



**Fonds für Unterrichts- und Schulentwicklung  
(IMST-Fonds)**

**S7: „Naturwissenschaften und Mathematik in der Volksschule“**

---

**LERNEN IN MATHEMATISCHEN  
LERNUMGEBUNGEN  
IM FOKUS UNTERSCHIEDLICHER  
BEGABUNGEN  
SCHWERPUNKT: GEOMETRIE**

**Dipl. Päd. Monika Klamecker**

**ID 1412**

**VS 22**

**Schukowitzgasse 89**

**1220 Wien**

**Wien, Juni 2009**

# INHALTSVERZEICHNIS

<b>ABSTRACT</b> .....	<b>3</b>
<b>1 EINLEITUNG</b> .....	<b>4</b>
1.1 Persönliche Ausgangslage.....	4
1.2 Ausgangssituation in der Klasse .....	5
<b>2 AUFGABENSTELLUNG</b> .....	<b>6</b>
2.1 Lernumgebungen im Mathematikunterricht.....	6
2.2 Erwartungen.....	8
2.3 Ziele .....	10
2.4 Lehrplanbezug und Bildungsstandards .....	10
<b>3 PROJEKTVERLAUF</b> .....	<b>12</b>
3.1 Elterninformation .....	12
3.2 Arbeiten mit Lernumgebungen: Methodische Aspekte.....	12
3.3 Übersicht der einzelnen Lernumgebungen .....	13
3.3.1 Arbeiten mit Geometriedreieck und Zirkel .....	13
3.3.2 Arbeiten mit Geraden .....	14
3.3.3 Arbeiten mit Würfeln: Der Klebepunktwürfel .....	15
3.3.4 Drehen von Figuren .....	19
3.3.5 Verschieben von Figuren .....	20
3.3.6 Spiegeln von Figuren .....	21
3.3.7 Kongruente Figuren .....	22
3.3.8 Flächengleiche Figuren.....	23
3.3.9 Umfänge von Quadratmehrlingen .....	25
3.3.10 Umfang und Flächeninhalt: Der Gemüsegarten.....	26
3.3.11 Weitere Geometriespiele.....	31
<b>4 INTERPRETATION DER ERGEBNISSE</b> .....	<b>32</b>
4.1 Perspektiven der Evaluation .....	32
4.2 Evaluation der Beobachtungen .....	33
4.3 Zusammenfassung der Evaluationsergebnisse .....	37
4.4. Beobachtungen und Kommentare .....	40
4.5. Selbstkonzept der Kinder und Gender Sensitivity .....	44
<b>5 PERSPEKTIVEN FÜR DIE ZUKÜNFTIGE UNTERRICHTSARBEIT</b> .....	<b>46</b>
<b>6 LITERATUR</b> .....	<b>47</b>

# ABSTRACT

*Dieses Projekt thematisiert Lernumgebungen für Geometrie, welche in einer dritten Schulstufe im Laufe eines Jahres durchgeführt wurden.*

*Die Arbeit mit Lernumgebungen bietet die Möglichkeit einer natürlichen Differenzierung. Die Kinder finden eigene Zugänge, Lösungsansätze, Vorgehensweisen und Darstellungsformen.*

*Dies ermöglicht die mathematische Arbeit sowohl auf elementaren als auch auf kognitiv anspruchsvollen Ebenen. Kommunikation und Kooperation finden statt. So werden Lösungsansätze reflektiert und Erkenntnisse vertieft.*

*Lernumgebungen begeistern Kinder und erfüllen die aktuellen Entwicklungsansprüche an innovativen Unterricht.*

Schulstufe: 3.

Fächer: Mathematik

Kontaktperson: Dipl. Päd. Monika Klamecker

Kontaktadresse: VS 22; Schukowitzgasse 89, 1220 Wien

# 1 EINLEITUNG

## 1.1 Persönliche Ausgangslage

Warum habe ich mich zu diesem Projekt entschlossen?

Mein Weg zu IMST besteht im Groben aus zwei Schritten: Einem besonders langen, weiten Schritt, und einem auffallend kurzen. Beide waren ganz wesentlich und wohl auch im Ausmaß genau passend.

Der lange Schritt begann damit, dass ich in den letzten Jahren sehr viele Fortbildungen in verschiedensten Bereichen besuchte.

Einerseits machte ich eine längere Ausbildung zur Förderlehrerin, bei der ich wichtige neue Erkenntnisse in Bezug auf Rechenschwächen gewann. Hier erkannte ich zum ersten Mal, wie wichtig Sprache in Bezug auf Mathematik ist. Man muss sich von den Kindern erklären lassen, WIE sie etwas rechnen, um ihre Gedankengänge nachvollziehen zu können. Diese kurzen Gespräche ergaben bald eine sehr einfache und zielführende Möglichkeit, Kinder individuell zu fördern.

Andererseits besuchte ich aber auch Fortbildungen, in denen gezeigt wurde, dass Mathematik mehr als nur \*Rechnen\* ist. Genau dieser Aspekt hat mich von Beginn an fasziniert. Gerade in einer Zeit, in der wir in allen Bereichen unseres Lebens dazu neigen, vieles von Computern übernehmen zu lassen, konzentriert sich in vielen Schulklassen der Mathematikunterricht noch immer hauptsächlich auf den Bereich des mechanisierenden Rechnens. Das einzige, das uns absolut zuverlässig und schnell von der Technik abgenommen werden kann, ist oft ausschließlicher Inhalt von Unterricht und Schularbeiten.

Als ich darauf aufmerksam wurde, war der Schritt von der RECHENSTUNDE zur MATHEMATIKSTUNDE der einzige Weg, Mathematikunterricht so zu halten, dass er sowohl für die Kinder als auch für mich selbst immer wieder faszinierend und interessant ist. So änderte sich mein Unterricht im Laufe der Jahre immer konsequenter in diese Richtung.

Diese Art Mathematik zu unterrichten versuche ich auch im Rahmen meiner Arbeit als Ausbildungslehrerin und Schulpraxisbetreuerin an der KPH –Wien/ Krems an die Studierenden weiterzugeben.

Als dann in unserer Schule eine SCHILF-Veranstaltung zum Thema Bildungsstandards im Mathematikunterricht stattfand, sprach mich die Vortragende Fr. Mag. Maria Fast, Leiterin des Kompetenzzentrums Mathematik an der KPH –Wien/ Krems, darauf an, dass Sie von Kolleg/inn/en schon öfter von mir gehört hätte. Wir trafen uns dann zu einem längeren Gespräch. Im Zuge dieses Gespräches bestärkte sie mich sehr in meiner Arbeit, und ich erkannte, dass meine Arbeitsweise genau den Anforderungen der Bildungsstandards entspricht.

Nachdem ich sehr selten Kolleg/inn/en gefunden habe, mit denen ich mich über standardorientierten Unterricht austauschen konnte, konnte ich meine eigene Arbeit

oft nicht einordnen oder positionieren. Das Gespräch und die Vernetzung mit anderen Kolleg/inn/en, die Unterricht ähnlich sehen, war für mich absolut neu und eine große Bereicherung. In dieser Zeit hörte ich auch das erste Mal von IMST und ich war sofort von der Intention dahinter fasziniert.

Nun kommt der kurze aber sehr, sehr entscheidende Schritt: Innerhalb von knapp zwei Wochen hörte ich das erste Mal von IMST, überlegte, ob mein Unterricht in ein Projekt passen könnte und schrieb meinen Projektantrag. Dabei konnte ich schon zu Beginn feststellen, wie viel Unterstützung und Bestärkung ich von allen Personen, die mit IMST zu tun haben, bekam.

Als der Antrag dann angenommen wurde, empfand ich das vor allem als große Wertschätzung meiner Arbeit und als spannende Herausforderung mich noch intensiver mit Unterricht und Evaluation von Unterricht zu beschäftigen. Es hat sich für mich die Sichtweise von Unterricht insofern geändert, als ich Inhalte nun noch genauer betrachte, sie stärker hinterfrage und weiterentwickle.

Diese intensive Auseinandersetzung mit Mathematik versuche ich auch bei Lehrer/innen/fortbildungsveranstaltungen an andere Kolleg/inn/en weiterzugeben.

## **1.2 Ausgangssituation in der Klasse**

Im Schuljahr 2008/2009 unterrichtete ich eine 3.Klasse. Sie setzt sich aus 11 Buben und 12 Mädchen zusammen. Es gibt nur ein Kind mit Migrationshintergrund, das allerdings keine sprachlichen Defizite hat.

Vom sozialen Aspekt her stellte diese Klasse von Beginn weg sehr hohe Anforderungen, sowohl an meine didaktische Arbeit, als auch daran, eine Klassengemeinschaft aufzubauen. Nachdem ich in der ersten Klasse leider keine Teamlehrerin hatte, suchte ich nach Möglichkeiten, mit der Heterogenität der Kinder alleine umzugehen. Um ihnen die Inhalte optimal vermitteln zu können, arbeitete ich vor allem in der ersten Klasse intensiv daran, die sozialen Kompetenzen der Kinder aufzubauen.

Auch in dieser Hinsicht war die Arbeit mit Lernumgebungen seit der 1.Klasse sinnvoll und hilfreich. Bei der Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten wurde immer wieder auch die kommunikative und kooperative Ebene trainiert. Die Kinder lernten, sich Partner für die verschiedenen Arbeiten zu suchen und mit ihnen zusammen Lösungen zu finden. Konflikte entstanden immer wieder, aber bei der Bewältigung erwarben die Kinder viele soziale Kompetenzen.

Der Einsatz von Lernumgebungen zur Schulung der allgemeinen und inhaltlichen Kompetenzbereiche war den Kindern also von der ersten Klasse an vertraut. So konnte ich auf vielfältige Erfahrungen aufbauen.

Die Auswahl der Themen meines IMST-Projekts erfolgte aufgrund der Tatsache, dass der Geometrieunterricht in der Volksschule sehr oft vernachlässigt wird, aber für die Kinder einen hohen Anreiz bietet. Meiner Erfahrung nach, sprechen geometrische Inhalte sowohl Mädchen als auch Buben an. Auch die Arbeit mit Zeichenutensilien wie Geodreieck und Zirkel macht den Kindern viel Spaß.

## 2 AUFGABENSTELLUNG

### 2.1 Lernumgebungen im Mathematikunterricht

Im Laufe meiner Arbeit bei IMST hörte ich bei Gesprächen immer wieder die Frage:

Was sind LERNUMGEBUNGEN?

Der Begriff Lernumgebung bezieht sich für mein Verständnis NICHT auf eine vorbereitete Umgebung im räumlichen Sinn, wie etwa eine Mathematikecke in der Klasse oder ein Regal mit Materialien. Diese Arbeit bietet vielmehr die Möglichkeit, eine mathematische Aufgabe aus mehreren Blickwinkeln zu sehen und Aufgabenstellungen und Lösungen zu finden, die von der Routine abweichen und in die Tiefe der Materie gehen können. Jede/r soll Teil des Lösungsprozesses sein können.

Lernumgebungen erlauben vielseitige Bearbeitungsmöglichkeiten für verschiedene Fähigkeitsniveaus zu grundlegenden Themen des Mathematikunterrichts. So ergibt sich auf natürliche – nicht künstlich herbeigeführte - Weise eine Differenzierung und Individualisierung.

Dieser Aspekt der natürlichen Differenzierung ist für mich im Hinblick auf Individualisierung ein ganz wesentlicher Aspekt meiner Arbeit. Nicht ICH unterscheide und kategorisiere die verschiedenen Lernschritte, sondern die Differenzierung erfolgt aus der unterschiedlichen Sichtweise der Kinder, den unterschiedlichen mathematischen Fähigkeiten oder der Motivation. Jedes Kind geht im Rahmen seiner Möglichkeiten anders an ein Thema heran, löst es anders und kommt zu mehr oder weniger tiefen Erkenntnissen. Auch die Erklärungen und Darstellungen der Ergebnisse sind individuell verschieden.

Lernumgebungen sind als Planungs- und Organisationsprinzip zu verstehen und nicht primär als greifbare und sichtbare Sache.

Im Zuge meiner Arbeit am Projekt stieß ich auf das neue Buch von Beat WÄLTI und Ueli HIRT<sup>2</sup>. Hier fand ich theoretische Hintergründe und Definitionen. Der Begriff Lernumgebung findet sich erstmals bei FRIEDRICH und MANDL 1997<sup>1</sup> und ist seither in der fachdidaktischen Diskussion präsent.

Für WÄLTI/ HIRT<sup>2</sup> sind Lernumgebungen

- natürliche Erweiterungen von substanziellen Aufgaben.
- flexible, große Aufgaben.

Sie haben einen Leitgedanken, aber in der Regel mehrere Teilaufgaben und Arbeitsaufträge.

---

<sup>1</sup> FRIEDRICH Helmut F., MANDL Heinz (1997) Analyse und Förderung selbstgesteuerten Lernens. In F.E. Weinert und H. Mandel (Hrsg.): Psychologie der Erwachsenenbildung, Enzyklopädie der Psychologie, Pädagogische Psychologie, S.237-293. Hofgrefe, Göttingen.

<sup>2</sup> WÄLTI Beat, HIRT Ueli (2008) Lernumgebungen im Mathematikunterricht - Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte; Klett Verlag

Somit sind sie eine Erweiterung des Begriffs AUFGABE. Sie beschreiben eine Unterrichtssituation mit Zielen, Inhalten und Vorgangsweisen der Lehrperson bzw. der Schüler/innen.

Laut WITTMANN<sup>3</sup> müssen substantielle Lernumgebungen folgenden Kriterien entsprechen:

- Sie müssen zentrale Ziele, Inhalte und Prinzipien des Mathematikunterrichts präsentieren.
- Sie müssen reiche Möglichkeiten für mathematische Aktivitäten von Schülerinnen und Schülern bieten.
- Sie müssen flexibel sein und sich an die Gegebenheiten einer Klasse anpassen lassen.
- Sie müssen mathematische, psychologische und pädagogische Aspekte des Lehrens und Lernens in einer ganzheitlichen Weise integrieren.
- Sie bieten so ein weites Feld für empirische Forschungen.

Dieser Mathematikunterricht ist auf einen Kompetenzerwerb und auf mathematische Tätigkeiten ausgerichtet.

Lernumgebungen sollten nach WÄELTI/ HIRT<sup>2</sup> folgende Ansprüche aufweisen:

- Mathematische Substanz mit sichtbar werdenden Strukturen und Mustern
- Hohes kognitives Aktivierungspotential
- Initiierung von Eigentätigkeit aller Lernenden
- Förderung individueller Denk- und Lernwege sowie eigener Darstellungsformen → Hier findet die Verknüpfung zur natürlichen Differenzierung statt
- Einerseits Zugänglichkeit für alle, aber andererseits auch Herausforderung für schnell Lernende mit anspruchsvollen Aufgaben
- Ermöglichen des sozialen Austauschs und des Kommunizieren über Mathematik

Dieser Austausch und das Sprechen über Mathematik ist für mich einer der wesentlichsten Aspekte überhaupt, weil er mir erlaubt, Einblick in die Gedankengänge und Lösungsansätze der Kinder zu nehmen. Außerdem werden dabei allgemeine mathematische Kompetenzen geschult, die zu einer Vertiefung der Inhalte führen. Ergebnisse werden nicht oberflächlich produziert und genannt, sondern hinterfragt, genauer betrachtet und dargestellt.

Praktisch gesehen sind für mich vor allem Aufgabestellungen interessant, bei denen der Arbeitsauftrag für alle Kinder gleich ist, aber jedes Kind entsprechend seines mathematischen Entwicklungsstandes unterschiedlich an die Aufgabe herangeht. Dazu gibt es komplexe Aufgabenstellungen, an denen über eine Woche gearbeitet werden kann, aber auch Aufgaben für eine einzelne Stunde oder kurze Übungen.

---

<sup>3</sup> WITTMANN, E.Ch. (1998): Design und Erforschung von Lernumgebungen als Kern der Mathematikstruktur. In : Beiträge zur Lehrerbildung 16 (3) , S.329-42

Ein einfaches Beispiel dazu wäre:

„Wie viele Streichhölzer brauchst du, um das Vierereineinmaleins mit Quadraten darzustellen?“ Je nach Abstraktionsfähigkeit werden die Lösungen auf unterschiedlichen Wegen gefunden:

- Legen
- Zeichnen
- Abstrakte Lösung : Rechnen

## 2.2 Erwartungen

Ich versuchte, konkrete Erwartungen zu formulieren, die auch im Hinblick auf eine Evaluierung brauchbar sind. Im ersten Ansatz waren das folgende:

- ⇒ Welche Auswirkungen hat die Arbeit mit Lernumgebungen auf den Lernzuwachs der Kinder?
- ⇒ Gibt es Unterschiede beim Lernzuwachs im Hinblick auf Geschlecht oder Begabung?

Um diese Fragen zu evaluieren, wäre entweder eine Vergleichsgruppe mit gleichen Ausgangsvoraussetzungen nötig, oder aber eine genaue Lernstandserhebung, bevor die Kinder mit Lernumgebungen konfrontiert worden sind.

Sich mit einer Klasse in der eigenen Schule in Bezug auf die Leistung zu vergleichen war für mich keine passende Option. Abgesehen davon wäre eine genaue Profilerhebung davor nötig gewesen, um feststellen zu können, ob die Grundvoraussetzungen vergleichbar sind.

Nachdem ich mit den Kindern bereits seit der 1. Schulstufe mit Lernumgebungen arbeite, ist am Anfang der 3. Schulstufe die Ausgangssituation nicht bei Null anzusetzen. Daher war auch die Evaluation in Hinblick auf den Lernzuwachs für mich nicht sehr sinnvoll.

Der nächste Aspekt :

- ⇒ Sind Lernumgebungen im Hinblick auf die Bildungsstandards ein probates Mittel, die allgemeinen und inhaltlichen Kompetenzen zu schulen?

erschien mir machbarer und auch sehr interessant.

Wobei wir hier auch, im Hinblick auf die Nachhaltigkeit von Unterricht, die Frage stellen können:

- ⇒ Lassen sich die im Umgang mit Lernumgebungen erworbenen Kompetenzen auch auf andere Lernbereiche übertragen?



Wenn sich diese Frage nämlich als zutreffend herausstellt, dann wäre die Nachhaltigkeit gewährleistet, da durch die Übertragung eine allgemeine Kompetenzerweiterung gegeben wäre. Je öfter und vielseitiger eine Fertigkeit oder Kompetenz angewendet werden kann, umso nachhaltiger wirkt sie.

Die Perspektiven, die diese Art von Unterricht bieten, gehen weit über den Mathematikunterricht hinaus und sind so besonders nachhaltig. Lernumgebungen wären somit definitiv eine sehr effiziente Möglichkeit, den aktuellen Entwicklungsansprüchen an Unterricht generell zu entsprechen.

So sehen WÄLTI/ HIRT<sup>2</sup> den Begriff Lernumgebung auf dem Weg zu einem bildungspolitischen Terminus mit folgenden Ansprüchen:

Mathematikunterricht intern:

- *neue Impulse geben, Geometrie in der Grundschule als integralen Teil der Mathematik zu betrachten*

Fachdidaktik:

- *Fachdidaktik als Entwicklungsforschung herausfordern*
- *Fachdidaktik in der Forschung zur Diagnostik stärken und Konzepte diagnostischer Kompetenz für Lehrer/innen entwickeln*

Unterrichtskultur:

- *eigenverantwortliches und selbst organisiertes Lernen der der Lernenden im Mathematikunterricht stärken.*
- *Lernen mit fachbezogener Korrespondenz unterstützen*

Schulstruktur:

- *Fachdidaktik in die Unterrichtsentwicklung einbeziehen*

Neben diesen Erwartungen, die sich vorwiegend auf den Unterricht beziehen, ist für mich allerdings ein weiterer Aspekt sehr wesentlich:

⇒ Wie wirken sich Lernumgebungen auf das Selbstkonzept der Kinder aus?

Wenn Kinder eigenverantwortlich und selbst organisiert lernen, geben wir ihnen die Gelegenheit, im Unterricht immer wieder ihre Grenzen zu erforschen und zu erweitern. Sie erproben Strategien und erfahren, dass Fehler auch Freunde sein können, die sie ihrem Ziel näher bringen.

Nach meinen Erfahrungen können Kinder mit Fehlern besser umgehen, wenn es sich um anspruchsvolle und komplexe Aufgaben handelt. Hier akzeptieren sie eine Arbeit, die, manchmal durch strukturiertes Handeln, oft aber auch durch Versuch und Irrtum, zum Ziel kommt. Bei einfachen Arbeiten fällt es Ihnen deutlich schwerer, Fehler zu akzeptieren. Auch für mich als Lehrerin ist es dann öfter so, dass der Gedanke: „Das sollte aber doch schon fehlerfrei gekonnt werden“, durchkommt.

Wenn Kinder sich aber in Bereiche begeben, in denen sie das Gefühl haben, etwas *\*Großes\** zu leisten, sind sie motivierter und erweitern so ihre Kompetenzen nachhaltig. Das stärkt ihr Selbstkonzept und überträgt sich so auf die Art, wie sie im Allgemeinen mit großen Anforderungen umgehen.

## 2.3 Ziele

Als konkrete Ziele arbeitete ich folgende aus:

Im Rahmen des vorliegenden Projektes soll untersucht werden, ob und inwieweit das Arbeiten mit mathematischen Lernumgebungen

- eine natürliche Differenzierung ermöglicht
- Kindern hilft, ihre Problemlösekompetenz zu erweitern
- übertragbare Kompetenzen fördert
- das Selbstkonzept stärkt

Gleichzeitig soll auch der Genderaspekt berücksichtigt werden: Es soll beobachtet werden, ob die Arbeit mit Lernumgebungen Buben und Mädchen gleichermaßen fördert.

## 2.4 Lehrplanbezug und Bildungsstandards

Der österreichische Mathematiklehrplan für die Volksschule gibt folgende Bildungs- und Lehraufgaben vor:

- „Der Mathematikunterricht soll dem Schüler Möglichkeiten geben,*  
*-schöpferisch tätig zu sein;*  
*-rationale Denkprozesse anzubahnen;*  
*-die praktische Nutzbarkeit der Mathematik zu erfahren;*  
*-grundlegende mathematische Techniken zu erwerben.*

*Schöpferische Fähigkeiten sind durch spielerisches, forschend - entdeckendes und konstruktives Tun aufzubauen. Rationale Denkprozesse sind an geistigen Grundtätigkeiten wie Vergleichen, Ordnen, Zuordnen, Klassifizieren, Abstrahieren, Verallgemeinern, Konkretisieren sowie Analogisieren zu schulen. **Besonderes Gewicht ist auf die Entwicklung des logischen Denkens und des Problemlöseverhaltens zu legen.** Sachverhalte der Umwelt sind mit Hilfe von Zahlen, Größen und Operationen zu durchdringen, räumliche Vorstellungen sind aufzubauen. Die Vielfalt der angebotenen kindgemäßen mathematischen Situationen aus den Bereichen Wirtschaft, Technik und Kultur soll der Schülerin bzw. dem Schüler die Bedeutung der Mathematik bewusst machen. Neben dem Erwerb der grundlegenden mathematischen Techniken sind praktische mathematische Fertigkeiten wie Umgehen mit Zeichengeräten und Messgeräten anzustreben.*

*Der Unterrichtsgegenstand Mathematik gliedert sich in folgende Teilbereiche:*

- *Aufbau der natürlichen Zahlen*
- *Rechenoperationen*
- *Größen*
- *Geometrie*
- *Bruchzahlen (4.Schulstufe)“*

Diese Aufgliederung in Teilbereiche verdeutlicht Sachstrukturen und stoffliche Linienführungen des Lehrplanes. Das soll aber keinesfalls zu einer isolierten Behandlung der einzelnen Teilbereiche führen, sondern deren sinnvolle Vernetzung ist möglichst durchgehend anzustreben.

## **Bildungsstandards**

Während die im Lehrplan angeführten Inhalte als Unterrichtsinput zu sehen sind, geben die Bildungsstandards die Kompetenzen an, die die Kinder nachhaltig erwerben sollen, das Outcoming.

Unter mathematischen Kompetenzen werden in diesem Zusammenhang kognitive Fähigkeiten, kognitive Fertigkeiten und die Bereitschaft, sich mit mathematischen Inhalten auseinander zu setzen, verstanden.

Mathematische Kompetenzen beinhalten zwei Komponenten:

1. Allgemeine mathematische Kompetenzen
2. Inhaltliche mathematische Kompetenzen

Diese beiden Kompetenzbereiche sind untrennbar miteinander verknüpft, weil für die Lösung einer mathematischen Aufgabenstellung beide Komponenten benötigt werden.

### 1. Allgemeine mathematische Kompetenzen

- Modellieren
- Operieren
- Kommunizieren
- Problemlösen

### 2. Inhaltliche mathematische Kompetenzen

- Arbeiten mit Zahlen
- Arbeiten mit Ebene und Raum
- Arbeiten mit Operationen
- Arbeiten mit Größen

Im Rahmen meiner Tätigkeiten in der Lehrerfortbildung und als Mitarbeiterin des Kompetenzzentrums Mathematik an der KPH Wien-Krems, treffe ich immer wieder auf Kolleg/inn/en, die den Bildungsstandards skeptisch oder auch ablehnend gegenüberstehen.

Hier versuche ich Informationsarbeit zu leisten, dass die Standards eigentlich nur die Ansprüche an zeitgemäßen Unterricht formulieren. Diese Ansprüche erlauben aber eine Umsetzung, die jede Lehrperson, ihren eigenen Vorstellungen von Unterricht entsprechend, gestalten kann.

Meiner Ansicht nach liegt es nicht an einer bestimmten Unterrichtsform, ob Unterricht standardorientiert ist, sondern an der Bereitschaft Inhalte, Haltungen und Zielsetzungen vielschichtiger zu sehen und zu vermitteln. Für meine Arbeit habe ich in den Lernumgebungen ein sehr gut geeignetes Mittel für die Umsetzung gefunden.

## **3 PROJEKTVERLAUF**

### **3.1 Elterninformation**

Wie in vielen Wiener Volksschulen üblich, übte ich in der ersten Klasse die Buchstaben an Buchstabentagen. An diesen Tagen kamen interessierte Eltern in den Unterricht und erlebten, wie ihre Kinder Inhalte übten und vertieften. Nach der ersten Klasse behielt ich diese Möglichkeit, Eltern in die Unterrichtsarbeit in Form von Programmtagen mit einzubinden, bei. Hier wurden allerdings alle Bereiche des Unterrichts angeboten, so auch Mathematik.

Sehr oft waren es natürlich anspruchsvolle mathematische Aufgaben, die ich in diesem Rahmen anbot. So hatten interessierte Eltern immer wieder Einblick in unsere mathematische Arbeit. Viele Eltern sind davon beeindruckt, mit welcher Selbstverständlichkeit und Sicherheit ihre Kinder an komplexe Aufgaben herangehen. Oft fällt es den Kindern sogar leichter als den Eltern, Zugänge zu finden.

Sehr oft finden am Rande dieser Unterrichtseinheiten auch Gespräche über die Unterrichtsarbeit und die Fortschritte der Kinder statt. Hier erhalte ich immer wieder positives Feedback zu meiner Arbeit. Mittlerweile lassen sich positive Entwicklungen der Kinder feststellen, die ich auf die Arbeit mit Lernumgebungen zurückführe.

Als ich beschloss dieses Projekt durchzuführen, setzte ich neben dem verpflichtenden Klassenforum am Anfang des Schuljahres zusätzlich einen pädagogischen Elternabend an, bei dem ich den Eltern ankündigte, Ihnen genauere Informationen über die Arbeit der 3. Klasse im Allgemeinen, und die Arbeit am Projekt im Besonderen zu geben. Dieser Elternabend wurde sehr gut angenommen, fast alle Eltern waren anwesend.

Für mich war es wichtig den Eltern einerseits die Inhalte des Projektes vorzustellen, aber andererseits auch sicherzustellen, dass die Eltern alle Fragen und Anliegen diesbezüglich im Vorfeld stellen können. Ich wollte ihnen vor allem vermitteln, dass dieses Projekt nicht dazu führen wird, dass andere Inhalte zu kurz kommen, oder die Kinder überfordert werden.

Es fanden sehr konstruktive Gespräche statt, und die Eltern standen dem Projekt von Beginn an sehr positiv gegenüber. Für die Veröffentlichung der Fotos im Projektbericht, auf Plakaten und Flyern holte ich das Einverständnis der Eltern in einem Elternbrief ein.

### **3.2 Arbeiten mit Lernumgebungen: Methodische Aspekte**

Passend zu den Inhalten des jeweiligen Themas, bot ich Lernumgebungen an, die es den Kindern ermöglichten, das Thema immer wieder von verschiedenen Seiten her zu entdecken und zu bearbeiten. Vielschichtigkeit der Arbeit, unterschiedliche Sozialformen und Materialien, prägten diese Phasen. Dann ergaben sich zwei bis drei Wochen Pause.

Diese Pause nutzte ich einerseits für eine unmittelbar stattfindende Evaluation und andererseits zur Vorbereitung der nächsten Einheit, basierend auf den Ergebnissen der vorigen Lernumgebungen. Diese Pause sollte auch dazu beitragen, dass die Kinder nicht durch ein ständig vorhandenes Geometrieangebot übersättigt werden.

Wesentlich war für mich bei allen Arbeiten, dass die Kinder ihre Tätigkeiten und Überlegungen reflektierten, sich darüber austauschten, sie darstellten und begründen können. Hier lag auch eine Problematik der Sache: der Zeitfaktor!

Bei vielen Arbeiten brauchten die Kinder einfach Zeit, um in das Thema zu kommen, sich dann darin zu vertiefen und dann manchmal blitzartig, oft aber auch langsam, zu neuen Erkenntnissen zu kommen. Den Kindern diese Zeit zu geben, war im Schulablauf oft nicht so einfach, da ja auch viele andere Inhalte vermittelt werden mussten.

In vielen Fällen hielten die Kinder ihre Überlegungen und Vorgangsweisen schriftlich fest. Diese Dokumente erleichterten mir die Evaluation, da ich auf eine Sammlung von Arbeiten jedes Kindes jederzeit zurückgreifen konnte. Hinzu kommen noch Beobachtungsprotokolle, die bei manchen Arbeiten angefertigt wurden. Dabei handelte es sich um einfache Notizen, die eine Beobachtungsperson anfertigte, während das Kind arbeitete. Vergleicht man diese beiden Schriftstücke, ergeben sich weitere interessante Erkenntnisse.

In den folgenden Kapiteln habe ich stellvertretend einige Lernumgebungen beschrieben. Vieles floss aber immer wieder in Arbeiten ein, auch bei anderen Themen. Sehr oft überschneiden sich Inhalte oder es mischen sich Inhalte und Materialien. Ich habe die Themen jeweils in dem Kapitel beschrieben, dessen Inhalt es zum überwiegenden Teil zuzuordnen ist, oder der mir am wichtigsten erschien. Die Reihenfolge ist aufgrund der thematischen Bündelung nicht immer entsprechend des Einsatzes im Schuljahr.

### **3.3 Übersicht der einzelnen Lernumgebungen**

#### **3.3.1 Arbeiten mit Geometriedreieck und Zirkel**

Das Geometriedreieck und vor allem der Zirkel waren in diesem Schuljahr die Stars der Kinder. Die Zeichengeräte wurden immer wieder gerne verwendet, ob im Unterricht oder in den Pausen.

Ich führte von Beginn an das sehr genaue Zeichnen mit diesen Geräten ein, legte Wert auf Sauberkeit und Genauigkeit bei der Ausführung der Zeichnungen. Es gab Arbeitsblätter um den Umgang mit den Geräten zu trainieren (siehe Anhang), aber auch bei allen anderen Inhalten, bei denen gezeichnet wurde, achtete ich besonders darauf, dass die Zeichnungen exakt gemacht wurden.

So konnten die Kinder bei den verschiedenen Aufgaben im Laufe des Jahres die Zeichengeräte sehr sicher und selbstverständlich nutzen.

Die Kinder verwendeten eine korrekte Fachsprache und drückten sich genau aus. Begriffe wie Radius, Durchmesser, Mittelpunkt, Kreislinie sind den Kindern geläufig. Aber auch die Begriffe Winkel und parallele Linien wurden bei unterschiedlichsten Arbeiten genutzt.

In den folgenden Kapiteln fließt diese Arbeit immer wieder mit ein und legt den Grundstock für geometrisches Arbeiten auf Papier.

### **3.3.2 Arbeiten mit Geraden**

**Inhalte :**

- **Hantieren mit Zeichengeräten**
- **Begriffe: Gerade, Schnittpunkt und Fläche**
- **Parallele Geraden**
- **Kreative Gestaltung von Rechtecken durch das Einzeichnen von verschiedenen Geraden**
- **Zusammenhänge zwischen der Anzahl der Schnittpunkte und der Anzahl der Teilflächen erkennen**
- **Erkenntnisse verbalisieren**

**Erste Einheit:**

Zuerst wurden die Begriffe Gerade und Schnittpunkt erarbeitet und einige Geraden mit mehr oder weniger vielen Schnittpunkten gezeichnet. Die Schnittpunkte wurden markiert.

Die Kinder gestalteten ein Blatt nach eigenen Vorstellungen und verglichen die Ergebnisse. Sie konnten erkennen, dass je öfter sich die Geraden schneiden, desto mehr Teilflächen entstehen. Die Kinder versuchten nun anhand eines von mir vorbereiteten Arbeitsblattes Strukturen zu erkennen und diese zu beschreiben. Dies gelang den meisten Kindern sehr gut. Einige ließen sich besonders auf die farbliche Ausgestaltung ein und arbeiteten sehr kreativ. Auch hier war die Präsentation der Ergebnisse für die Kinder sehr wichtig und spannend.

**Weiterführende Einheiten:**

- **Gestaltung von themenzentrierten Flächenstücken: z.B. Zoogehege, Garagenplätze, Stoffmuster,....**
- **Beachten von praktischen Kriterien: Wege am Parkplatz, wie viele Tierarten können untergebracht werden,.....**
- **Graphische Ausgestaltung der Arbeiten**
- **Ausarbeitung als Collage oder Malarbeit**
- **Bildbetrachtung : Piet Mondrian**

### 3.3.3 Arbeiten mit Würfeln: Der Klebepunktwürfel

Inhalte :

- **Fördern des räumlichen Vorstellungsvermögen**
- **Einsicht in Strukturen des Würfels**
- **Fachsprache Geometrie**
- **Erste Berührungen mit Volumeninhalten**
- **Arbeit mit Tabellen**
- **Zweidimensionale Darstellung von Würfel**

Die Anregung zu dieser Lernumgebung entnahm ich der Zeitschrift Grundschule Mathematik<sup>4</sup>. Diese Lernumgebung war fächerübergreifend, wir arbeiteten sowohl in Mathematik als auch im Werkunterricht an diesem Thema.

#### Erste Einheit:

Es begann damit, dass wir grundlegende Eigenschaften des Würfels anhand eines kleinen Holzwürfels wiederholten: Die Kinder sammelten und erklärten Begriffe wie Ecke, Kante und Fläche.

Danach überlegten wir, aus wie vielen kleinen Würfeln ein nächst größerer Würfel mit Seitenlänge zwei bestehen muss.

Die Kinder kamen zur Lösung: aus acht Würfeln. Dieser Würfel bekam die Bezeichnung Zweierwürfel. Analog dazu setzten die Kinder auch Dreier- und Viererwürfel aus kleinen Holzwürfeln zusammen.

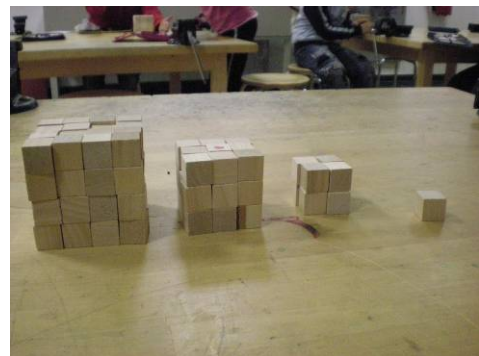


Abb. 1



Abb. 2

Im nächsten Schritt stellte ich den Kindern die folgende Aufgabe:

„Wie viele Klebepunkte brauche ich, wenn ich beim Zweierwürfel jede sichtbare Einzelwürfel­fläche mit einem Punkt versehen möchte?“

Die Kinder lösten die Aufgabe gemeinsam, es war durch die überschaubare Anzahl der Flächen nicht sehr schwierig.

---

<sup>4</sup> HÄRING Gudrun, Der Klebepunkt-Würfel – ein Verwandlungswunder. In: Grundschule Mathematik. Heft 18/2008, S. 22-25

Nachdem wir uns im Werkraum befanden und auf großen quadratischen Tischen arbeiteten, forderte ich nun die Kinder auf, unter dem Tisch einzuschauen. Ich wollte die Klebepunkte, die sie gerade auf dem Zweierwürfel befestigt hatten, schneller entfernen, als sie diese angebracht hatten.

Die Kinder waren gespannt und warteten bis ich fertig war. In Wirklichkeit drehte ich die Würfel so, dass die Punkte im Inneren des Zweierwürfels \*verschwanden\*.

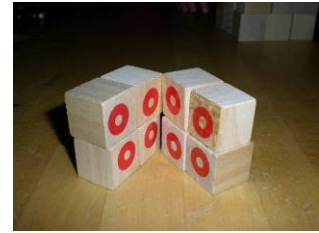


Abb. 3

Die Kinder zögerten kurz, kamen aber nach einigen Vermutungen auf die richtige Lösung. Somit wurde einsichtig, dass die Klebepunkte nicht auf allen Würfel­flächen klebten.

Im Folgenden stellte ich den Kindern in Gruppen die Aufgabe, nun einen Dreierwürfel zu bauen und alle Außenflächen zu bekleben. Danach sollten sie berechnen, nicht abzählen, wie viele Punkte nötig sind. Die Kinder sollten zu Lösungen kommen und diese begründen. Dazu bekamen sie ausreichend Würfel zum Bauen und Klebepunkte.

Hier konnte man bereits verschiedene Lösungsansätze sehen, je nach räumlichem Vorstellungsvermögen erfolgte die Arbeitsweise unterschiedlich.

Die Kinder hielten ihre Berechnungen schriftlich fest und erklärten mir ihre Vorgehensweise. Hier gab es in fast jeder Gruppe andere Lösungswege.



Abb. 4

Die Kinderarbeiten zu dieser Aufgabestellung befinden sich im Anhang, ebenso eine Powerpoint-Präsentation, anhand derer man den Ablauf gut nachvollziehen kann.

## Zweite Einheit:

Die nächste Einheit hatte zum Inhalt, dass die Kinder die Würfel wieder zusammenbauten, je nach eigener Wahl größere oder kleinere, und die Anzahl der Würfel und der Klebepunkte in Tabellen festhielten. Die Kinder arbeiteten nach Belieben alleine oder zu zweit.

Hier mussten sie neue Begriffe definieren und anwenden: Kantenwürfel, Eckwürfel und Seitenwürfel. Ich konnte feststellen, dass das Verwenden der richtigen Begriffe nötig war, um Lösungen zu formulieren, vor allem aber die Erweiterung und Abstrahierung gelang deutlich besser bei der Anwendung dieser Fachausdrücke.

Dazu erarbeiteten wir einen \*Wortspeicher\*. Alle für die Arbeit wesentlichen Fachausdrücke wurden auf einem Plakat festgehalten, und die Kinder konnten immer wieder nachschauen, wenn sie einen Ausdruck nicht mehr wussten.



	Zweierwürfel	Dreierwürfel	Viererwürfel
Anzahl der benötigten kleinen Würfel insgesamt	8	27	64
Anzahl der Würfel ohne Klebepunkt	0	1	8
Anzahl der Würfel mit einem Klebepunkt	0	6	24
Anzahl der Würfel mit zwei Klebepunkten	0	12	24
Anzahl der Würfel mit drei Klebepunkten	8	8	8
Anzahl der benötigten Klebepunkte insgesamt	24	54	64

2. Füll dir etwas auf, wenn du deine Ergebnisse betrachtest? Schreibe deine Beobachtungen auf.  
*Der zweierwürfel fol hat nur Eckwürfel.*

Abb. 5



Abb. 6

Durch das Eintragen in Tabellen wurden Regelmäßigkeiten sichtbar, die die Kinder dann in kleinen Gruppen besprachen und weiter erforschten. Den Kindern fiel zum Beispiel Folgendes auf:

Die Anzahl der Würfel mit zwei Klebepunkten (= Kantenwürfel) sieht in der Tabelle so aus: 0 – 12 – 24 → Überlegung: 12 → 24. Verdoppeln sich die zwölf Punkte oder kommen immer zwölf dazu? Die Überprüfung erfolgte durch den Fünferwürfel → Es kommen pro Ebene zwölf weitere Punkte dazu.

Wichtige Einsichten in Strukturen konnten gewonnen und auch auf Würfel mit größeren Seitenlängen übertragen werden. Die Kinder erkannten Gesetzmäßigkeiten und lösten so Fragen zu größeren Würfeln wie etwa zum Siebener- oder zum Zehnerwürfel abstrakt durch Übertragung der Strukturen.

**Der rundum gefärbte Würfel aus Würfeln 3**

1. Trage in die Tabelle ein.

	Zweierwürfel	Dreierwürfel	Viererwürfel	Fünferwürfel	Sechserwürfel	Siebenerwürfel
Anzahl der benötigten kleinen Würfel insgesamt	8	27	64	125	216	343
Anzahl der Würfel ohne Klebepunkt	0	1	8	27	64	125
Anzahl der Würfel mit einem Klebepunkt	$0 \cdot 6 = 0$	$6 = 6 \cdot 1 \cdot 1$	$24 = 6 \cdot 2 \cdot 2$	$36 = 6 \cdot 3 \cdot 3$	$48 = 6 \cdot 4 \cdot 4$	$60 = 6 \cdot 5 \cdot 5$
Anzahl der Würfel mit zwei Klebepunkten	0	12	24	36	48	60
Anzahl der Würfel mit drei Klebepunkten	8	8	8	8	8	8
Anzahl der benötigten Klebepunkte insgesamt	24	54	64	125	216	343

© 200 Christoph Ahlfuhr Vanni

Abb. 7

Einige Erkenntnisse, die die Kinder aus dieser Tabelle (siehe Abb.7) gewannen :

- Anzahl der Würfel mit drei Punkten (Eckwürfel): Egal wie groß der Würfel ist, es gibt immer acht Eckwürfel
- Anzahl der Würfel ohne Punkt (= Versteckte Würfel): Zweierwürfel:  $0 \times 0 \times 0 = 0$ , Dreierwürfel:  $1 \times 1 \times 1 = 1$ , Viererwürfel  $2 \times 2 \times 2 = 8$ , Fünferwürfel:  $3 \times 3 \times 3 = 27$ , Sechserwürfel:  $4 \times 4 \times 4 = 64$ , ...

- Anzahl der Würfel mit einem Punkt (= Flächenwürfel): Zweierwürfel:  $0 \times 0 \times 6 = 0$ , Dreierwürfel:  $1 \times 1 \times 6 = 6$ , Viererwürfel:  $2 \times 2 \times 6 = 24$ , Fünferwürfel:  $3 \times 3 \times 6 = 54$ , ...
- Anzahl der Würfel mit zwei Punkten (= Kantenwürfel): Anzahl der Kantenwürfel entlang einer Kante mal 12.
- Gesamtzahl der Punkte auf einem Würfel: Zweierwürfel:  $2 \times 2 \times 6 = 24$ , Dreierwürfel:  $3 \times 3 \times 6 = 54$ , Viererwürfel:  $4 \times 4 \times 6 = 96$ , ...

### Dritte Einheit:

In der dritten Einheit ging es um Flächengestaltung und regelmäßige Muster. Die Kinder legten vorgegebene Muster nach oder entwarfen selbst Muster, um sie danach mit den Würfeln nachzubauen.

Hier zeigten sich die unterschiedlichsten Arbeitsweisen und Schwierigkeitsgrade. Gemeinsam war ihnen allerdings, dass die Kinder im Sinne einer natürlichen Differenzierung selbst Aufgaben wählten oder neue erfanden. In dieser Phase brauchten sie kaum Impulse, alle Kinder vertieften sich in Einzel-, Paar- oder Gruppenarbeit in die Arbeit. Sie entwickelten eigene Strategien, Darstellungen und Hilfestellungen (siehe Abb. 8).

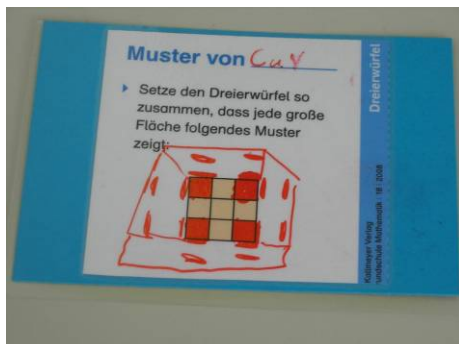


Abb. 8



Abb. 9

Zwei Mädchen wollten einen Spielwürfel nachbauen. Dazu machten sie von jeder Seite des Würfels einen Plan, setzten die sechs Quadrate zusammen und nahmen dieses Modell als Vorlage, um den Klebepunktpunktwürfel richtig zusammenzubauen (siehe Abb. 10 und 11).



Abb. 10

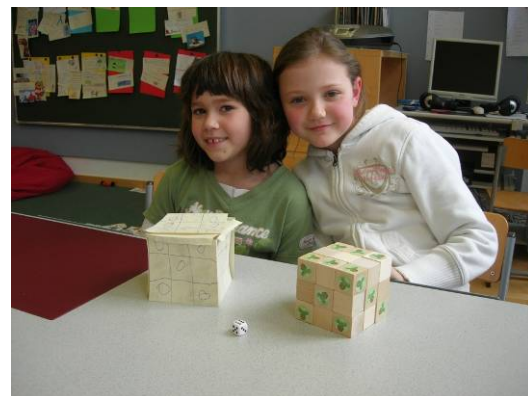


Abb. 11

### **Weitere Einheiten:**

Im Folgenden arbeiteten die Kinder noch ca. zwei Wochen in freien Lernphasen immer wieder mit Klebepunktwürfeln. Es entstanden eigene Aufgabestellungen, neue, größere Würfel wurden gestaltet und die Kreativität der Kinder zeigte sich (siehe Abb.12).

Außerdem kommunizierten die Kinder immer wieder über ihre entstandenen Arbeiten und tauschten Erfahrungen aus. Dies gab immer wieder Anstöße für neue Entwicklungen.



Abb. 12

### **3.3.4 Drehen von Figuren**

Bei dieser Lernumgebung verwendete ich eine Datensammlung von Niekao. Die Firma Niekao ist eine Gemeinschaft von Lehrer/inne/n, die Sammlungen guter Arbeitsmaterialien im Internet anbieten. Die Materialien werden in elektronischer Form verkauft, müssen nur mehr ausgedruckt und foliert werden. Im Bereich Geometrie fand ich die Symmetriewerkstatt, Drehen von Figuren und die Verschiebewerkstatt sehr gut gelungen.

#### **Inhalte:**

- **Drehpunkte erkennen, kennzeichnen und im Alltag suchen**
- **Drehungen an der Uhr**
- **Vierteldrehung, halbe Drehung, Dreivierteldrehung von Gegenständen, Buchstaben, Uhrzeigern,.....**
- **Bastelarbeiten zum Thema Drehung**
- **Drehsymmetrie**
- **Verschiedene Spiele zum Thema Drehung**

Diese Lernumgebung gestaltete ich als Werkstattunterricht, die Kinder arbeiteten individuell an den verschiedenen Themen.

In freien Lernphasen oder in eigens dafür verwendeten Einheiten hatten die Kinder die Gelegenheit sich in das Thema zu vertiefen. Sie arbeiteten wie gewohnt in verschiedenen Sozialformen und erarbeiteten auch viele Bezüge zu ihrem realen Umfeld. Auch hier gestalteten sie wieder eigene Aufgaben und Arbeiten und präsentierten sie.

Im Anhang habe ich Teile der pdf-Version dieser Werkstatt beigefügt. (In den Originalversionen findet man die Dateien immer als pdf – UND als Worddatei. Dies ist sehr praktisch, da man so die Materialien den eigenen Vorstellungen entsprechend anpassen kann.)

Besonders das Thema Drehsymmetrie fanden viele Kinder sehr spannend. Drehpunkte in der Klasse zu finden und drehsymmetrische Figuren in der Umgebung zu suchen, reizte die Kinder immer wieder zur Auseinandersetzung mit diesen Inhalten. Hier kam auch der graphische Aspekt sehr zur Geltung. Mit Zirkel und Geodreieck gestalteten die Kinder eigene Mandalas und fanden in ihnen die Gesetzmäßigkeiten der Symmetrie wieder.

### 3.3.5 Verschieben von Figuren

Auch hier arbeitete ich unter anderem mit einem Werkstattprogramm von Niekao. Diese Materialien sind sehr gut einsetzbar, und ich erweiterte sie mit verschiedenen anderen Arbeitsmitteln und Inhalten.

#### Inhalte:

- **Ornamente**
- **Bandmuster**
- **Verschieben nach Vorschrift**
- **Verschieberegeln an verschobenen Figuren erkennen**
- **Spiele mit den Verschieberegeln**

*„Ein schönes Musikstück, ein gelungenes Bauwerk oder auch ein Gedicht stecken voller Strukturen, die Gegenstand überraschender Entdeckungen sein können. Muster gefallen uns; sie befriedigen unser Bedürfnis nach Ästhetik. Muster faszinieren bereits kleine Kinder, wenn sie der Erzählung eines längst bekannten Bilderbuchs auch nach unzähligen Wiederholungen mit ungebrochener Aufmerksamkeit folgen: Sie sind Experten in den Mustern der Geschichte, genießen das Vorhersehbare, wachen über die richtige Wiedergabe und entdecken immer wieder neue Aspekte.*

*Die Faszination von Muster erfasst jeden lernbereiten und neugierigen Geist. Dies umso mehr, als dass Denken eine strukturierende, ordnende Tätigkeit ist. Wer sich Strukturen zu Eigen macht, kann sie auch in neuem Kontext nutzen und bei Bedarf anpassen. Sie werden so zum eigentlichen Nährboden für Schlüsselqualifikationen wie Kreativität, Problemlösekompetenz oder Kommunikationsfähigkeit. Ihnen kommt in der heutigen Informationsgesellschaft besondere Bedeutung zu.“*

Diese Aussage von Beat WÄLTI und Ueli HIRT<sup>5</sup> gefällt mir besonders und spiegelt mein Bild der Mathematik. Sie erklärt so anschaulich, warum Mathematik auch als Wissenschaft der Muster bezeichnet wird. Wo zu Regeln und Gesetzmäßigkeiten eigene Zugänge gefunden werden, werden sie zu Mustern und Strukturen. Die Suche danach führt jedes Kind auf andere Wege, aber die Suche danach ist allen Kindern, unabhängig von mathematischem Niveau oder Alter, gemeinsam.

So soll der Mathematikunterricht Raum für dieses individuelle Suchen und Entdecken geben und offen sein für verschiedene Zugänge und Wege. Hier bieten Lernumgebungen eine einzigartige Möglichkeit dazu. Mit dieser besonderen Sichtweise von

---

<sup>5</sup> HENGARTNER, HIRT, WÄLTI (2006) Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte, Klett und Balmer Verlag, Zug.

Mustern, Gesetzmäßigkeiten und Strukturen, bekommt dieser Bereich der Geometrie eine tiefere Bedeutung.

Kinder lieben Muster. Mit Patternblocks, Winkelplättchen und anderen Legematerialien, aber auch Dingen aus der Natur, wie Steinen, Federn, Holzstücken und Blättern, legten sie Ornamente und Bandmuster der verschiedensten Arten. Hier waren der Kreativität, aber auch den mathematischen Ansprüchen kaum Grenzen gesetzt. Die Gestaltung von Mustern baute ich auch in einem Indianerprojekt ein. Hier war ein enger Zusammenhang mit dem Werkunterricht und der Bildnerischen Erziehung gegeben.

Ein weiterer Aspekt beim Verschieben von Figuren war das Anwenden und „Ablesen“ von Verschieberegeln: Figuren wurden nach Anleitungen verschoben und immer wieder neu auf kariertem Papier eingezeichnet. Oder es wurde eine Figur auf einen Raster gesetzt und immer wieder nach bestimmten Regeln verschoben. In Partnerarbeit gestalteten wir so ein Spiel, bei dem jenes Kind verlor, das durch das Einhalten der Regel als erstes aus dem Raster fiel. Auch hier gestalteten die Kinder eigene Spielpläne, Verschieberegeln und Figuren und passten so das Spiel ihren eigenen Bedürfnissen an.

Bandmuster wurden auch als Kunstbetrachtung angeboten und im Alltag gesucht. Nach diesen „Vorbildern“ wurden eigene Entwürfe gefertigt und gezeichnet oder gebaut. Auch die Arbeit mit Mosaiken passte hier ins Thema.

### **3.3.6 Spiegeln von Figuren**

**Inhalte:**

- **Symmetrieachsen erkennen, kennzeichnen und im Alltag suchen**
- **Achsensymmetrische Figuren legen bzw. auf dem Geobrett spannen**

Zu diesem Thema arbeiteten wir mit verschiedenen Spiegeln, mit Pentominos, dem Geobrett sowie mit Fotografien und Mustern. Die Kinder lernten Symmetrieachsen zu finden, sie zu nutzen und achsensymmetrische Muster und Figuren zu gestalten.

Gerade die Arbeit mit symmetrischen Mustern regte zu besonderer Kreativität und individuellem Arbeiten an. Es konnten Strukturen erkannt werden, und diese auch auf das Umfeld übertragen werden.

Mit den Pentominos symmetrische Figuren zu legen, fiel den Kindern nicht schwer, außerdem suchten sie in Figuren aus mehreren Pentominos nach Symmetrieachsen. Auch am Geometriebrett arbeiteten die Kinder oft in Partnerarbeit. Sie spannten sich gegenseitig Figuren und spiegelten diese dann an verschiedenen Achsen. Erste Ansätze zur Einsicht in das Koordinatensystem wurden gemacht.

Die Lernumgebungen dazu waren meist eher kürzere Impulse oder einzelne Stationen, die immer wieder aufbauend angeboten wurden. Die Kinder bauten viele Aufgaben aber auch weiter aus, vor allem die Arbeit mit den Zeichenutensilien war sehr beliebt.

### 3.3.7 Kongruente Figuren

#### Inhalte:

- **Kongruente Figuren aus Pentominos legen**
- **Kongruente Figuren aus weiteren Materialien wie Winkelplättchen oder Patternblocks legen**

#### Erste Einheit:

Zum Thema kongruente Figuren setzten die Kinder zunächst verschiedene Formen aus Pentominos zusammen und verglichen sie. Schnell erkannten sie, dass alle Figuren aus der gleichen Anzahl von Pentominos zwar die gleiche Anzahl an Einzelquadraten besitzen, aber völlig unterschiedlich aussehen können.

Im Folgenden sollten sie dann Figuren legen, die nicht nur flächengleich, sondern auch kongruent sind. Viele Kinder fanden es herausfordernd, möglichst viele Möglichkeiten deckungsgleicher Figuren zu zeichnen oder zu legen. Sie differenzierten selbst die Schwierigkeit durch die Anzahl der Pentominos. Diese Arbeit erfolgte sowohl als Einzelarbeit als auch mit Partnern.

#### Zweite Einheit:

Danach begannen die Kinder damit, dass sie vorgegebene Flächenstücke mit verschiedenem Legematerial „abdecken“ mussten. Dies kann man sowohl mit Pentominos, mit Winkelplättchen, Patternblocks oder den konstruktiven Dreiecken sehr gut machen. Der Ausdruck \*abdecken\* führte sehr schön zum Begriff \*deckungsgleich\*.

Es bereitete den Kindern viel Vergnügen, die verschiedensten deckungsgleichen Figuren zu legen und abzuzeichnen. Später entwarfen sie selbstständig eigene Figuren, zu denen sie wieder deckungsgleiche Figuren suchten.

Auch hier war es besonders spannend, wie viele verschiedene Möglichkeiten zu finden sind. Die verschiedenen Materialien ließen einen großen Differenzierungsspielraum offen. Die Kinder fanden einfache bis komplizierte Lösungen und konnten alle den Auftrag gut ausführen.

#### Weitere Einheiten:

In den nächsten Einheiten verwendeten die Kinder ausschließlich Pentominos, um kongruente Figuren darzustellen. Die Arbeitsaufträge und Vorlagen entnahm ich dem Pentominobuch<sup>6</sup>, viele Übungen mit Pentominos fanden wir aber auch in unserem Mathematikschulbuch Alles klar! 3.<sup>7</sup> Die Aufgaben bereiteten den Kindern immer wieder viel Freude und forderten sie heraus. Ich stellte aus den Arbeitsaufträgen und Abbildungen des Pentominobuches auch oft eigene Arbeitsblätter her, um die Aufgaben meiner Klasse anzupassen.

---

<sup>6</sup> KOTH, Maria & GROSSER, Notburga (2007): Das Pentomino-Buch Denkspielspaß für Kinder von 9 bis 99. Aulis Verlag Deubler.

<sup>7</sup> GROSSER, Notburga & KOTH, Maria (2007): Alles klar! 3. Mathematik für wissbegierige Schulkinder. Veritas Verlag.

### Aufgabenstellungen:

- Zwei kongruente Figuren aus jeweils drei Pentominos
- Drei kongruente Figuren aus je drei Pentominos
- Zwei Paare kongruenter Figuren aus je drei Pentominos
- Zwei kongruente Figuren aus je vier Pentominos
- Mehrere Lösungen kongruenter Figuren aus je vier Pentominos
- Arbeiten mit kongruenten Rechtecken

## 3.3.8 Flächengleiche Figuren

### Inhalte:

- Flächengleiche Figuren erkennen
- Flächeninhalte vergleichen
- Einführung des Begriffs Einheitsquadrat

### Erste Einheit:

Hier wollte ich die Kinder erfahren lassen, was Flächengleichheit bedeutet. Es war nicht Inhalt der Lernumgebung, Flächeninhalte zu berechnen oder mit der Maßeinheit  $m^2$  zu arbeiten. Ziel war es, die Kinder die Maßeinheit Einheitsquadrat kennen lernen zu lassen, dass man damit Flächen vergleichen und deren Größe benennen kann.

Ich bereitete vier Rechteckpaare vor, die auf den ersten Blick nicht als größer oder kleiner zu erkennen waren. Jede Gruppe bekam ein rotes und ein grünes Rechteck, beide waren foliert. Der Arbeitsauftrag lautete: „Welche Gruppe hat die beiden Rechtecke, die gleich groß sind?“



Abb. 13



Abb. 14

Die Kinder fingen an zu beratschlagen wie man die Aufgabe lösen könnte, verschiedene Ansätze wurden diskutiert.

Überlegungen bei der Arbeit waren, ob der durchsichtige Rand der folierten Flächen auch zur Fläche zählt, einige Kinder versuchten über den Rand zu einer Lösung zu kommen. Langsam erkannten einige Kinder, dass es sinnvoll ist, sich ein Papiermodell auszuschneiden, mit dem man arbeiten und es zerschneiden kann. Die Kinder legten die ausgeschnittene Papierkopie von Rechteck 1 auf das folierte Rechteck 2. Überstehendes wurde abgeschnitten, wieder aufgelegt, abgeschnitten, usw. Bald erkannte eine Gruppe, dass sie die beiden gleich großen Rechtecke hatte (Abb. 15).



Abb. 15

Nun ging die Arbeit der anderen Kinder in die zweite Phase. Meine Frage lautete nun: „Um wie viel ist Rechteck 1 nun wirklich größer als Rechteck 2?“

Hier waren die Kinder sehr gefordert, sie kannten ja noch kein probates Mittel zur Argumentation. Für diesen Fall, der ja vorhersehbar war, hatte ich für jede Gruppe ein Kuvert vorbereitet. Auf dem Kuvert stand \*Tipp 1\*, darin befand sich ein passendes Einheitsquadrat. Die Kinder versuchten nun herauszufinden, inwiefern dieses Quadrat hilfreich sein könnte.

Es wurden Vermutungen angestellt und nach einiger Zeit kamen alle Gruppen auf die Idee, durch Auslegen auf eine vergleichbare Anzahl an Quadraten zu kommen. Als weiteren Tipp, hätte das Einheitsquadrat nicht genügt, hatte ich eine Folie mit aufgedrucktem Raster vorbereitet. Hier hätten die Kinder durch Übereinanderlegen der Folie auf die Rechtecke, die einzelnen Einheitsquadrate sichtbar machen können.

Nun kam es zur Präsentation der Ergebnisse (siehe Abb.16). Die Gruppen kamen heraus, zeigten ihre Quadrate und erklärten ob ihre Rechtecke flächengleich sind oder nicht. Bei ungleichen Rechtecken erklärten sie, welches Rechteck um wie viele Einheitsquadrate größer ist.



Die Erkenntnis, dass man Einheitsquadrate dazu nutzt, um Flächeninhalte zu vergleichen, konnte den Kindern nachhaltig vermittelt und in vielen weiteren Aufgaben angewendet werden.



Abb. 16

### **Zweite Einheit :**

Als nächsten Schritt sollten die Kinder auf einem Arbeitsblatt ihr Wissen anwenden (siehe Anhang).

Auf diesem Arbeitsblatt waren verschiedene Figurenpaare abgebildet. Die Kinder sollten das Paar mit dem gleichem Flächeninhalt suchen und die Flächeninhalte der übrigen Figurenpaare vergleichen. Die Lösung konnte auf verschiedenen mathematischen Levels gefunden werden:

- Einige Kinder zeichneten alle Einheitsquadrate am ganzen Arbeitsblatt ein.
- Andere begannen damit, lösten sich aber schnell von dieser Hilfe und zeichneten nur mehr einzelne Quadrate zur Orientierung.
- Manche Kinder ersetzten die Quadrate durch Punkte, die sie an deren Stelle setzten und so die Anzahl auszählten.
- Ein paar Kinder zeichneten, wie später in der Flächenberechnung, eine Reihe ein und multiplizierten die Zahl der Quadrate dieser Reihe dann mit der Anzahl der möglichen Reihen.

Ganz wichtig ist hier wieder, dass die Kinder anderen erklärten, wie sie vorgegangen waren. So eröffneten sich für Kinder, die Lösungswege auf niedrigerem mathematischem Niveau angewandt hatten, neue Zugänge.

Oft fanden die Kinder auch neue Aufgaben, die sie einander stellten. Hier wurde neues Wissen umgesetzt und trainiert. Zudem kommunizierten die Kinder über die Lösungen.

### **3.3.9 Umfänge von Quadratmehrlingen**

Hier haben die Kinder versucht, aus mehreren Pentominos Quadratmehrlinge mit möglichst großem / kleinem Umfang zusammenzusetzen.

Sie legten einige Figuren und erkannten rasch, dass die einzelnen Pentominos eine möglichst kurze gemeinsame Seitenlänge haben müssen, um einen besonders großen Umfang zu bekommen. Umgekehrt war der Umfang umso kleiner, je länger die gemeinsame Seitenlänge war.

Die Kinder verglichen ihre Ergebnisse und konnten so immer näher zum größten/ kleinsten Ergebnis kommen. Weiters erkannten sie, dass es mehrere Möglichkeiten gab, Figuren mit dem größten/ kleinsten Umfang zu finden.

Im Pentominobuch findet man viele weitere, anspruchsvolle Aufgabestellungen, die zu einer systematischen Erforschung hinführen.



Abb. 17

#### **Erweiterungsmöglichkeiten:**

- **Pentominos umzäunen ein Flächenstück**
- **Größtmögliche umschließende Rechtecke von Quadratmehrungen aus Pentominos**
- **Teilflächen entstehen lassen und deren Umfänge berechnen**

### **3.3.10 Umfang und Flächeninhalt: Der Gemüsegarten**

#### **Inhalte:**

- **Umfänge von unregelmäßigen Figuren berechnen**
- **Flächenstücke aufteilen**
- **Flächen mit Einheitsquadraten ausmessen und vergleichen**
- **Gärten gestalten**
- **Berechnen von Zäunen, Pflanzen, .....**
- **Zeichnen der Gärten**
- **Bildnerisches Ausgestalten der Arbeiten**
- **Präsentieren von Ergebnissen**

Diese Lernumgebung entstand spontan während der Blockpraxiswoche einer meiner Studentinnen, Fr. Katharina Paril.

Die Studierende brachte für eine Stunde ein Plakat mit einem Garten, der in unterschiedliche Beete aufgeteilt war, mit. Dieses Plakat brachte mich auf die Idee zur folgenden Lernumgebung, die ich gemeinsam mit der Studentin entwickelte, die sie

ausarbeitete und unterrichtete. Fr. Paril konnte sich sehr schnell auf die Arbeit mit Lernumgebungen einstellen und entwickelte ein gutes Gespür dafür, welche Hinweise und Impulse die Kinder bei der Arbeit brauchen.

### Erste Einheit:

Fr. Paril erzählte den Kindern, dass sie beim Vorbeifahren an Gemüsefeldern beobachtet hatte, wie ein Feld auf mehrere kleinere Parzellen aufgeteilt wurde.

Sie bot den Kindern ein Plakat an, auf dem sie schon eine Parzelle rot umgrenzt hatte. Hier hinein schrieb sie: Kathi 1.

Nun sollten die Kinder, abwechselnd mit ihr, Parzellen in beliebiger Form eingrenzen. Auch Wege und ein Teich entstanden im Laufe der Arbeit (siehe Abb.18).

Als nächstes sollten die Kinder zuerst schätzen, dann ausrechnen, wer nun mehr Platz für sein Gemüse bekommen hat, Kathi oder die Kinder der Klasse.

Dazu begann Fr. Paril, nach der Schätzung, an der Tafel zu rechnen, so dass die Kinder, die nicht gleich wussten wie sie beginnen können, eine Stütze hatten (siehe Abb. 19).



Abb. 18

K1: 12 Einheitsquadrate
K2: 6 EQ
K3: 9 EQ
K4:
K5:

Abb. 19

Die Kinder rechneten auf einem Blatt Papier aus, wie viel Platz sie abgesteckt hatten. Dann wurden die beiden Ergebnisse verglichen. Die Kinder hatten die größere Fläche abgesteckt.

Nun erfolgte die Berechnung, wer mehr Zaun braucht, um die Beete einzufassen. Hier war es sehr schwierig, da ja die Grundstücke oft aneinander grenzten. Wir einigten uns darauf, dass jeweils der Zaun, der in der eigenen Farbe eingezeichnet war, zählt. Wieder wurde in der gleichen Vorgehensweise gearbeitet. Auch hier hatten die Kinder das größere Maß.

Im Folgenden haben die Kinder in Partnerarbeit weitere Grundstücke gezeichnet und aufgeteilt. Hier ergab sich eine natürliche Differenzierung, da die Grundstücksgrößen, die Grundstücksformen und weitere Einzelheiten individuell gewählt wurden. Zur Berechnung des Umfangs war es außerdem von Bedeutung, wie groß die Einheitsquadrate waren. Maße von einem Meter waren natürlich leichter zu berechnen als größere Längen, oder Längen mit Kommastellen.

Auch als Hausübung bekamen die Kinder einen ähnlichen Auftrag. So konnten auch die Eltern Anteil nehmen, wie in der Schule gearbeitet wurde.

### Weitere Einheiten:

Je nach möglichem Zeitaufwand, ergeben sich hier eine Vielzahl an Möglichkeiten, ganz im Sinne der Lernumgebungen.

- **Konstruieren im richtigen Maßstab**
- **Gestalten eines eigenen Gartens mit unterschiedlichen Bereichen**
- **Übertragen auf andere Flächenstücke aus dem Alltagsbereich der Kinder (Zoo, Spielplatz, Parkplatz, .....**)
- **Bildnerisches Ausgestalten von gezeichneten Flächen, im Sinne einer Mustergestaltung**
- **Pflanzen einsetzen und berechnen, wie viele Platz haben**
- **Kosten der Pflanzen berechnen**
- **Terrassen mit Sitzgelegenheiten ausstatten und den Preis berechnen**
- **Pflastersteine auf den Wegen berechnen**
- **Flächen gestalten, die auch mit halben Einheitsquadraten gestaltet sind (eventuell mit Einheitsdreiecken)**
- ...

Im Rahmen des Projektes arbeiteten die Kinder in der nächsten Woche immer wieder an einem eigenen Grundstück weiter. Die Kinder bekamen einen Raster, in den sie Beete, Wege, Teiche, usw. einzeichnen konnten.



Abb. 20



Abb. 21

Dazu gab es Bilder von verschiedenen Zäunen und Türen mit Preistabellen, die die Kinder verwenden konnten. Die Beete wurden durch Wege getrennt und individuell bepflanzt. Dabei fanden die Kinder viele kreative Möglichkeiten.

Die natürliche Differenzierung war bei dieser Lernumgebung besonders deutlich. Die Kinder suchten sich ja die Grundstücksgrößen und –formen aus. Hier war die erste Differenzierung der Schwierigkeit. Klare große Grundstücke sind leichter zu bearbeiten als diffizile Formen und eine Vielzahl kleiner Felder. Nachdem die Beete und

Wege fertig gestellt waren, bepflanzten die Kinder die Grundstücke ganz nach eigenen Vorstellungen.

Auch bei der Bepflanzung konnte jedes Kind seine Fähigkeiten individuell nutzen. Manche Kinder beachteten auch die Möglichkeit eines Weges direkt im Beet, achteten darauf, dass die Türe aufgehen muss und vieles andere (siehe Abb. 22). Tiergehege wurden eingezeichnet und durchdacht, Teiche mit Brücken überlegt und konstruiert.

Einige Kinder pflanzten mehrere Pflanzen pro Einheitsquadrat ein, viele Kinder achteten dabei auch darauf, wie es real bepflanzt werden müsste.



Abb. 22



Abb. 23

In Abb.23 sieht man, dass die Äpfel zuerst jeweils in ein Einheitsquadrat gesetzt wurden, bei der Besprechung mit einem Mitschüler wurde klar, dass das so real nicht stimmen kann, das Kind korrigierte seine Zeichnung. Es machte aus den Äpfeln Erdbeerpflanzen und setzte in ein noch freies Beet einen Apfelbaum in die Mitte des Feldes.

In Abb. 24 hat das Kind jedes Einheitsquadrat beschriftet, um sich nicht zu verzählen, während andere Kinder die Flächeninhalte bereits gut ohne zählende Verfahren berechneten. Hier sieht man sehr gut, welche individuellen Hilfestellungen sich die Kinder selbst suchen.

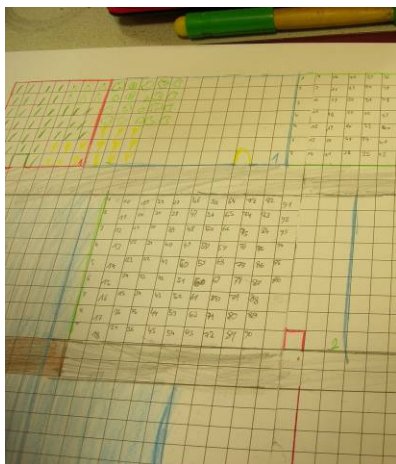


Abb. 24

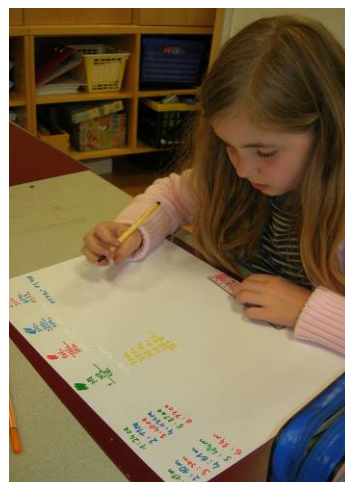


Abb. 25

Das Mädchen in Abb.25 hat sich bei den Rechnungen mit den Farben der Zäune geholfen, um so den Überblick zu behalten.

Manche Kinder blieben in der Phase des Konstruierens und berechneten nur die Beetgrößen und Zaunlängen. Andere kalkulierten förmlich eine gesamte Gartengestaltung, erkundigten sich eigenständig danach, was Pflanzen kosten und bedachten dies in ihren Arbeiten. Diese Lernumgebung bot ein reiches Feld der Erweiterung, bei dem die Kinder sowohl ihre Fantasie, als auch ihr mathematisches Können ganz individuell einsetzen konnten. Da wir am Stadtrand von Wien wohnen und die meisten Kinder mit dem Thema Garten sehr vertraut sind, war bei dieser Lernumgebung auch ein starker Bezug zur kindlichen Realität gegeben.

Wir hatten bald das Problem, dass die Kinder viel mehr Zeit benötigt hätten, als wir ihnen zur Verfügung stellen konnten. Eine Lösung dieses Zeitproblems wäre es, die Kinder nicht in Einzelarbeit Gärten entwerfen zu lassen, sondern in Paaren oder kleinen Gruppen.

Am Ende wurden alle Arbeiten ausgestellt und präsentiert. Jedes Kind hatte die Gelegenheit, seinen Garten zu kommentieren, Einzelheiten zu erklären oder zu erzählen, welche Schwierigkeiten es bewältigt hatte. Jedes Kind konnte stolz auf das Ergebnis sein.

Diese Arbeit war für mich besonders spannend, weil ich einerseits meine Klasse sehr gut in der Arbeitsphase beobachten konnte, da ich ja die Lernumgebung nicht selbst leitete, und andererseits sehen konnte, wie flexibel Fr. Paril auf diese, für sie neue Aufgabe heranging. Ich konnte sehen, wie gut sie diese Herausforderung meisterte, und wie schnell sie sich auf diese andere Denkweise einstellte. Das zeigt mir, dass es wirklich gut möglich ist, auch ohne besondere Vorkenntnisse, einzelne Inhalte oder längere Sequenzen mit kleinen Hilfestellungen oder Anleitungen als Lernumgebungen zu gestalten.

Kommentar Frau Paril :

*„ Ich war sehr glücklich darüber, dass sich mir beim Thema Umfang die Möglichkeit bot, eine solche Lernumgebung selbst auszuprobieren. Ich hatte zuvor, außer theoretischem Background, noch keinerlei praktische Erfahrungen mit Lernumgebungen im Unterricht gemacht und war somit auch unsicher, wie und ob das funktioniert. Obwohl ich ja in der Thematik des Umfangs ziemlich standfest war, hatte ich Bedenken, wie die Kinder reagieren werden.*

*Umso überraschter war ich dann, als die Kinder auf mein Lernangebot so positiv eingestiegen sind. Schnell habe ich gemerkt, dass mit dieser Form des Unterrichtens eine natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht möglich ist. Mit dieser Art wird man dem Lerntempo und auch der Leistung jedes Kindes gerecht und ermöglicht den Kindern durch Selbststeuerung, dass ihre Motivation steigt. Besonders gut gefällt mir, dass nichts falsch sein kann, denn die Kinder befinden sich bei dieser Auseinandersetzung in einem sehr wertvollen Denkprozess, der durch Fremdsteuerung eigentlich unterbrochen wird. Ich war sehr froh, dass die Kinder darauf so gut reagiert und auch so gut agiert haben. Ich stand ihnen allenfalls mit Tipps zu Berechnungen zur Hilfe, aber ich war sehr erfreut über die Ergebnisse, die die Kinder erzielt haben. Ich habe die Kinder dann auch in Partnerarbeit handeln lassen. Und auch dies hat sehr gut funktioniert.*

*Ich bin sehr positiv überrascht und auch dankbar, dass ich diese für mich doch sehr neue, aber meines Erachtens sehr wertvolle Art des Lernens ausprobieren durfte. Ich habe auf jeden Fall positive Erfahrungen gesammelt und gelernt, dass das Schulbuch nicht das einzige Arbeitsmittel im Mathematikunterricht ist.“*

### 3.3.11 Weitere Geometriespiele

„Steter Tropfen höhlt den Stein.“ In diesem Sinne bot ich meiner Klasse immer wieder an den Programmtagen sowie in Tages- und Wochenplänen Geometriespiele an, die sie in Form von Gesellschaftsspielen gemeinsam spielten.

Bald konnte ich beobachten, dass diese Spiele bei den Kindern so beliebt waren, dass sie auch in den Pausen gern gespielt wurden, und sich die Kinder diese auch für zu Hause wünschten.

Viele dieser Spiele sind bekannt, ich möchte hier aber einige der beliebtesten anführen.

- Triovision (Huch & friends)
- Potz Klotz (Kallmeyer)
- Cubus (Kallmeyer)
- Geometrie mit Winkelplättchen (Kallmeyer)
- Blokus (Piatnik)
- Blokus Trigon (Piatnik)
- Make`n`Break (Ravensburger)
- Spiele mit dem Soma Würfel (Kallmeyer)
- Tangram
- Pentominos

## 4 INTERPRETATION DER ERGEBNISSE

### 4.1 Perspektiven der Evaluation

Gerade bei der Auseinandersetzung mit der Evaluation dieses Projektes musste ich mich immer wieder darauf konzentrieren, meine Arbeit in der Klasse mit etwas Abstand zu betrachten. Dieser Aspekt war sehr spannend, weil diese empirische Arbeit für mich noch neu war, andererseits gerade die Vertiefung, auch in theoretische Ansätze und verschiedene Thesen, die ich im Hinblick auf meine Fragestellungen untersuchte, mir neue Perspektiven eröffneten.

Keinen Bereich meines Projektes habe ich so oft überdacht, neu entwickelt und überarbeitet. Immer wieder erwiesen sich Ansätze als interessant, waren aber bei näherer Betrachtung nicht praktikabel. Andere Aspekte traten im Laufe der Arbeit in den Vordergrund und verdrängten Evaluationen, die ich als bereits gute Möglichkeiten klassifiziert hatte.

Manchmal überlegte ich, ob es wirklich Sinn der Arbeit sein kann, so viel Zeit und Energie in die Auswertung der Arbeit zu legen. Nun, am Ende dieser Überlegungen, denke ich, dass gerade diese intensive, analytische Auseinandersetzung mit meiner Arbeit etwas ganz Besonderes an diesem Projekt darstellte.

Ich habe unzählige Inhalte evaluiert, Erkenntnisse gewonnen und neue Einblicke in die Arbeit und Denkweise meiner Schülerinnen und Schüler gewonnen. Bei den Evaluationsworkshops unternahm ich mit Hilfe von Dr. Günther Ossimitz *\*Höhenflüge in der Statistik\** und landete oftmals unsanft in der Realität des für mich Machbaren. Hier lernte ich auch, dass man bei einer so kleinen Versuchsgruppe, wie einer Schulklasse, kaum von allgemein signifikanten Ergebnissen sprechen kann. Die Auswertung und Dokumentation aller Daten, in empirisch relevanter Weise, übersteigen so wohl meine Fähigkeiten, als auch meine Ressourcen. Aber gerade diese Einblicke, in das, was AUCH machbar wäre, faszinierten mich ungemein.

Fachgespräche mit Kolleginnen und Kollegen, mit Eltern und Studentinnen gingen oft in die Tiefe der Inhalte. Neue Sichtweisen wurden ausgetauscht und vermittelt. Eltern, Studentinnen und Kolleginnen und Kollegen gaben mir fachliches, aber auch persönliches Feedback, eine enorme Summe an Potential.

Neben diesen rein gedanklichen und persönlichen Erkenntnissen hatte ich aber natürlich schon den Anspruch, auch wirklich Fakten und Ergebnisse festzuhalten! Dazu versuchte ich eine Kernfrage zu formulieren. Aus dieser ergaben sich für mich die Kriterien an denen ich die Zielerreichung messen konnte. Um diese Kriterien dann im Unterricht beobachtbar und messbar zu machen, formulierte ich Indikatoren für die verschiedenen Kriterien der Evaluation.

Im Folgenden möchte ich mein Evaluationskonzept im Allgemeinen vorstellen, und nur auf einzelne Aspekte genauer eingehen, da die Darstellung aller Evaluationsergebnisse hier zu umfassend wäre.



## 4.2 Evaluation der Beobachtungen

Die Kernfrage meiner Evaluation lautete nach langen Überlegungen und verschiedenen Ansätzen:

„Wie lernen Kinder in mathematischen Lernumgebungen?“

Mit dieser Frage kann ich die Arbeit meiner Schülerinnen und Schüler, auch in Hinsicht auf die Heterogenität der Klasse, beobachten. Aus diesen Beobachtungen können sich einerseits Perspektiven für die künftige Arbeit ergeben, aber auch die Antworten auf die Frage, welche Auswirkungen die Lernumgebungen auf Kinder unterschiedlicher Begabungen haben.

### Kriterien der Beobachtung:

- Begründungsmuster
- Fachsprache
- Motivation
- Vorgehensweise
- Erkenntnisse
- Lösungsweise
- Sozialform
- Hilfestellung

Nicht alle Kriterien haben bei den einzelnen Lernumgebungen den gleichen Stellenwert oder die gleiche Bedeutung. Auch ist die Zuordnung nicht immer ganz trennscharf. Allerdings waren es für mich die wesentlichsten Beobachtungskriterien bei der Arbeit. Tabelle 26 zeigt die Beobachtungskriterien in der Übersicht. Neben den Kriterien befinden sich Scores. Ich versuchte, den Beobachtungskriterien „Wertungen“ zuzuordnen.

Begründungsmuster		Fachsprache		Motivation	
mathematische Begründung	10	völlig	10	sehr gut	5
sozial-emotionale Begründung	7	größtenteils	7	gut	3
motivationsabhängige Begründung	4	teilweise	2	wenig	1
keine Begründung	0	nicht	0	keine	0

Vorgehensweise		Erkenntnisse		Lösungsweise	
strukturiert	8	über das Erwartete hinaus	8	abstrakt	7
ungeordnet	4	wesentliche	4	darstellend	4
zufällig	1	einfache Erkenntnisse	2	mit Material	2
		keine			

Sozialform		Hilfestellung	
Einzelarbeit	5	selbstständig	5
Partnerarbeit	3	mit etwas Hilfe	3
Gruppenarbeit	3	mit viel Hilfe	1

Tabelle 26

Diese Scores sind bei jeder Lernumgebung nach meinem subjektiven Ermessen neu zugeordnet worden und zeigen die Wertigkeit der jeweiligen Kriterien bei der konkreten Themenstellung. So kann die Sozialform manchmal sehr wesentlich sein, bei einer anderen Lernumgebung weniger. Ebenso die Anwendung von Fachsprache: Bei einzelnen Lernumgebungen, wie zum Beispiel dem Klebepunktwürfel, war sie essentiell nötig, bei anderen, wie zum Beispiel dem Legen von Mustern, trug sie weniger zur Arbeit bei.

So legte ich für die meisten Lernumgebungen ein solches Kriterienblatt an und wählte die Scores. Dazu musste ich auch festlegen, wann ein Kriterium erfüllt war. So formulierte ich beobachtbare Indikatoren. Diese können, wie in Tabelle 27 für die Fachsprache dargestellt, folgendermaßen aussehen. Auch diese Indikatoren können bei den verschiedenen Lernumgebungen unterschiedlich ausfallen.

### Fachsprache

#### Fachsprache ist völlig gegeben, wenn....

- KK Nomen und Verben aus der Fachterminologie verwenden
- KK sich klar mit Fachsprache ausdrücken können

#### Fachsprache ist dann größtenteils gegeben, wenn....

- KK Nomen oder Verben aus der Fachterminologie verwenden
- KK den Inhalt klar darstellen können

#### Fachsprache ist dann teilweise gegeben, wenn.....

- KK dort Fachausdrücke verwenden, wo sie unbedingt zum Verständnis nötig sind
- KK zumindest Teile der Antwort damit erklären können

#### Fachsprache ist dann nicht gegeben, wenn.....

- KK keine nötigen Fachausdrücke verwenden
- KK falsche Fachausdrücke verwenden
- somit keine Erklärungen möglich sind

Tabelle 27

Natürlich ist es nicht möglich, bei jeder Arbeit jedes einzelnen Kindes zu behaupten, dass man alle Kriterien treffsicher und genau beobachten und bewerten kann. Es ist allerdings so, dass man im Laufe des Jahres eine große Menge an ausgewerteten Daten erhält, die sich dann zu einem sehr konkreten Bild zusammenfügen. Außerdem setzte ich immer wieder Schwerpunkte und hatte auch Unterstützung. Einige Eltern, die immer wieder an Programmtagen mitarbeiteten, beobachteten Kleingruppen sehr gezielt bei der Arbeit und notierten diese Beobachtungen. Diese Notizen ermöglichten mir weitere Einsichten, wie die Kinder in Lernumgebungen denken und arbeiten.

Alle erhobenen Daten zu einer größeren Lernumgebung trug ich in ein eigenes Blatt ein. Aus diesem Datenblatt war es später möglich, viele verschiedene Teilbereiche zu evaluieren. Tabelle 28 zeigt dieses Datenblatt für die Lernumgebung „Kongruente Figuren“. Allerdings waren nicht bei allen Lernumgebungen alle Kriterien relevant,

darum gab es auch manchmal leere Felder, oder Felder bei denen alle Kinder die gleichen Scores hatten.

Thema: Kongruente Figuren

Datum:

	G	Begründungsm.	Fachsprache	Motivation	Vorgangsweise	Erkenntnisse	Lösungsweise	Sozialform	Hilfestellung
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Monika	w	10	7	7	10	5	7	5	10
Matthias	m	10	7	7	10	5	7	5	10
Felix	m	10	7	7	5	5	7	5	5
Daniel	m	10	4	7	1	5	2	5	5
Pia	w	10	4	5	1	5	7	5	5
Alex	m	10	4	7	5	5	2	5	5
Niklas	m	10	7	7	5	5	7	5	5
Patrick	m	10	7	7	5	5	7	5	10
Vanessa	w	10	7	7	10	5	7	5	10
Catharina	w	10	7	7	10	5	7	5	10
Valerie	w	10	7	5	5	5	7	5	10
Julia	w	10	7	7	10	5	7	5	10
Nicole	w	10	4	7	5	5	7	5	5
Anika	w	10	7	7	5	5	7	5	10
Daniela	w	10	7	7	10	5	7	5	10
Lukas	m	10	4	5	5	5	7	5	2
Anna-Nadine	w	10	7	7	5	5	7	5	10
Markus	m	10	7	7	5	5	7	5	5
Georg	m	10	7	7	10	5	7	5	10
Christoph	m	10	7	7	10	5	7	5	10
Arthur	m	10	7	7	10	5	7	5	10

Tabelle 28

Mit Hilfe dieser Datenblätter kann man auch einen Langzeitschnitt eines einzelnen Kindes in Bezug auf Fachsprache, Lösungsweisen, ... anlegen. Aus diesen sichtbar gemachten Entwicklungen lassen sich Förderkonzepte erstellen und es ergeben sich klare Perspektiven in der Arbeit. Ein Auszug aus einem Beispiel dazu:

Variable: Fachsprache				
		1.10.2008	15.11.2008	15.12.2008
Monika	w	7	4	7

Hier legte ich einen Verlauf der Kompetenzen in Bezug auf die Fachsprache an.

Andererseits kann man mittels Kreuztabellen auch sehr deutlich Zusammenhänge darstellen und die Erkenntnisse in die Arbeit einfließen lassen.

## Beispiel 2

Korrelieren Fachsprache und Begründungsmuster miteinander?

Begründungsmuster	Fachsprache				Gesamtergebnis
	0	2	7	10	
10	0	1	5	2	8
7	1	1	2		4
4	1	3	1	1	6
1	1	4			5
Gesamtergebnis	3	9	8	3	23

Aus der vorliegenden Tabelle ist ersichtlich, dass die meisten Kinder, die mathematische Begründungsmuster anwendeten, auch die Fachsprache völlig oder größtenteils anwendeten.

## Beispiel 3

Auch für den Genderaspekt kann man diese Kreuztabellen nutzen. Es ist möglich auszuwerten, welche Begründungsmuster Mädchen und Buben anwenden:

Begründungsmuster	m	w	Gesamtergebnis
10	4	5	9
7	3	3	6
4	2	4	6
1	2		2
Gesamtergebnis	11	12	23

Hier zeigten sich allerdings selten signifikante Unterschiede. Buben und Mädchen erbrachten sehr ähnliche Leistungen.

Wobei diese Aussage im Hinblick auf Gendersensitivity eine große Bedeutung für mich hat.

Bei all diesen Evaluationsmöglichkeiten stieß ich allerdings sehr schnell an die Grenzen dessen, was FÜR MICH machbar und sinnvoll ist. Es ist unmöglich aus diesen Daten ALLE möglichen Daten und Verbindungen auszuwerten. So beschränkte ich mich darauf, meinen Fokus immer wieder auf einzelne Kinder oder einzelne Zusammenhänge, die bei einer speziellen Lernumgebung für mich wichtig waren, zu lenken.

Trotzdem öffneten all diese Möglichkeiten für mich neue Wege, die ich in Zukunft sicher immer wieder exemplarisch nutzen möchte. Ich kann damit einzelne Inhalte, die für mich wichtig sind, sehr genau und effizient untersuchen.

## 4.3 Zusammenfassung der Evaluationsergebnisse

Im Laufe des Projektes gab es immer wieder einzelne Ergebnisse, die besonders auffällig waren. Ich versuchte diese Beobachtungen immer sehr direkt in die nächsten Arbeiten oder in Förderkonzepte einzubauen. Diese Ergebnisse sind allerdings eher für meine Klasse und mich von Bedeutung.

An dieser Stelle möchte ich nur die wesentlichsten allgemeinen Erkenntnisse anführen, die ich bei meiner Arbeit am Projekt evaluieren konnte, da diese sicher auch auf andere Gruppen übertragbar sind. Die gewählte Reihenfolge soll kein Ranking darstellen, sondern ist willkürlich gewählt.

### Motivation

- Lernumgebungen hatten in den meisten Fällen einen großen Aufforderungscharakter an sich. Die Kinder gelangten über Einstiegsaufgaben sehr schnell ins Thema. Auch während der Arbeit war es selten nötig Kinder zum Weiterarbeiten zu ermutigen. Durch die natürliche Differenzierung arbeiteten die Kinder entsprechend ihren Begabungen, was sich in einer meist sehr ruhigen und entspannten Atmosphäre zeigte.
- Es zeigten sich kaum Unterschiede bei der Motivation zwischen Buben und Mädchen.
- Da bei vielen Lernumgebungen die Sozialform frei gewählt werden konnte, war diese Arbeit sehr beliebt.
- Kommunikation und Kooperation halfen sowohl über Schwierigkeiten in der Lösungsfindung hinweg, als auch bei nachlassender Motivation während der Arbeit.

### Differenzierung

- Die bereits hoch angesetzten Erwartungen in die Differenzierung wurden mehr als erfüllt.
- Bei gleichen Aufgabestellungen waren die Wege immer sehr individuell, und die Lösungen abhängig von den individuellen Fähigkeiten und Vorlieben.
- Manche Kinder lösten eine Vielzahl gleichartiger Aufgaben, andere nutzten die Lernumgebungen zum Explorieren und bearbeiteten anspruchsvolle Inhalte.
- Einfache Lösungen konnten neben anspruchsvollen Lösungen bestehen, da jedes Kind am Ende der Arbeit ein Erfolgserlebnis hatte.
- Die Heterogenität wurde nicht als Nachteil gesehen, sondern als Spektrum der vielen Möglichkeiten, das die Kinder immer wieder zum Lernen, Vergleichen, Staunen und auch Bewundern anregte.
- Sehr oft übertrafen die unterschiedlichen Ergebnisse meine Erwartungen, die Kinder und ich konnten uns immer wieder an neuen, unerwarteten Wendungen bei der Arbeit erfreuen.
- Es entlastet die Planung sehr, nicht eigenes Material für alle Leistungsgruppen planen und vorhersehen zu müssen. Diese Ressourcen werden frei für effizientere Arbeiten.
- Das sichere Wissen, entsprechend den eigenen Möglichkeiten arbeiten zu können und dabei immer lohnenswerte Ziele zu erreichen, ermöglichte es vie-

len Kindern Hemmungen oder Ängste abzubauen, und durch eigene Zugänge zu den Inhalten zu finden.

- Alle Kinder lernten, dass jeder beim Arbeiten auch über sich hinauswachsen und überraschende Lösungen finden kann.

### **Fachsprache**

- Es war für die Kinder sehr einsichtig, dass es zielführender ist, beim Kommunizieren Fachausdrücke zu verwenden. Sie konnten sich so besser verständigen und genauer ausdrücken.
- Ich konnte beobachten, dass das Verwenden der Fachausdrücke mit zunehmender Auseinandersetzung stieg.
- Kinder, die eine korrekte Fachsprache verwendeten, fanden bei vielen Lernumgebungen mathematisch anspruchsvollere Lösungen.
- Auch Kinder mit weniger großen sprachlichen Begabungen verwendeten Fachausdrücke, wenn auch nicht durchgängig. Der passive Wortschatz wurde aber bei allen stark erweitert.

### **Kommunikations- und Kooperationsfähigkeit**

- Partner- und Teamarbeit erfordern Kommunikation und Kooperation, so wurden diese Fähigkeiten immer wieder trainiert, und die Kinder lernten an mathematischen Inhalten allgemein wichtige Kompetenzen.
- Die Kinder lernten Kriterien für die Wahl eines Arbeitspartners einzuschätzen.
- Probleme bei der Arbeit wurden als Diskussionsanlass genutzt, Lösungen wurden meist ohne mein Eingreifen gefunden.
- Eine Übertragung dieser Kompetenz auf andere Lernbereiche konnte ich beobachten. Beim Verhalten in Spielsituationen konnten die erworbenen Kompetenzen allerdings nicht immer angewandt werden.
- Bei Partnerarbeiten fanden sich vorwiegend reine Mädchen- und Bubenpaare zusammen. Bei Gruppenarbeiten war es sehr beliebt zu mischen und es entstanden sehr intensiv arbeitende Arbeitsgruppen.
- Bei der Arbeitsverteilung in den Teams war es interessant zu beobachten, welche Kinder sich für einzelne Arbeiten meldeten. Hier kam es bei unterschiedlichen Zusammensetzungen, auch zu verschiedenen Aufteilungen.
- Man konnte zwar erkennen, dass einzelne Kinder immer wieder die Führungspositionen in Gruppen übernahmen, aber alle Kinder an der Lösung beteiligt sein wollten.
- Selten klinkten sich Kinder ganz aus dem Team aus. War dies der Fall, konnten sie andere Partner suchen oder alleine weiterarbeiten. Oft war dies dann die für sie effizientere Variante.

### **Lernprozesse bei unterschiedlichen Begabungen**

- Es war zu beobachten, dass Kinder aller Begabungsstufen entsprechend ihrer Möglichkeiten arbeiteten.
- Es hat sich aber nicht bestätigt, dass leistungsstärkere Kinder mehr von den anspruchsvollen Aufgaben profitieren als andere, und so die Kluft sich noch vergrößern würde.
- Jedes Kind profitierte auf andere Weise.

- Leistungsstärkere Kinder haben sich bei den Lernumgebungen zwar mehr vertieft und Strukturen erkannt, die andere nicht gefunden haben, aber diese Heterogenität führte nie zu Spannungen zwischen den Kindern.
- So konnten lernschnellere Kinder gefördert werden, ohne dass zukünftige Lerninhalte vorweggenommen wurden.
- Leistungsschwächere Kinder konnten durch praktisches Tun, durch effizientes Material und einfache Rechnungen ins Thema kommen und so genügend Übung beim Bearbeiten komplexer Themen sammeln. Oft trainierten sie dabei Fertigkeiten, die sie noch verbessern mussten, ohne weitreichende mathematische Erkenntnisse zu gewinnen. Wenn man aber bedenkt, dass sie diese Arbeit im Rahmen der Lernumgebung wie alle anderen Kinder ausführen und nicht das Gefühl vermittelt bekommen minderwertigere Aufgaben zu bekommen, dann hat das eine beachtliche Qualität.

### **Hilfestellungen**

- Kinder brauchten mich in erster Linie als fachliche Begleitung bei ihrer größtenteils selbstständigen Arbeit.
- Die meisten Kinder wollten eher Tipps, wie sie eine Hürde überwinden könnten als konkrete Lösungsvorschläge.
- Es waren keine Unterschiede zwischen Mädchen und Buben erkennbar.
- Oft war es wichtig, den Kindern geeignete Hilfsmittel nahe zu bringen, um sich selbst weiterhelfen zu können.
- Tipps, die ich den Kindern bei einer Arbeit gab, wurden oft auch bei anderen Arbeiten ausprobiert, hier konnte ich eine Übertragung feststellen.

### **Erkenntnisse und Begründungsmuster**

- Hier waren die deutlichsten Unterschiede erkennbar.
- Von erstaunlichen Lösungen bis hin zu einfachsten mathematischen Erkenntnissen, fanden sich bei vielen Lernumgebungen alle Variationen.
- Es gab aber auch Lernumgebungen, bei denen die Ergebnisse weniger voneinander abwichen.
- Es gab allerdings keine Unterschiede zwischen Buben und Mädchen. Es gab sowohl Mädchen, die mathematische Erkenntnisse und Begründungen fanden als auch Buben.
- Auch bei der Verbalisierung ihrer Erkenntnisse waren beide Geschlechter gleich gut vertreten. Es gab ungefähr gleich viele Buben und Mädchen, denen es sehr gut gelang, ihre Ergebnisse zu präsentieren.
- Allen gemein aber war die Tatsache, dass jede gefundene Lösung Wertschätzung und Lob erfahren hatte.
- Ich konnte beobachten, dass die Kinder auch bei normalen Aufgabestellungen immer auf der Suche waren, Strukturen, Gesetzmäßigkeiten oder andere Auffälligkeiten zu finden.
- Die Kinder bekamen alle ein Gespür für komplexe Inhalte und verborgene Besonderheiten in Aufgaben. Oft riefen sie bei auffälligen Zahlenfolgen bei einer Aufgabe: „Da ist etwas Besonderes bei den Zahlen!“ oder Ähnliches.

### Allgemeine Arbeitshaltung

- Es war zu beobachten, dass die Kinder sehr unbeschwert in die Arbeit mit Lernumgebungen gehen.
- Sie geben nicht auf, wenn sie auf Schwierigkeiten stoßen.
- Bei sehr komplexen Aufgaben akzeptieren sie es, Fehler zu machen, nehmen es als Teil der Lösungsfindung an.
- Durch Arbeitsteilung werden Kompetenzen aller Kinder genutzt und Schwächen kompensiert.
- Die Kinder arbeiten auffallend selbstständig. Da es ja ihr eigens gewählter Weg ist, den sie beschreiten, erwarten sie nicht, dass Lösungen von außen kommen, sondern suchen sie weitgehend selbst.
- Sie haben ein deutlich besseres Selbstkonzept als Kinder, die ausschließlich fremdbestimmt arbeiten.
- Durch die anspruchsvollen Aufgaben wächst ihr Selbstvertrauen. Es entwickelt sich ein Gefühl von: „Yes, I can!“
- Dieses Selbstvertrauen überträgt sich auch auf andere schulische Bereiche, persönliche Ziele und Wünsche.

## 4.4. Beobachtungen und Kommentare

Hier möchte ich die Kinder, eine Studentin und einige Eltern zu Wort kommen lassen, die öfter mit der Klasse gearbeitet haben, oder ihre Beobachtungen am eigenen Kind wiedergeben wollten.

Kommentare der Kinder:

*„Mir hat das Arbeiten mit dem Zirkel gut gefallen, weil man da ganz runde Kreise machen kann und das so schön aussieht.“*

*„ Ich mag Pentominos, weil man da so viel nachdenken muss.“*

*„ Ich mag Muster.“*

*Die Pentominos fand ich besonders toll, vor allem das Zeichnen und Legen.“*

*„ Mir hat das Umfangrechnen gut gefallen, weil es mir gut gelungen ist.“*

*„Ich mag gerne geometrische Zeichnungen, weil es sehr angenehm war, wenn es so ruhig dabei war.“*

*„Ich mag Geometrie, weil das knifflig und auch lustig war.“*

*„Mir hat das Arbeiten mit den Würfeln gut gefallen und der Garten, weil ich gerne Sachen einrichte.“*



*„Ich habe gerne mit den Einheitsquadraten gearbeitet und gerne Pflanzen in dem Gemüsegarten eingesetzt.“*

*„Mir hat die Arbeit mit dem Würfel gut gefallen, weil ich gern baue und mich konzentrieren muss.“*

*„Mir hat der Garten besonders gut gefallen, weil ich meiner Fantasie freien Lauf lassen konnte.“*

*„ Ich finde es toll, dass ich auf dem Projektplakat bin.“*

*„Mir hat der Garten gefallen, weil man sein Lieblingsobst und –gemüse einpflanzen konnte und so viel zeichnen durfte. Das war toll.“*

*„Mir haben die Pentominos gut gefallen, besonders das Spiegeln und das Legen.“*

*„ Als wir in der Klasse Ecken, Kanten und Rechte Winkel gesucht haben, hat mir das Spaß gemacht.“*

*„Mir hat der Gemüsegarten gut gefallen, weil das Einzeichnen so lustig war und das Nachziehen und Ausrechnen war auch cool.“*

*„Mir hat das Spiegeln der Pentominos gefallen, weil es sehr Spaß gemacht hat mit den Spiegeln zu arbeiten.“*

*„Das Ausschneiden der Figuren mit 2 Symmetrieachsen hat mir gefallen, weil ich gerne schneide und klebe.“*

*„Mir hat der Gemüsegarten am besten gefallen, will man da einteilen und den Umfang berechnen musste.“*

*„Mir hat das Dreiecke spannen gut gefallen, ich fand es lustig, die Dreiecke zuerst auf dem Brett zu spannen und dann einzuzeichnen.“*

*„Wir mussten aus vielen kleinen Würfeln einen großen Würfel bauen und ihn bekleben. Diese Arbeit hat mir besonders gut gefallen.“*

Fr. Heinisch machte in meiner Klasse ihre Praxisausbildung im 4. Semester. Zwar war dies bereits in der zweiten Klasse, aber sie machte eine Lernumgebung zum Thema „Zahlenmauern“ mit meiner Klasse, und vergleichsweise die gleiche Lernumgebung mit einer 3. Klasse, die es nicht gewohnt war in dieser Weise zu arbeiten. So konnte sie die Arbeitsweise der Kinder vergleichen und Unterschiede festhalten.

Bericht von Fr. Heinisch:

*„Im Folgenden werden die Klassen mit Klasse A ( Projektklasse ) und Klasse B ( Vergleichsklasse ) bezeichnet. Wobei zu beachten ist, dass die Lernumgebung bei Klasse A bereits im Vorjahr, also in der 2. Schulstufe durchgeführt wurde, in der Klasse B erst heuer, im 3. Schuljahr. Das heißt, die Kinder der Klasse A waren zum Zeitpunkt der Arbeit ein Jahr jünger als in der Vergleichsklasse.“*

Trotzdem waren die Unterschiede zwischen der Klasse A, die die offene Arbeitsweise im Mathematikunterricht gewöhnt ist und der Klasse B, die noch nie im Rahmen des Mathematikunterrichts mit einer Lernumgebung gearbeitet haben, enorm.

Die Kinder der Klasse A haben mehr Zahlenmauern gerechnet, neben dreistöckigen auch vierstöckige Zahlenmauern, und sie haben wesentlich mehr Besonderheiten der Zahlenmauern mit aufeinanderfolgenden Basiszahlen gefunden. Die Kinder der Klasse B waren hauptsächlich mit dem Rechnen beschäftigt und wussten zunächst nicht, was für Besonderheiten sie entdecken könnten.

Während der Arbeit haben die Kinder der Klasse B wesentlich mehr Hilfe benötigt, vor allem musste ihnen auch die Angst genommen werden, Fehler zu machen. Fast jede zweite Frage lautete: „Ist das richtig?“ oder „Stimmt das eh?“. Meine Aufmerksamkeit war in der Klasse B sehr geteilt, weil alle Kinder immer wieder Hilfe gebraucht und Fragen gestellt haben. In der Klasse A hingegen, in der die Kinder größtenteils selbstständig und alleine gearbeitet haben, konnte ich einzelne Kinder fördern und unterstützen, sowohl die guten als auch die schwächeren Schüler.

Mein Resümee, das ich aus dem Vergleich der beiden unterschiedlichen Klassen ziehen kann, ist: Wenn die Kinder Lernumgebungen gewohnt sind, arbeiten sie in Ruhe ohne Angst, Fehler zu machen und können mathematische Strukturen entdecken. Kinder, die noch nicht gewohnt sind, so zu arbeiten, lernen es. Sie lernen langsam, dass es im mathematischen Bereich nicht nur um das Rechnen geht. So bin ich der Ansicht, dass es immer Sinn macht Kindern Lernumgebungen anzubieten, egal ob sie es bereits gewohnt sind, oder ob man sie erst neu einführt.“

### Beschreibung einer Mutter über die Entwicklung ihres Kindes während der Schulzeit:

„Meine Tochter Valerie war beim Schuleintritt ein sehr schüchternes und ängstliches Kind. Speziell in Mathematik brauchte sie viel Unterstützung. Durch die sehr interessante Lehrform und das Arbeiten nach eigenem Tempo, entsprechend der eigenen Fähigkeiten entwickelte sie sich zu einer aufgeschlossenen Schülerin. Sie gewann enorm an Selbstvertrauen und hat mittlerweile auch in Mathe keine Probleme mehr. Sie erledigt ihre Hausaufgaben ganz ohne Hilfe und freut sich jeden Tag auf die Schule.“

### Beschreibung einer Mutter, selbst Hortpädagogin, die regelmäßig an den Programmtagen Kinder bei der Arbeit begleitete:

„Die Arbeitshaltung der Kinder war sehr unterschiedlich, viele Kinder waren immer sehr motiviert, mehrere Möglichkeiten zu finden. Der Ergeiz betraf Buben und Mädchen gleichermaßen. Wenige Kinder gaben sich mit den vorgegebenen Aufgaben zufrieden, die meisten wollten mehr erreichen.“

Die Kinder arbeiteten motiviert, was auch an den anspruchsvollen Aufgaben lag.

Durch Teamaufgaben wurden sprachliche und kommunikative Kompetenzen gefördert. Dabei übernahmen die Kinder verschiedene Rollen.

Sie lernten ihre Arbeiten zu strukturieren und zu vergleichen: „Wie sind die anderen zu ihrer Lösung gekommen? War es für das Kind ein besserer Weg?“ Die Kinder lernten über ihre Arbeiten zu reflektieren.

Insgesamt war zu beobachten, dass es bei der Arbeit ein: „Ich kann das nicht.“, nicht gab. Sie waren neugierig und ehrgeizig, Lösungen zu finden und blieben bei den gestellten Aufgaben.“

### Kommentar einer Mutter:

„Julia arbeitet mit Freude an neuen, mathematischen Aufgaben, da diese immer spannend und auf neue Art dargebracht werden und somit viele neue Spektren bieten. Es werden alle Lerntypen angesprochen, da der Stoff auf viele unterschiedliche Weisen erarbeitet wird.“

Damit haben auch schwächere Schüler die Möglichkeit, den neuen Bereich zu verstehen.

Die Kinder werden dazu angeregt, selber Lösungen für bestimmte Aufgabenstellungen zu finden, was die Kreativität und Problemlösestrategien fördert.

Es wird alleine und in Gruppen gearbeitet, dadurch ergibt sich eine Steigerung der sozialen Kompetenzen, die sehr wichtig ist.

Als Mutter ist mir wichtig, dass Julia besonders viel Spaß am Mathematikunterricht hat.

Gleichzeitig, als Mathematiklehrerin an einer KMS, ist es eine tolle Erfahrung, wie ein mathematischer Stoff an Schüler in der Volksschule vermittelt werden kann.

Wir würden uns viele, so gut vorbereitete Schüler und Schülerinnen, in unserer Schule wünschen.“

## Kommentare von Müttern, die an Programmtagen Kindergruppen betreuten:

*„An den Projekttagen bot sich mir die Möglichkeit, mir selbst ein Bild von der Lernmethode zu machen. Aufgefallen ist mir, dass die Schüler mit den ihnen vorgegebenen Materialien sehr sicher und unbefangen arbeiteten und für die Kinder das Experimentieren und Finden von Lösungen im Vordergrund stand.*

*Besonders interessant fand ich, dass jedes Kind die Materialien unterschiedlich nutzte. Die einen um auf die Lösung der Aufgabenstellung zu kommen, die anderen verwendeten die Materialien zur Selbstkontrolle. Dieses und das Entwickeln mehrerer Lösungswege ist für die Kinder bereits ein fester Bestandteil ihrer Arbeit geworden.*

*Beobachten konnte ich, dass die einzelnen Schüler sich den Schwierigkeitsgrad der Aufgabenstellung selbständig so wählten, dass für sie jede Aufgabe eine Herausforderung darstellte, unabhängig von ihrer persönlichen Begabung.*

*Von Vorteil empfand ich auch, dass die Kinder öfter in Partnerarbeit oder in Gruppen die Lösungswege erarbeiteten. So konnten sie aus den Ansätzen der Freunde lernen, erfahren wie sie sich selbst in die Gruppe einbringen können und wie erfolgreich sich Teamarbeit auswirkt.*

*Da ich selbst keine Pädagogin bin, kann ich den Erfolg des Projektes im Gesamten nicht beurteilen. Auf meine Tochter bezogen, konnte ich feststellen, dass sie mit der Methode bestens zurecht kam. Sie zeigte eine zufriedene Einstellung zum Mathematikunterricht, konnte im Unterricht den Lehrstoff gut erfassen, sodass sie keinerlei Unterstützung bei den Hausübungen benötigte, und konnte bei schriftlichen Arbeiten das Gelernte umsetzen. Aus der Aussage meiner Tochter schließe ich, dass der Mathematikunterricht mit den vielen verschiedenen Materialien einfach Spaß macht. So war für sie das Projekt IMST ein Gewinn.*

*Herzlichen Dank für den vielen Aufwand den Sie in dieses Projekt mit unseren Kindern investiert haben!“*

*„Als ich von dem Geometrieprojekt gehört habe, war ich skeptisch, weil ich mir nicht vorstellen konnte, dass Kinder in der 3. Schulstufe dieses Thema bewältigen können. Bei den Programmtagen war ich dann erstaunt, mit wieviel Spaß und wie unbefangen und geschickt die Kinder an die verschiedenen Aufgabenstellungen heran gingen. Mein räumliches Vorstellungsvermögen wurde leider nicht so toll geschult, daher waren mir die Kinder phasenweise überlegen - sie waren schneller im Erfassen der, meiner Meinung nach zum Teil recht schwierigen Aufgabenstellungen. Das Vorurteil, Mädchen hätten kein räumliches Vorstellungsvermögen, trifft meiner Erfahrung nach nicht zu, sie waren genauso gut wie die Buben, zum Teil sogar geschickter. Für mich war dieser kurze Einblick ein Beweis dafür, dass eine frühe Förderung auf spielerische Art und Weise, gepaart mit der kindlichen Neugier den Kindern einen ungezwungenen Zugang zu diesem Bereich der Mathematik ermöglicht. Es ist der richtige Weg, wie ich meine. Solche Programme sollten viel öfter in den Unterricht Eingang finden. Der Erfolg "be-lohnt" aber für den, sicher nicht unerheblichen, Zeitaufwand und das Engagement der LehrerInnen, das für die Durchführung eines solchen Projektes notwendig, aber nicht selbstverständlich ist.“*

*„ Bei den Programmtagen wurden die Kinder angeregt das mathematische Wissen in praktischen Übungen umzusetzen. Durch die Einteilung in Kleingruppen konnte ich auf jeden Schüler individuell und den Fähigkeiten entsprechend eingehen und spezielle Hilfestellungen geben.*

*Die Kinder waren immer gut vorbereitet, die Übungen konnten großteils ohne Schwierigkeiten erledigt werden. Unterschiedliche Fähigkeiten waren z.B. bei den Pentominos zu erkennen.*

*Weiters hatten die Kinder bei den Projekttagen die Möglichkeit, Übungen nach ihren speziellen Interessen auszusuchen.*

*Abschließend möchte ich noch sagen, dass es auch ab und zu vorkam, dass ich bei komplizierten Übungen anfangs mehr Probleme hatte, als die Kinder( hat sich aber Gott sei Dank immer bald gelegt).Ich persönlich sehe die Projekttage als wichtigen Teil des Unterrichts.“*

## 4.5. Selbstkonzept der Kinder und Gender Sensitivity

Der Aspekt des Selbstkonzeptes war mir ein besonderes Anliegen. Es ist wichtig, dass Kinder ein gutes Selbstkonzept entwickeln können, ihre Persönlichkeit und ihre eigene Arbeit wertschätzen.

Diese Wertschätzung muss unabhängig von erbrachten Leistungen oder dem sozialen Ranking innerhalb einer Gruppe zu sehen sein. Individuelle Erfolge müssen erkannt und für das Kind sichtbar gemacht werden.

Immer wieder gibt es Kinder, die glauben GAR NICHTS gut zu können. Hier ist es sehr schwierig entgegenzusteuern und es wäre zu optimistisch zu glauben, dass Lernumgebungen hier ein Wundermittel wären. Was aber zu beobachten war, ist die Tatsache, dass auch jene Kinder, die ein schlechtes Selbstkonzept haben, gerne in Lernumgebungen arbeiten, sich darauf freuen. Also kann ich annehmen, dass sie hier eine Möglichkeit finden angstfrei zu arbeiten und die Perspektive haben Leistungen zu erbringen.

Meine Beobachtungen unterstützen diese Annahme. Auch leistungsschwächere Kinder finden Zugang zu den Aufgaben, arbeiten ohne Überforderung oder dem Gefühl es nicht zu können, daran. So können sie elementare Erkenntnisse gewinnen, grundlegende Fertigkeiten trainieren und Teil des Ganzen sein. Team- und Partnerarbeiten liegen diesen Kindern besonders, weil ihre Stärken oft in allgemeinen Kompetenzen liegen, die sie im Team einbringen können. In Zusammenarbeit mit den Eltern gelingt es so meist, Kindern ein besseres Selbstkonzept zu vermitteln.

Der folgende Fragebogen zum Selbstkonzept von Kindern wurde im Rahmen der PISA-Studie erstellt. Diesen setzte ich bei meinen Kindern ein. Die Auswertung machte ich getrennt nach Buben und Mädchen, so dass ich auch Genderunterschiede analysieren konnte.

	ja	vielleicht	nein
Ich mache mir oft Sorgen, dass es für mich im Mathematikunterricht schwierig sein wird.		2/4	8/8
Ich bin einfach nicht gut in Mathematik.		1/2	9/10
Ich bin sehr angespannt, wenn ich Mathematik-Hausaufgaben machen muss.	1/0	0/1	9/10
In Mathematik bekomme ich gute Noten.	8/9	2/3	
Beim Lösen von mathematischen Aufgaben werde ich ganz nervös.	1/0	0/1	9/11
In Mathematik lerne ich schnell.	10/11	0/1	
Ich habe Mathematik schon immer für ei-	6/6	2/3	2/3

nes meiner besten Fächer gehalten.			
Ich fühle mich beim Lösen von Mathematikaufgaben hilflos.		1/2	10/10
Mathematikunterricht verstehe ich sogar die schwierigsten Aufgaben.	7/3	3/8	0/1
Ich mache mir Sorgen, dass ich in Mathematik schlechte Noten bekommen werde.	1/1	1/0	8/11

Testauswertung getrennt nach Buben/Mädchen

Bei der Einschätzung der eigenen Fähigkeiten fiel mir auf, dass die Kinder sich wirklich bemühten, sich richtig einzuschätzen. Oft überlegten sie etwas länger, um die passende Antwort zu geben. Die meisten Einschätzungen waren für mich im Hinblick auf die jeweiligen Leistungen und Fähigkeiten passend und nachvollziehbar. Selten hatte ich den Eindruck, dass Antworten gegeben wurden um Aufmerksamkeit zu erregen oder tief zu stapeln.

Bei der Frage nach den Hausaufgaben kreuzte ein Bub an, er wäre SEHR angespannt beim Schreiben der Mathematikaufgabe. Da er ein sehr leistungsstarkes Kind ist, fragte ich nach und erfuhr, dass die Stimmung beim Aufgabeschreiben im Allgemeinen zu Hause sehr angespannt ist, und nicht speziell bei Mathematikarbeiten. Bei einem der nächsten Elterngespräche sprach ich dies an.

Auffällig war, dass es bei den meisten Fragen kaum Unterschiede bei den Antworten zwischen Buben und Mädchen gab. Lediglich bei der Einschätzung, ob sie auch schwierigste Aufgaben verstehen, waren Buben selbstbewusster. Anscheinend gilt es immer noch Mädchen in ihrem Selbstbewusstsein zu stärken, da diese Einschätzung nicht den tatsächlichen Gegebenheiten entspricht.

Auch die Beobachtungen der Eltern waren dahingehend, dass ihnen besonders auffiel, dass es keine Unterschiede zwischen der Arbeitshaltung der Mädchen und die der Buben gab.

Es gibt unter sowohl unter den sehr guten Rechnern als auch unter den schlechteren Rechnern Buben und Mädchen in gleicher Anzahl.

Außerdem gaben alle Kinder an, dass ihnen das Arbeiten in den geometrischen Bereichen viel Spaß gemacht hat, herausfordernd war und dass sie es mochten, sehr frei arbeiten zu können.

Insgesamt aber waren fast alle Kinder der Ansicht schnell zu lernen, unabhängig von unterschiedlichen Begabungen. Wenn man hier noch beachtet, dass die Kinder sich sehr oft mit besonders anspruchsvollen Aufgaben beschäftigen, und trotzdem der Ansicht sind, diese zu meistern, gewinnt dieses Ergebnis noch mehr an Bedeutung.

## 5 PERSPEKTIVEN FÜR DIE ZUKÜNFTIGE UNTER- RICHTSARBEIT

Das Projekt Lernumgebungen im Geometrieunterricht zeigte sehr deutlich, welche besonderen Qualitäten in diesen Aufgaben stecken. Der für mich wesentlichste Aspekt ist die natürliche Differenzierung, durch die man Kindern mit unterschiedlichen Begabungen gerecht werden kann.

Durch Lernumgebungen kann die Heterogenität der Gruppe positiv genutzt werden, ohne das Individuum zu vernachlässigen. Die Lehrperson benötigt deutlich weniger organisierte Differenzierung, jedes Kind kann auf seinen Wegen unterstützt und begleitet werden. Die Lernumgebungen passen sich den Voraussetzungen der Kinder an, und nicht umgekehrt.

Mit diesen sehr positiven Erfahrungen und den vielen Beobachtungen der Kinder ist es für mich selbstverständlich, dass ich diesen Weg zu unterrichten beibehalten möchte.

Lernumgebungen sind für alle Bereiche des Mathematikunterrichts eine Bereicherung, und ich möchte sie im nächsten Schuljahr sogar noch verstärkt einsetzen. Vor allem der Bereich der Arithmetik enthält viele spannende Möglichkeiten. Außerdem möchte ich die Entwicklung der Kinder bis zum Austritt aus der Volksschule dokumentieren und evaluieren, da dies der erste Durchgang ist, bei dem ich die natürliche Differenzierung von Beginn an so deutlich zum Unterrichtsprinzip machte.

Nachdem diese Art der Aufgabenstellung so viele Vorteile birgt, habe ich heuer begonnen auch im Deutsch- und Sachunterricht darauf zu achten, den unterschiedlichen Begabungen in dieser Weise gerecht zu werden. Es klappte oft sehr gut, wobei ich mich hier noch verstärkt in die Thematik vertiefen möchte.

Wenn die Arbeit mit Lernumgebungen über die Fachdidaktik hinaus zu einem Unterrichtsprinzip heranwächst, würden Persönlichkeitsbildung UND Fachwissen der Kinder nachhaltig gefördert werden. Alle Kompetenzen, die in den Bildungsstandards beschrieben und verlangt werden, können durch Lernumgebungen abgedeckt werden. Davon bin ich nach diesem Projekt, der genauen Auseinandersetzung mit den Inhalten und der Evaluation der Dokumente überzeugt.

Die erworbenen Kompetenzen meiner Schüler und Schülerinnen werde ich bis zum Ende ihrer Volksschulzeit weiter in dieser Art fördern. Die Kontakte zu vielen Interessierten Lehrer/innen/n werden mir dabei helfen, immer wieder mit neuen Impulsen und Konzepten meinen Unterricht zu bereichern und weiterzuentwickeln. Ich freue mich schon, die neuen Erkenntnisse auch im Rahmen meiner Lehrtätigkeit an der KPH Wien/Krems weitergeben zu können.

Durch die fachliche und persönliche Unterstützung von allen Mitarbeitern von IMST, eröffneten sich immer wieder neue Perspektiven und meine Arbeit wurde enorm bereichert. VIELEN , VIELEN DANK DAFÜR !

## 6 LITERATUR

**BEVER, Anja; DIESTEL, Kathrin; KRIEGELSTEIN, Wolfram u. a.** (2005): Nussknacker. Mein Mathematikbuch; Klett Verlag.

**CARNIEL, Dorothee; KNAPPSTEIN, Kordula; SPIEGEL, Hartmut** (2002): Räumliches Denken fördern; Auer Verlag.

**DAHL, Kristin & LEPP, Mati** (2005): Wollen wir Mathe spielen? Oetinger Verlag.

**DROSSLER, Christoph** (2005): Wie groß ist unendlich? rororo Verlag.

**FRIEDRICH, Helmut F. & MANDL, Heinz** (1997): Analyse und Förderung selbstgesteuerten Lernens. In: Weinert, F. E. und Mandel, H. (Hrsg.): Psychologie der Erwachsenenbildung. Enzyklopädie der Psychologie. Pädagogische Psychologie. S.237-293. Hogrefe, Göttingen.

**FOURNIE, Catherine & HELAYEL;Josiane** (2007): Training Geometrie.

**FRANKE, Marianne** (2007): Didaktik der Geometrie in der Grundschule. Spektrum Verlag.

**GERBER, Hanspeter & WÄLTI, Beat** (2003): 10x10 Denkgeschichten. Erle Verlag.

**GERBER, Hanspeter & WÄLTI, Beat** (2003): 10x10 Mathematische Erlebnisse. Erle Verlag.

**GOLDFLUSS, Karen; ROSENBERG, Mary; RUSSEL, Marica** (2007): Sachaufgaben verstehen, Kompetenzstufe 1. Verlag an der Ruhr.

**GOLDFLUSS, Karen; ROSENBERG, Mary; RUSSEL Marica** (2007): Sachaufgaben verstehen, Kompetenzstufe 2. Verlag an der Ruhr.

**HÄRING Gudrun**, (2008): Der Klebepunkt-Würfel - ein Verwandlungswunder. In Grundschule Mathematik: Heft 18/2008, Seite 22 – 25.

**HORN SCHUH; Hermann-Dietrich** (2007): Eins und Zwei ist immer Drei. Mathematische Denkaufgaben. Mildenerger Verlag.

**JAHNKE-KLEIN, Sylvia** (2001): Sinnstiftender Mathematikunterricht für Mädchen und Jungen. Schneider Verlag, Hohengehren.

**KELLER, Karl-Heinz** (2002): Am Geo-Brett Geometrie entdecken. Mildenerger Verlag.

**KOTH, Maria & GROSSER, Notburga** (2004): Das Pentomino-Buch. Denkspielspaß für Kinder von 9 bis 99. Aulis Verlag Deubner.

**GROSSER, Notburga & KOTH, Maria** (2007): Alles klar! 3. Mathematik für wissbegierige Schulkinder. Veritas Verlag.

- LANIG, Jonas** (2008): Bessere Chancen für alle durch individuelle Förderung. Verlag an der Ruhr.
- LORENZ Jens H.; SCHIPPER, Wilhelm; RADATZ, Hendrik** (2007): Impulse für den Mathematikunterricht. Schroedel Verlag.
- LORENZ Jens H. & RADATZ Hendrik** (2008): Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht. Schoedel Verlag.
- MAAK, Angela** (2003): Zusammen über Mathematik sprechen. Verlag an der Ruhr.
- MAAK, Angela & WEMHÖHNER, Katrin** (2006) : Mathe mit dem ganzen Körper. Verlag an der Ruhr.
- MITTELSTÄDT, Holger** (2006): Evaluation von Unterricht und Schule. Verlag an der Ruhr.
- NOBACH, Ines** (2005) : Knobelaufgaben für die 3. und 4.Klasse. Cornelsen Verlag.
- QUAK, Udo** (2005): Die Grundschulfundgrube für Mathematik. Cornelsen Verlag.
- RADATZ, Hendrik; SCHIPPER, Wilhelm u.a.** (1999): Handbuch für den Mathematikunterricht 3.Schuljahr. Schroedel Verlag.
- RUF, Urs & GALLIN, Peter** (1995): Sprache und Mathematik. Lehrmittelverlag des Kanton Zürich.
- RUWISCH, Silke & Peter-Koop, Andrea** (2003): Gute Aufgaben im Mathematikunterricht. Mildenerberger Verlag.
- ARENDS, Michaela; BUGRAM, Ursula u.a.** (2007) Die Matheprofis 3. Veritas Verlag.
- SPIEGEL, Hartmut & SELTER, Christoph** (2007): Kinder & Mathematik. Klett/Kallmeyer Verlag.
- SUNDERMANN, Beate & SELTER, Christoph** (2006): Beurteilen und Fördern im Mathematikunterricht. Cornelsen Verlag.
- ULM, Volker** (2008): Gute Aufgaben im Mathematikunterricht. Cornelsen Verlag.
- WALTHER, Gerd u.a.**(2007): Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret. Cornelsen Verlag.
- WÄLTI, Beat & HIRT, Ueli** (2008): Lernumgebungen im Mathematikunterricht - Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte. Klett Verlag.
- WITTMANN, Erich Ch.** (1998): Design und Erforschung von Lernumgebungen als Kern der Mathematikstruktur. In : Beiträge zur Lehrerbildung 16 (3), S. 329-42.



# ANHANG

Anhang 1:

Wortspeicher für den Klebepunktwürfel

Power Point Präsentation : Flächengleiche Rechtecke

AB: Flächengleiche Rechtecke

AB: Rechtecke durch Gerade teilen

AB: Dreiecke am Geobrett spannen

Anhang 2:

Ausgewählte ABB zur Verschiebwerkstatt (copyright Niekao)

Anhang 3:

Ausgewählte ABB zum Drehen von Figuren (copyright Niekao)