat es also mit großen Stichproben zu tun und die Normalverteilung kann als Näherung herangezogen werden.

Hier ergibt sich $\mu = n \cdot p = 500 \cdot 0{,}4 = 200$ und $\sigma \approx 10{,}95$. Daraus folgt: $P(H \geq 220) \approx 0{,}034 < 0{,}5$. Der Kunde kann die Behauptung des Geschäftsmannes mit der maximalen Irrtumswahrscheinlichkeit 0,05 verwerfen.

Wichtig beim Lösen dieser Aufgaben sind folgende Punkte:

- Aufstellen von Nullhypothese H_0 ($p = p_0$) und Alternativhypothese H_1 ($p > p_0$)

- Festlegen der Signifikanzzahl α_0 (z. B. $\alpha_0 = 0{,}05$)

- Bestimmen des Wertes k der untersuchten Häufigkeit H in einer Stichprobe vom Umfang n, wobei n groß sein sollte.

- Berechnung der Irrtumswahrscheinlichkeit $P(H \geq k)$ und Interpretieren des Ergebnisses

In diesem Zusammenhang wurde auch die Frage diskutiert: „Was bedeutet es, wenn eine Nullhypothese aufgrund eines Stichprobenergebnisses $H = k$ mit der Signifikanz $\alpha_0 = 0{,}05$ verworfen wird?“

Hier wurde von Lehrerseite präzisiert: Falls die Nullhypothese gilt und man sehr oft Stichproben vom Umfang n erhöbe und dabei jedes Mal bei einem Stichprobenergebnis $H \geq k$ die Nullhypothese verwärfe, dann beginge man in höchstens 5% aller Fälle einen Irrtum, man würde die Nullhypothese fälschlicherweise verwerfen.

„Was bedeutet die Nichtverwerfung einer Nullhypothese?“

Hier wurde vermutet, dass man die Nullhypothese akzeptieren könne. Dies kann aber nicht die Folgerung sein: Wenn sich eine Behauptung nicht verwerfen lässt, ist dies kein Grund, diese zu akzeptieren. Die Behauptung könnte durchaus falsch sein und es könnte in einer Stichprobe ein Anteil erzielt werden, der von der Behauptung nicht wesentlich abweicht. In diesem Fall lässt sich also gar nichts aussagen. Der Test war umsonst. Aber das ist auch eine Erkenntnis.

Nun wurde noch das zweiseitige Anteilstesten vorgestellt und folgende Aufgabe zugrunde gelegt:

Aufgabe: Angeblich sind 40% der Mitarbeiter eines großen Betriebs Raucher. Durch eine Stichprobe soll dies überprüft werden. Von den 100 befragten Personen gaben 37 an Raucher zu sein. Hat sich der Prozentsatz der Raucher in dem Betrieb geändert? Teste mit $\alpha_0 = 0{,}05$!

Hier weicht der Vorgang insofern von dem beim einseitigen Testen ab, dass die Alternativhypothese mit H_1 ($p \neq p_0$) angegeben und sowohl $P(H \geq k)$ als auch $P(H \leq k)$ berechnet werden werden muss. Ist eine der beiden Wahrscheinlichkeiten höchstens gleich $\frac{\alpha_0}{2}$, dann darf die Nullhypothese verworfen werden.

Dies stellte die Schülerinnen und Schüler vor kein allzu großes Problem. Nur die Frage, wann man einseitig und wann zweiseitig testen soll, war von allgemeinem Interesse. Hier kam man zu dem Ergebnis, dass die Fragestellung entscheidend ist. Will man überprüfen, ob ein Anteil höher (oder niedriger) ist, als in der Nullhyothese angenommen, so eignet sich ein einseitiger Test. Will man hingegen feststellen, ob eine Änderung (zur Annahme der Nullhaypothese) eingetreten ist, so bietet sich der zweiseitige Anteilstest an, da nicht ausschließlich „nach oben“ oder „nach unten“ getestet wird. Wichtig ist jedoch, dass man vorher beschließt, welchen Test man heranazieht, ein nachträgliches Überspringen von einem einseitigen auf einen zweiseitigen Anteilstest oder umgekehrt ist nicht zulässig, da für Manipulationen Tür und Tor geöffnet würden. Insofern wurde auch die Diskussion zu diesem Thema mit den Schülerinnen und Schülern verstanden.

3.3.2.2.4 Konfidenzintervalle

Mit den Erkenntnissen aus den vergangenen Kapiteln wurde noch der Begriff des Konfidenzintervalls im Zusammenhang mit dem Schätzen von Anteilen vorgestellt. Hier wurde vor allem auf die theoretische Bedeutung bei Wahlprognosen hingewiesen und einige Aufgaben gerechnet.

3.3.3 Die Evaluation

Da es sich bei der untersuchten Klasse um eine Maturaklasse handelte, war natürlich die zeitliche Planung des Projekts und dessen Evaluation nicht ganz so einfach. So wurde der Test zu den Grundvorstellungen, der von Prof. Dr. Malle zusammengestellt worden war, erst kurz vor der schriftlichen Reifeprüfung abgehalten, da der gesamte Oberstufenstoff in Mathematik im zweiten Semester in Form von Wiederholungen bearbeitet werden sollte und somit nur die Zeit zwischen der Notenkonferenz für die achten Klassen und dem Beginn der schriftlichen Reifeprüfung zur Verfügung stand. Einerseits kann dies positiv gesehen werden, da nun nicht mehr die Stochastik als das zuletzt behandelte Gebiet in bester Erinnerung gestanden ist und somit auch nur mehr das Wesentliche vorhanden hätte sein sollen, andererseits ist die Woche vor den schriftlichen Klausuren vom Zeitpunkt her sicherlich nicht optimal für die Durchführung einer Evaluation hinsichtlich eines mathematischen Fachgebiets, da die Prioritäten bei den Schülerinnen und Schülern in dieser Zeit sicherlich woanders gelegen sind als bei der Stochastik.

3.3.3.1 Der Test im Detail

Bei dem Test handelte es sich um vier Kategorien, die in ca. 30 Minuten zu bearbeiten waren. Die Kategorien und die Fragen seien hier angeführt:

Wahrscheinlichkeitsbegriff

1. *Was versteht man unter einer Wahrscheinlichkeit?*
2. *Beschreibe, durch welche Methoden man zu einer Wahrscheinlichkeit kommen kann! Welcher Methode wird der Vorzug gegeben,wenn verschiedene Methoden zu unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten führen? Warum?*
3. *Erläutere, warum eine Wahrscheinlichkeit stets unsicher ist!*
4. *Erläutere an einem Beispiel, warum sich eine Wahrscheinlichkeit ändern kann, wenn sich der Informationsstand ändert!*

Normalverteilung

1. *Eine Normalverteilung lässt sich durch eine Kurve beschreiben. Wie sieht diese Kurve aus und wovon hängt ihre Form ab? Wie kann man Wahrscheinlichkeiten anhand dieser Kurve darstellen?*
2. *Eine Zufallsvariable X sei normalverteilt mit den Parametern μ und σ. Ungefähr wie viel Prozent aller Werte liegen zwischen $\mu - \sigma$ und $\mu + \sigma$?*
3. *Die Körpergröße von Kindern in einer bestimmten Grundgesamtheit sei annähernd normalverteilt mit den Parametern $\mu = 140$ und $\sigma = 10$ (Angaben in cm). Ein Kind wird zufällig ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist seine Körpergröße a) höchstens 120cm, b) mindestens 165cm, c) zwischen 140cm und 150cm?*
4. *Bei einer Serienproduktion werden Metallkugeln für Kugellager erzeugt, deren Durchmesser annähernd normalverteilt mit dem Sollwert $\mu = 3$ und $\sigma = 0{,}01$ ist (Angaben in mm). Welcher Durchmesser wird voraussichtlich von nur 2% der Kugeln überschritten?*

Anteilstests

1. *Erläutere das Vorgehen bei einem a) einseitigen, b) zweiseitigen Anteilstest bei großen Stichproben!*
2. *Der Marktanteil eines bestimmten Kosmetikprodukts wird mit 35% angenommen. Nach einer Werbekampagne werden 500 Personen befragt. Von diesen geben 181 an, das Kosmetikprodukt zu verwenden. Hat der Marktanteil zugenommen? Teste mit 0,05!*
3. *Bei einem einseitigen Anteilstest wird eine Nullhypothese H0 mit der maximalen Irrtumswahrscheinlichkeit 0,05 verworfen. Was bedeutet das? Kreuze an, welche der folgenden Aussagen richtig sind! Wenn keine richtig ist, formuliere selbst eine richtige Aussage! O Die Nullhypothese ist falsch. O Die Nullhypo-*

these ist mit der Wahrscheinlichkeit 0,05 falsch. O Die Nullhypothese ist in mindestens 95% aller Fälle wahr.

4. *Was bedeutet es, wenn die Nullhypothese bei einem einseitigen Anteilstest nicht verworfen werden kann?*

Konfidenzintervalle

1. *Um die Anzahl der Wähler einer Partei A bei der nächsten Wahl zu ermitteln, wird eine Stichprobe vom Umfang 500 erhoben. Für den unbekannten relativen Anteil der Partei-A-Wähler ergibt sich das 95%-Konfidenzintervall [0,32; 0,44]. Was bedeutet das? Kreuze an, welche der folgenden Aussagen richtig sind! Wenn keine richtig ist, formuliere selbst eine richtige Aussage! O Der Prozentsatz der Partei-A-Wähler liegt zwischen 32% und 44%. O Der Prozentsatz der Partei-A-Wähler liegt mit der Wahrscheinlichkeit 0,95 zwischen 32% und 44%.*

3.3.3.2 Der Gesamteindruck

Der Wahrscheinlichkeitsbegriff wurde in Ansätzen verstanden, einige Formulierungen sind fehlerhaft, die meisten Schülerinnen und Schüler konnten die Grundvorstellungen jedoch damit verbinden.

Bei der Normalverteilung lässt sich erkennen, dass die Schülerinnen und Schülern mit der gaußsche Glockenkurve eine Vorstellung verbinden. Auch die Rechenaufgaben wurden größtenteils gut gelöst.

Die Fragen zu den Anteilstests wurden in Ansätzen richtig beantwortet, wenn auch beim Rechnen und beim Ankreuzen Fehler passiert sind. Auch bei Frage 4 gab es interpretatorische Schwierigkeiten bei machen Schülerinnen und Schülern.

Dass der Begriff des Konfidenzintervalls nicht sehr umfassend im Unterricht zur Sprache gekommen ist, spiegelt sich im Ergebnis der Tests wider. Ungefähr die Hälfte der Schülerinnen und Schüler haben diese Frage gar nicht beantwortet, der Rest größtenteils nicht korrekt.

Wichtig ist jedoch die Erkenntnis, dass der Wahrscheinlichkeitsbegriff und die damit verbundenen Grundvorstellungen in hohem Maße bei den Schülerinnen und Schülern vorhanden waren und möglicherweise auch über die Matura hinaus im Gedächtnis bleiben werden.

3.3.3.3 Die detaillierte Testauswertung von Univ. Prof. Dr. Günther Malle

<u>Wahrscheinlichkeitsbegriff</u>

Was versteht man unter einer Wahrscheinlichkeit?

Alle Schüler interpretierten eine Wahrscheinlichkeit als ein Maß für eine Erwartung. Einer gab zusätzlich den relativen Anteil an. Einer schrieb:

- *Die Möglichkeit des Eintretens eines bestimmten Ereignisses; sie ist daher ein Maß für die Erwartung*

Beschreibe, durch welche Methoden man zu einer Wahrscheinlichkeit kommen kann! Welcher Methode wird der Vorzug gegeben,wenn verschiedene Methoden zu unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten führen? Warum?

Neun Schüler gaben den relativen Anteil, die relative Häufigkeit und das subjektive Vertrauen an. Drei beriefen sich vage auf die Binomialverteilung, einer auf die Normalverteilung und einer auf die „Nominalverteilung".

Auf die zweite Frage reagierten nur vier Schüler. Zwei gaben dem relativen Anteil den Vorzug, die beiden anderen Antworten waren ziemlich unsinnig:

- *wenn Aerodynamik beim Fallenlassen einer Stecknadel auch eine Rolle spielt …*
- *Ne Stichprobe machen: Anzahl der gesuchten durch Anzahl der gezogenen …*

Stichhaltige Begründungen wurden keine gegeben.

Erläutere, warum eine Wahrscheinlichkeit stets unsicher ist!

Hier gab es eine Fülle von unterschiedlichen Antworten, davon konnte aber nur eine als richtig gewertet werden. Zwei waren wenigstens teilweise richtig, die übrigen Antworten waren entweder ziemlich nichts sagend, tautologisch oder unsinnig. Beispiele:

- *weil sie wahrscheinlich nicht sicher ist*
- *hängt vom Zufall ab*
- *es ist unmöglich mit 100 % Wahrscheinlichkeit in die Zukunft zu sehen*
- *weil es auf den Versuch ankommt*
- *Wahrscheinlichkeit kann nie mit 100 % Sicherheit angegeben werden*
- *Man hat keine 100 %-ig sichere Antwort*
- *weil sie kein Ergebnis, welches errechnet und bewiesen ist, sondern nur eine Annahme im Vorfeld.*
- *Gausssche Glockenkurve $\rightarrow$ denn durch die Flächeninhalte wird wird die Kurve annäherungsweise genau erreicht denn sie ist bloß ein Maß für eine Erwartung und das endgültige Ergebnis variiert stets bei der Ausführung*

Die teilweise richtigen Antworten waren:

- *Wahrscheinlichkeit hängt vom Informationsstand ab.*
- *weil es keine genauen Messmaschinen gibt; weil es nur eine Vermutung ist, die aber nicht eintreten muss*

Ein Schüler verwies auf den Modellcharakter der Wahrscheinlichkeitsrechnung, was nicht falsch ist, aber im vorliegenden Zusammenhang wohl auch nicht viel aussagt. Ein Schüler gab keine Antwort.

Erläutere an einem Beispiel, warum sich eine Wahrscheinlichkeit ändern kann, wenn sich der Informationsstand ändert!

Fünf Schüler gaben eine richtige Erklärung an. Drei gaben keine Antwort. Die restlichen Antworten waren nichts sagend, unklar oder unsinnig. Beispiele:

- *weil Vorwissen und Nachwissen bei der Interpretation des Ergebnisses mithelfen*
- *Weil man dann mehr weiß. Wahrscheinlichkeit hängt <u>NUR</u> vom Informationsstand ab.*
- *wenn eine Firma Ware produziert und die Fehler an der Ware ändern sich; dh. man kann keine genauen Angaben geben zu welcher Wahrscheinlichkeit die Ware Fehler aufweist.*
- *wenn mehr Fehlerware produziert wird, dann ändert sich σ und somit die Wahrsch. eine*

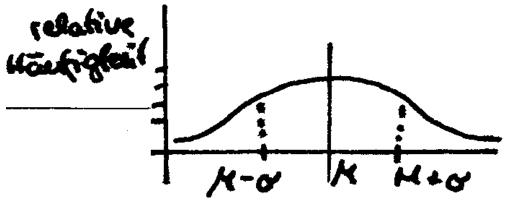
fehlerfreie Ware zu produzieren

Normalverteilung

Eine Normalverteilung lässt sich durch eine Kurve beschreiben. Wie sieht diese Kurve aus und wovon hängt ihre Form ab? Wie kann man Wahrscheinlichkeiten anhand dieser Kurve darstellen?

Alle Schüler zeichneten die Gausssche Glockenkurve richtig. Sechs Schüler zeichneten Flächeninhalte, die Wahrscheinlichkeiten entsprechen, richtig ein, drei erwähnten solche Flächeninhalte nur. Dass die Form der Kurve von μ und σ abhängt, wurde nur von zwei Schülern explizit erwähnt, jedoch zeichneten viele μ und σ ein. Drei Schüler gaben nur die Abhängigkeit von σ an. Sechs Schüler machten zu dieser Abhängigkeit keine Angabe.

Beispiele für falsche Antworten:

- 

- *Gausssche Glockenkurve je Wahrscheinlicher desto höher*
- *Die Form häng von der Standartabweichung ab.*

Eine Zufallsvariable X sei normalverteilt mit den Parametern μ und σ. Ungefähr wie viel Prozent aller Werte liegen zwischen $\mu - \sigma$ und $\mu + \sigma$?

Alle gaben einen ungefähr richtigen Prozentsatz an, der von 66 % bis 70 % schwankte. Die meisten schrieben 68 % bzw. $\frac{2}{3}$.

Die Körpergröße von Kindern in einer bestimmten Grundgesamtheit sei annähernd normalverteilt mit den Paramtern $\mu = 140$ und $\sigma = 10$ (Angaben in cm). Ein Kind wird zufällig ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist seine Körpergröße a) höchstens 120cm, b) mindestens 165cm, c) zwischen 140cm und 150cm?

Die Frage a) haben 10 Schüler im Wesentlichen richtig beantwortet, doch wurde relativ oft schlampig aus der Tabelle abgelesen bzw. falsch gerundet. Die Frage b) haben 5 Schüler, die Frage c) 6 Schüler richtig beantwortet.

Falsche Antworten: a) 2 Schüler, b) 6 Schüler, c) 5 Schüler.

Keine Antwort: a) 0, b) 3, c) 3.

Bei einer Serienproduktion werden Metallkugeln für Kugellager erzeugt, deren Durchmesser annähernd normalverteilt mit dem Sollwert $\mu = 3$ und $\sigma = 0,01$ ist (Angaben in mm). Welcher Durchmesser wird voraussichtlich von nur 2% der Kugeln überschritten?

Die Aufgabe wurde von 10 Schülern richtig gelöst. Nur einer gab eine falsche Antwort an. Drei Schüler gaben keine Antwort.

Anteilstests

Erläutere das Vorgehen bei einem a) einseitigen, b) zweiseitigen Anteilstest bei großen Stichproben!

Bei einseitigen Anteilstests gaben 8 Schüler, bei zweiseitigen Anteilstests 6 Schüler eine im Wesentlichen richtige Antwort. Die Antworten waren zwar nicht immer perfekt, doch ließen erahnen, dass die Schüler den Ablauf eines Tests verstanden haben. Einige Antworten (4 beim einseitigen und 5 beim zweiseitigen Test) waren zu rudimentär, um als richtig gewertet werden zu können. Beispiele:

- *a) Eine Nullhypothese soll entweder nach unten oder nach oben revidiert werden.*

  b) Die Richtigkeit der Nullhypothese soll überprüft werden Irrtumswahrscheinlichkeit wird halbiert ($\frac{\alpha}{2}$)
- *a) es wird behauptet, dass die Nullhypothese zu groß bzw. zu klein sei*

  b) es wird behauptet, dass die Nullhypothese falsch sei

Der Marktanteil eines bestimmten Kosmetikprodukts wird mit 35% angenommen. Nach einer Werbekampagne werden 500 Personen befragt. Von diesen geben 181 an, das Kosmetikprodukt zu verwenden. Hat der Marktanteil zugenommen? Teste mit 0,05!

Vier Schüler haben die Aufgabe richtig gelöst, sechs falsch bzw. unvollständig. Zwei weitere Schüler haben zwar richtig gerechnet, aber das Ergebnis falsch interpretiert. Zwei weitere Schüler haben richtig gerechnet, jedoch keine Antwort gegeben.

Bei einem einseitigen Anteilstest wird eine Nullhypothese H0 mit der maximalen Irrtumswahrscheinlichkeit 0,05 verworfen. Was bedeutet das? Kreuze an, welche der folgenden Aussagen richtig sind! Wenn keine richtig ist, formuliere selbst eine richtige Aussage! O Die Nullhypothese ist falsch. O Die Nullhypothese ist mit der Wahrscheinlichkeit 0,05 falsch. O Die Nullhypothese ist in mindestens 95% aller Fälle wahr.

Drei Schüler haben die erste Antwortmöglichkeit, zwei die zweite angekreuzt. Keiner gab eine frequentistische Deutung an. Drei Schüler gaben Antworten, die zwar richtig, aber nicht passend waren. Fünf Schüler gaben keine Antwort.

Was bedeutet es, wenn die Nullhypothese bei einem einseitigen Anteilstest nicht verworfen werden kann?

Zehn Schüler beantworteten diese Frage im Wesentlichen richtig, wenngleich manchmal nur lapidar. Ein Schüler gab keine Antwort. Beispiele für falsche Antworten:

- *Die Nullhypothese ist in diesem Fall falsch, denn ich irre mich mit weniger als 0,05.*
- *Die Alternativhypothese ist mit der Wahrscheinlichkeit 0,05 falsch.*
- *dass mit einer Irrtumswahrsch. Unter 0,05 die Person, die verwirft recht hat*

Konfidenzintervalle

Um die Anzahl der Wähler einer Partei A bei der nächsten Wahl zu ermitteln, wird eine Stichprobe vom Umfang 500 erhoben. Für den unbekannten relativen Anteil der Partei-A-Wähler ergibt sich das 95%-Konfidenzintervall [0,32; 0,44]. Was bedeutet das? Kreuze an, welche der folgenden Aussagen richtig sind! Wenn keine richtig ist, formuliere selbst eine richtige Aussage! O Der Prozentsatz der Partei-A-Wähler liegt zwischen 32% und 44%. O Der Prozentsatz der Partei-A-Wähler liegt mit der Wahrscheinlichkeit 0,95 zwischen 32% und 44%.

Nur in einer Antwort fand sich eine korrekte Erklärung eines Konfidenzintervalls. Sechs Schüler kreuzten die zweite Antwortmöglichkeit an (die Subjektivisten als richtig ansehen würden). Sechs Schüler gaben keine Antwort. Eine kuriose Antwort:

- *Eine andere Hypothese würde sich zu einem größeren Prozentsatz irren.*

3.3.4 Das Resümee

Die Bedeutung des Themas „Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung" wird meines Erachtens immer noch unterschätzt. Die intensive Beschäftigung mit den Grundbegriffen der Stochastik sind essentiell für viele Lebensbereiche der Schülerinnen und Schüler sowohl in deren momentaner Lebenssituation als auch in deren Zukunft. Um mit Aussagen zu diversen Vorhersagen kritisch umgehen zu können, bedarf es einer adäquaten Begriffsbildung in jenem Themenbereich: Wie werden Heilungschancen eruiert? Warum ist die Gewinnchance bei diesem Spiel so niedrig? Wie werden Wahlprognosen erstellt? Wie läuft Qualitätsprüfung ab? Welche Kriterien sind bei einer Umfrage zu beachten? Ist dieses Spiel für alle Beteiligten fair? Das sind nur einige der Fragen, denen man immer wieder gegenübersteht. Die Grundvorstellungen zur Stochastik geben hier einen Einblick in ein Gebiet, das aus unserem Leben nicht mehr wegzudenken ist. Je mehr man sich damit intensiv beschäftigt, desto größer sind die Chancen, bei diversen Interpretationen von Daten nicht Manipulationen zu erliegen. Daher ist ein Grundwissen in diesem Bereich unentbehrlich.

4 LITERATUR

ACKERL, B., LANG, C. & SCHERZ, H.: Fächerübergreifender Unterricht mit experimentellem Schwerpunkt am Beispiel NWL BG/BRG Leibnitz. MS Pilotprojekt IMST² 2000/01. BG/BRG Leibnitz 2001.

ATKIN, M. & BLACK, P.: Policy Perils of International Comparisons - The TIMSS Case. Phi Delta Kappan, Vol. 79 (1), September 1997, 22-28.

BÜRGER, H./ FISCHER, R./ MALLE, G.: Mathematik Oberstufe 3, hpt 1991

BÜRGER, H./ FISCHER, R./ MALLE, G.: Mathematik Oberstufe 4, hpt ³2000

FULLAN, M.: Change Forces. Probing the Depths of Educational Reform. Falmer Press: London, New York & Philadelphia 1993.

IFF (Hrsg.): Endbericht zum Projekt IMST² – Innovations in Mathematics, Science and Technology Teaching. Pilotjahr 2000/01. Im Auftrag des BMBWK. IFF: Klagenfurt 2001.

MALLE, G.: Methodischer Leitfaden zur Stochastik.

MALLE, G./MALLE, S.: Was soll man sich unter einer Wahrscheinlichkeit vorstellen? In: Mathematik lehren. Heft 118. S. 52-56