PFL MATHEMATIK

Niedertscheider Franz

BEGRÜNDEN, BEWEISEN und ARGUMENTIEREN im Mathematikunterricht einer heterogenen 4. Klasse Hauptschule

Entwickeln von Strategien

Mayrhofen, im Juli 2006

ABSTRACT

Mit dieser Arbeit versuche ich darzustellen, dass es in einer heterogenen 4. Klasse Hauptschule möglich ist, durch das regelmäßige Einsetzen von Mustern und Techniken zum mathematischen Argumentieren und Begründen, die Kompetenzen der SchülerInnen in entsprechender Qualität zu entwickeln.
Anhand konkreter Beispiele zeige ich, was ich unter Begründen und Argumentieren verstehe und welche Strategien ich den SchülerInnen zu vermitteln versuchte.

INHALTSVERZEICHNIS

1. Die Ausgangssituation oder Welche Bedeutung hat das Thema für mich?

Bereits nach wenigen Jahren Mathematikunterricht hatte ich das Gefühl, dass in meinem Unterricht der Anteil der Routineaufgaben viel zu hoch war und ein Großteil der Mathematikstunden mit dem mehr oder weniger geistlosen Abarbeiten von Schemata verging. Gleichzeitig fiel mir auch auf, dass die Einführung neuer Themen durch ein fragend entwickelndes Unterrichtsgespräch viele SchülerInnen über- bzw. unterforderte.

In den vergangenen zwanzig Jahren versuchte ich daher meinen Unterricht Schritt für Schritt zu „öffnen“, d. h. für die SchülerInnen eine Lernumgebung vorzubereiten, die es ermöglicht selbsttätig Mathematikthemen zu erarbeiten bzw. Mathematik zu üben. Mit der Vorbereitung einer solchen Lernsituation wollte ich auch Raum schaffen für eigene Fragen der SchülerInnen und die Kommunikation zwischen den SchülerInnen.

Diese Veränderungen in der Unterrichtsorganisation bewirken einerseits, dass (nach meinem subjektiven Empfinden) die Freude der SchülerInnen am Unterricht stark ansteigt, Sozialformen wie Partnerarbeit oder Arbeit in kleinen Gruppen von den SchülerInnen häufig gewählt werden und beim Bearbeiten eines Lernprogramms bzw. beim Lösen von Übungsbeispielen die gegenseitige Kommunikation (meist in Form von gegenseitiger Hilfe) funktioniert. Auf der anderen Seite bleibt diese positive Einstellung zum Mathematikunterricht aber wieder auf das Erarbeiten bzw. Abarbeiten von Schemata mehr oder weniger beschränkt.

Sehr selten und meist nur durch „sanften Druck“ sind die SchülerInnen bereit, sich mit Aufgaben oder Problemen auseinanderzusetzen, deren Lösungen mit Hilfe von Argumentationsketten zu begründen bzw. zu beweisen sind. Mir ist bewusst, dass das mathematische Begründen bzw. Beweisen für SchülerInnen eine sehr anspruchsvolle Aufgabe ist, bei der sie zahlreiche Schwierigkeiten überwinden müssen. Neben der mathematischen Unkenntnis sind ein wesentlicher Grund dafür die Unbeholfenheit bei der sprachlichen und formalen Darstellung von Begründungen bzw. Beweisen und die Unkenntnis der grundsätzlichen Struktur von mathematischen Begründungen bzw. Beweisen.

Trotzdem denke ich, dass diese Tätigkeiten (Argumentieren, Begründen, Beweisen) eine bedeutende(re) Rolle im Mathematikunterricht spielen sollen. Meiner Meinung nach unterstützen sie die Entwicklung der Problemlösefähigkeit bei den SchülerInnen, tragen viel dazu bei, dass sich bei ihnen eine Begründungshaltung entwickelt und die Fähigkeit zum logischen Schließen weiterentwickelt wird. Außerdem helfen sie den SchülerInnen fundierte Entscheidungen zu treffen und fördern die Fähigkeit zum Gebrauch der mathematischen Fachsprache und zum Formalisieren. Das exakte Darstellen und Begründen eigener Gedanken ist ein wichtiger Aspekt der Allgemeinbildung, da diese Fähigkeit auch außerhalb der Mathematik wichtig ist (nach Heymann 1996).

Auch das Konzept der PISA-Aufgaben bestärkt mich in dieser Meinung. Ein wichtiger Ansatz von PISA ist nämlich das „Konzept der Grundkompetenzen bzw. der Grundbildung (literacy), das sich auf die Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler bezieht, Kenntnisse und Fertigkeiten in wichtigen Fächern zu nutzen, um bei Problemstellung, -lösung und –interpretation in einer Vielzahl von Situationen analysieren, logisch denken und in effektiver Weise kommunizieren zu können.“ (OECD 2004, S. 2)

Dieses Konzept wurde/wird auf Mathematik dadurch übertragen, dass Aufgaben mit einem sehr realitätsnahen Kontext ausgewählt wurden/werden, bei denen es darum ging/geht, dass die Schülerinnen und Schüler „die Merkmale einer Problemsituation identifizieren, die für eine mathematische Untersuchung geeignet sein könnten, und sodann die für die Lösung des Problems relevanten mathematischen Kompetenzen aktivieren. Dazu ist der Einsatz verschiedener Kompetenzen erforderlich: mathematisches Denken, mathematische Argumentation, mathematische Kommunikation, Modellierung, Problemstellung und –lösung, Darstellung und Umgang mit den symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik.“ (OECD 2004, S. 6)

2. Die Theorie oder Was bedeutet für mich „Begründen, Beweisen, Argumentieren“

Für Günther Malle ist „Begründen (Beweisen) auf jeder Schulstufe in ‚intellektuell ehrlicher’ Form möglich und wünschenswert. Begründen sollte für die Schülerinnen und Schüler ein Alltagsgeschäft werden, so wie etwa das übliche Aufgabenlösen im Unterricht.“ (Malle 2002, S. 7).

Er unterscheidet nicht zwischen Begründen und Beweisen im Mathematikunterricht. Seiner Meinung nach besteht nur ein semantischer Unterschied zwischen diesen beiden Wörtern. Für ihn hat eine Begründung zwei wichtige Funktionen:

Überzeugungsfunktion:

„Durch die Begründung (den Beweis) soll jemand von der Richtigkeit einer Behauptung überzeugt werden.“ (Malle 2002, S. 4)

Zusammenhang stiftende Funktion:

„Durch die Begründung (den Beweis) soll erkannt werden, dass etwas aus etwas Anderem hergeleitet werden kann“ (Malle 2002, S. 4)

Argumentieren können UnterstufenschülerInnen mit Handlungen, Bildern, Alltagserfahrungen, Rechenregeln oder Ähnlichem. Meist können mehrere Argumentationsbasen für eine Behauptung eingesetzt werden. Malle zeigt dies am Beispiel der Bruchrechnung ½ + ¼ = ¾ (s. Malle S. 5).

Bei seinen Untersuchungen fand er heraus, dass die SchülerInnen meist unsicher sind, auf welche Argumentationsbasis sie sich berufen können und auf welche nicht. Selbst die LehrerInnen waren sich nicht immer im Klaren. Er sieht diese Unsicherheit als ein Haupthindernis für den häufigeren Einsatz von Begründungs- und Argumentierungsaufgaben. Ziel des Unterrichts im Begründen und Argumentieren soll nach Malle sein, dass die SchülerInnen die „Unterschiedlichkeit der Argumentationsbasen erkennen“ (Malle 2004, S. 181) und ein „Bemühen um eine gemeinsame Argumentationsbasis“ (Malle 2004, S. 182) zwischen Lehrer und SchülerInnen.

Bis zur 8. Schulstufe schlägt er vor, vor allem die Überzeugungsfunktion von Begründungen in den Vordergrund zu stellen. Er beschäftigt sich auch mit dem wünschenswerten Grad der Exaktheit einer Begründung. Exaktheit hängt für ihn mit der gewählten Argumentationsbasis zusammen und vom Ausmaß der Ausführung der einzelnen Begründungsschritte.

Diese Sicht von Begründen möchte ich in meinem Unterricht versuchen umzusetzen: Die SchülerInnen sollen sowohl in Gesprächssituationen als auch schriftlich argumentieren – im Unterricht umsetzbar durch vermehrte Öffnung des Unterrichts bzw. die Einführung von Lerntagebüchern, die von MitschülerInnen und/oder LehrerInnen kommentiert werden. Durch diese „Dialoge“ entsteht ein Fundament, das beide Lernpartner akzeptieren und womit auch die gewünschte Überzeugung erreicht werden kann.

Die folgenden unterrichtspraktischen Ausführungen haben diese Überlegungen von Malle als Grundlage.

3. Mein Forschungsziel oder Was ich untersuchen möchte

Aufgrund der oben angestellten Überlegungen möchte ich im Schuljahr 2005/06 in einer 4. Klasse Hauptschule untersuchen, ob durch das regelmäßige Einsetzen von Mustern und Techniken zum mathematischen Argumentieren und Begründen die Kompetenzen der SchülerInnen in entsprechender Qualität entwickelt werden können.

Im Unterricht möchte ich in Anlehnung an Malle 2002 die Überzeugungsfunktion des Begründens in den Vordergrund stellen, d. h. die SchülerInnen sollen lernen, dass Begründen bedeuten kann, jemand anderen von der Richtigkeit einer Behauptung zu überzeugen. Dabei soll ihnen bewusst werden, dass es verschiedene Argumentationsbasen gibt (Handlungen, Bilder, Alltagserfahrungen, Rechenregeln, mathematische Eigenschaften, mathematische Grundvorstellungen, mathematische Konzepte, mathematische Ideen, Anschauung, …) Das Begründen möchte ich nicht nur mit innermathematischen Bezügen einüben, sondern auch bzw. vor allem bei mathematischen Anwendungen in Alltagssituationen. In diesen Situationen sollen die SchülerInnen bestimmte Entscheidungen auch mit Mitteln der Mathematik treffen.

Über die oben angeführte Definition von Malle hinausgehend, möchte ich auch erreichen, dass die SchülerInnen lernen bzw. üben, ihre Argumente schriftlich darzustellen. Besonders wichtig ist mir, dass diese Fähigkeiten beim Darstellen der Lösung von „offenen Aufgaben“ angewandt werden. Was ich unter „offenen Aufgaben“ verstehe, erkläre ich im anschließenden Kapitel.

3.1. Beschreibung der Versuchsklasse

Die 4a besteht aus 24 SchülerInnen (9 Knaben, 15 Mädchen), von denen 15 in der Leistungsgruppe 1, 7 in der Leistungsgruppe 2 und 2 Schüler in der Leistungsgruppe 3 sind. Die Klasse wird als „offene Lernklasse“ geführt.

3.1.1. Was sind die besonderen Kennzeichen dieser Klasse?

Die SchülerInnen sind in den Hauptfächern zwar in Leistungsgruppen eingeteilt, der Unterricht wird aber nicht räumlich getrennt gehalten.

In den „OL-Klassen“ gibt Mathematik 2 Stunden an den so genannten „Freiarbeitstopf“ ab, der aus insgesamt 10 Unterrichtsstunden besteht. Die restlichen Stunden „liefern“ die Fächer Deutsch, Englisch, Geographie, Geschichte, Biologie, Bildnerische Erziehung, Chemie und Musik. Täglich beginnt der Unterricht mit zwei Stunden „Freiarbeit“, die von jenen LehrerInnen, die Stunden an den „Freiarbeitstopf“ abgeben, „gehalten“ werden (meist die HauptfachlehrerInnen, die auch die beteiligten Nebenfächer unterrichten).

In den Freiarbeitsstunden können die SchülerInnen selbst entscheiden, welches Fach bzw. welches Thema sie bearbeiten wollen. Sie können auch entscheiden, wann sie mit einem Thema beginnen und in welcher Sozialform (Einzel-, Partner- oder Kleingruppenarbeit) sie es bearbeiten möchten. Ein „Struktogramm“ auf der Anschlagtafel gibt den SchülerInnen die Reihenfolge der Themen vor.

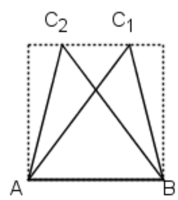
Hat ein/e SchülerIn ein neues Thema gewählt, bespricht er/sie mit der Lehrperson den Zeitrahmen, der für die Bearbeitung des Themas zur Verfügung steht, wobei Rücksicht auf die Leistungsfähigkeit des Schülers/der Schülerin und seine/ihre anderen Freiarbeitsaufgaben genommen wird. Der/die LehrerIn steht als Berater zur Verfügung, hält sich sonst aber im Hintergrund. Anzumerken wäre noch, dass SchülerInnen während der Anwesenheit des Mathematiklehrers auch Lernprogramme aus Deutsch, Englisch oder anderen „Freiarbeitsfächern“ bearbeiten. Umgekehrt müssen die KollegInnen aus Deutsch und Englisch auch bei Mathematiklernprogrammen imstande sein, den SchülerInnen zu helfen und sie zu beraten.

Seit Beginn der 3. Klasse führen die SchülerInnen ein Protokollheft, in dem am Ende jeder Woche ein Bericht über die geleistete Arbeit in der Freiarbeit erstellt werden muss. In diesem Bericht müssen sie auch exemplarisch beschreiben, was sie beim bearbeiteten Thema neu dazugelernt haben. Diese Zusammenfassungen werden von einem der drei Hauptfachlehrer kommentiert. Dadurch haben die SchülerInnen bereits einige Erfahrung im „Schreiben über Mathematik".
Das Unterrichtskonzept zum Beweisen, Begründen und Argumentieren bezieht sich ausschließlich auf den gebundenen Mathematikunterricht.

3.2. Auswahl der Aufgaben

Entscheidend ist, dass der Anteil von Denkaufgaben und offenen Fragestellungen im Unterricht deutlich erhöht und dafür die reine Rechentätigkeit reduziert wird.
Bei der Planung der Unterrichtseinheiten war ich lange Zeit sehr unschlüssig, in welchem Zusammenhang ich die oben angeführten Untersuchungen durchführen sollte. Eine erste Idee war die Beschreibende Statistik oder die Prozent- und Zinsrechnung als „Anlernthema" für diese Kompetenzen zu verwenden.
Nach längerem Überlegen entschloss ich mich aber das Begründen und Argumentieren nicht mit einem oder zwei Themen zu verknüpfen, sondern immer wieder am Beginn einer Mathematikstunde Übungen zum Erlernen dieser allgemeinen Kompetenzen durchzuführen. Ich möchte damit den SchülerInnen demonstrieren, dass Begründen und Argumentieren nicht nur bei bestimmten Themen benötigt werden, sondern bei allen mathematischen Inhalten eingesetzt werden können bzw. sollten. Aber nicht nur der regelmäßige Einsatz dieser Aufgaben im Unterricht ist notwendig, sondern auch, dass diese Aufgaben in die Leistungsbeurteilung eingehen. Dies ist schon im Sinne der Validität der Leistungsbeurteilung wichtig, außerdem ist die Frage „Kommt das zur Prüfung oder Schularbeit?" ein entscheidendes Kriterium für die Bedeutung eines Lerninhalts in den Augen der meisten SchülerInnen. Daher machte ich ihnen von Anfang an klar, dass ihre Beteiligung beim Lösen dieser Aufgaben ein wichtiger Teil der Mitarbeitsnote sein wird und einzelne Aufgaben auch Bestandteil der kommenden Schularbeiten sein werden.
Doch wie sollte ich beginnen? In vielen Klassengesprächen wurden Aufgaben auch in den Jahren vorher gemeinsam besprochen und Lösungswege diskutiert und nach Alternativen gesucht. Nun wollte ich den SchülerInnen aber ganz bewusst klar machen, dass eine wichtige Kompetenz, die im Mathematikunterricht erlernt werden sollte, das Argumentieren von Lösungswegen und Ergebnissen sein sollte. Dafür war bzw. ist es aber notwendig, den SchülerInnen verschiedene Möglichkeiten der Argumentation zu zeigen (Malle nennt dies Argumentationsbasen).
Solche Argumentationsbasen sind für mich

- ***Verallgemeinerungen mit Hilfe von Variablen:*** Damit meine ich das Beweisen mit Hilfe von Variablen, wie beim folgenden Beispiel: Denk dir eine natürliche Zahl und bilde die Summe aus dieser Zahl, ihrem Vorgänger und ihrem Nachfolger. Probiere das Ganze mit zwei anderen natürlichen Zahlen. Was fällt dir auf? Versuche deine Entdeckung zu begründen. Was passiert, wenn du statt dem Vorgänger und dem Nachfolger den Vorvorgänger und den Nachnachfolger verwendest?
  Begründe wieder!
- ***Begründen mit Formeln:*** Formeln werden verwendet um mathematische Beziehungen zu begründen bzw. zu beweisen.
  Begründe, dass die beiden Dreiecke ABC_1 und ABC_2 den gleichen Flächeninhalt haben.



- ***Argumentieren mit Hilfe von mathematischen Definitionen, Begriffen und Konzepten:*** Die SchülerInnen sollen imstande sein mit Hilfe von Grundvorstellungen über die Rechenarten, dem Wissen über die begriffsbestimmenden Eigenschaften von Figuren und Körpern und dem Vernetzen dieses Wissens Lösungswege und Ergebnisse zu begründen und zu argumentieren. Im folgenden Beispiel können die SchülerInnen Konzepte (Bestimmen von Flächeninhalten zusammengesetzter Flächen, die Idee des Schätzens und Approximierens), die sie in Mathematik kennen gelernt haben, in einer neuen Situation anwenden (näherungsweises Bestimmen des Flächeninhalts einer nicht geradlinig begrenzten Fläche).

Hier siehst du die Karte der Antarktis. Schätze die Fläche der Antarktis, indem du den Maßstab der Karte benutzt. Schreibe deine Rechnung auf und erkläre, wie du zu deiner Schätzung gekommen bist.

4. Das Unterrichtskonzept oder Wie plane ich den Unterricht?

4.1 Die Grundidee:

Sehr wichtig war mir, den SchülerInnen zu zeigen, dass es sich beim Begründen und Argumentieren nicht um ein Thema handelt, das – wie viele andere mathematische Lernfelder – eine Zeitlang behandelt und dann „abgelegt“ wird. Verteilt über das ganze Schuljahr sollten immer wieder Unterrichtsstunden mit diesem Schwerpunkt sein, um zu unterstreichen, dass Argumentieren und Begründen im Sinne eines Unterrichtsprinzips in (fast) jeder Situation des Mathematikunterrichts angewandt werden können. Als „roter Faden“ in der zeitlichen Abfolge dienten mir die drei oben erwähnten Argumentationsbasen und ihre Anwendung auch bei außermathematischen Sachverhalten zum Treffen von Entscheidungen bzw. Bewerten von Situationen. Am Ende sollte das Bearbeiten von offenen Aufgaben mit Hilfe der angeführten Argumentationsmuster stehen.

4.2 Der Einstieg

Bevor ich im Unterricht die ersten Beispiele behandelte versuchte ich in einem Gespräch die SchülerInnen von der Bedeutung des Argumentieren und Begründens im Sinne Heymanns und des Konzeptes von PISA zu überzeugen.

4.3 Argumentationsbasis 1

Im Oktober 2005 begann ich mit Aufgaben, die den SchülerInnen aus der Beschäftigung mit Textgleichungen bereits bekannt waren und der Argumentationsbasis „Verallgemeinern mit Hilfe von Variablen“ entsprechen. Außerdem „trainierten“ diese Beispiele auch das Textverständnis (siehe Argumentationsbasis 1). Die Aufgaben stammen aus Andreas Ulovec, 2002. Dafür verwendete ich 2 Unterrichtsstunden.

4.4 Argumentationsbasis 2

Im November wurde in 2 Unterrichtsstunden die Argumentationsbasis Begründen mit Formeln eingeführt (siehe Argumentationsbasis 2).

4.5 Argumentationsbasis 3

Im Dezember wurde in einer einzigen Unterrichtsstunde das Argumentieren mit Hilfe von mathematischen Definitionen, Begriffen und Konzepten besprochen. Mit Hilfe von Beispielen aus der TIMMS-Studie bzw. PISA sollten die SchülerInnen die vielfältigen Möglichkeiten des Argumentierens mit Hilfe dieser mathematischen Werkzeuge kennen lernen. Im Dezember, Jänner und Februar präsentierte ich zu Beginn der Mathematikstunde einmal pro Woche ein Beispiel aus der TIMMS-Studie bzw. PISA 2003 mit der Aufforderung, die Lösung mit Hilfe mathematischer Definitionen, Begriffe oder Konzepte zu begründen. Die SchülerInnen machten im Plenum Lösungsvorschläge, die dann diskutiert wurden. Diese Diskussionen dauerten bis zu 20 Minuten. Einige Beispiele lösten die SchülerInnen als Hausübung (siehe Argumentationsbasis 3).

4.6 Alltagssituationen interpretieren und bewerten

Im März stand die Interpretation bzw. das Bewerten von Alltagssituation mit Hilfe der oben angeführten Argumentationsmuster im Vordergrund. Mit Hilfe der Mathematik sollten die SchülerInnen fähig sein, bestimmte Entscheidungen zu treffen und zu begründen (siehe Kapitel 5.4). Schwerpunkt war die Bewertung bzw. Beurteilung statistischer Ergebnisse und das Erkennen von Manipulationsstrategien bei der Darstellung statistischer Daten.

4.7 Offene Aufgaben

Den Abschluss sollte ab April die Arbeit mit offenen Aufgaben bilden. Sie sind für mich ein zentraler Bereich in der Unterstufenmathematik, da sie den Alltagsbezug gegenüber innermathematischen Bezügen in den Vordergrund stellen.
Diesen Aspekt sehe ich als ein Kernelement der Hauptschulmathematik, da dadurch den SchülerInnen bewusst gemacht werden kann, wofür sie die verschiedenen mathematischen Konzepte „erlernen müssen".
In der Literatur, sind sehr unterschiedliche Beschreibungen bzw. Definitionen für offene Aufgaben zu finden:
„Mit offenen Aufgaben oder offenen Problemen ist (…) ein weites Feld verschiedener Aufgaben- und Problemtypen gemeint, denn die Bezeichnung offene Aufgaben oder offene Probleme wird nicht einheitlich verwendet." (Greefrath 2004, S. 17)

Ich möchte für meinen Unterricht die Definition aus der TIMSS-Studie des deutschen Bundesministeriums für Bildung und Forschung (BMBF) verwenden, in der drei verschiedene Typen von offenen Aufgabenstellungen definiert werden:

Typ 1: Mehrere Lösungswege:

Bei diesen Aufgaben ist die zu erreichende Lösung zwar eindeutig bestimmt, der Lösungsweg ist aber offen.

Typ 2: Mehrere unterschiedliche Lösungen:

Bei diesen Aufgaben gibt es mehrere mathematisch und kognitiv anspruchsvolle Lösungen. Dieser Aufgabentyp eignet sich besonders zur inneren Differenzierung in einer heterogenen Klasse.

Typ 3: Entwicklung eigener Aufgabenstellungen

Bei diesem Typ überlegen die SchülerInnen, ausgehend von einem Aufgabenimpuls, sich selbst neue Problemstellungen (nach Klieme 2001).

Auch Werner Blum und Bernd Wiegand definieren offene Aufgaben ähnlich. Ihrer Meinung nach ist der Aufgabentyp, bei dem der Anfangszustand gegeben ist, der wichtigste, „da hier die SchülerInnen von einer sicheren Basis aus operieren können und die Aufgaben meist nicht zu komplex sind." (Blum/Wiegand 2000, S. 52f).
Für den vermehrten Einsatz offener Aufgaben im Mathematikunterricht argumentieren auch Ines Fröhlich und Stephan Hußmann: „Offene Aufgaben, die verschiedene Lösungswege und Raum für eigene Fragestellungen lassen, eröffnen den Schülerinnen und Schülern ein breites Betätigungsfeld und fördern ihre Kreativität und intellektuelle Selbstständigkeit." (Fröhlich, Hußmann 2005, S. 6)

4.8 Evaluation

Mitte Juni untersuchte ich, ob das oben beschriebene Unterrichtskonzept Auswirkungen hinsichtlich meines Forschungszieles hatte. Die SchülerInnen erhielten Aufgaben, die mit Hilfe der im Laufe des Unterrichtsjahres eingeführten Argumentationsmuster gelöst werden konnten bzw. Beschreibungen außermathematischer Sachverhalte, die mit Hilfe der geübten Argumentationsmuster bewertet oder beurteilt werden sollten oder bei denen Entscheidungen mit Hilfe der Mathematik getroffen werden mussten (siehe Anhang: Evaluationsbogen)
Die SchülerInnen der 2. und 3. Leistungsgruppe mussten weniger Beispiele bearbeiten, da sie für das Lösen der Beispiele länger brauchen und bei einer zu großen Zahl von Beispielen möglicherweise resigniert hätten. Bei der Auswertung

sollte sowohl der quantitative Aspekt (wie viele Beispiele wurden gelöst) als auch der qualitative Aspekt (wie wurden die erlernten Argumentationsmuster eingesetzt) berücksichtigt werden. Vor allem der zweite Aspekt sollte es ermöglichen Fehler bzw. Schwächen im Unterrichtskonzept zu erkennen und Konsequenzen zu ziehen.
Drei Tage vor der Bearbeitung des Evaluationsbogens erhielten die SchülerInnen den Auftrag, im Schulübungsheft noch einmal die im Unterricht erarbeiteten Beispiele zum Argumentieren und Begründen zu wiederholen. Ich erklärte ihnen auch, warum ich ihnen den Evaluationsbogen zur Bearbeitung gab und welche Bedeutung er für mich hat.

5. Der Unterricht oder Was machten die SchülerInnen?

5.1 Argumentationsbasis 1: Verallgemeinern mit Hilfe von Variablen

5.1.1 Musterbeispiel

Denk dir eine natürliche Zahl und bilde die Summe aus dieser Zahl, ihrem Vorgänger und ihrem Nachfolger. Probiere das Ganze mit zwei anderen natürlichen Zahlen. Was fällt dir auf? Versuche deine Entdeckung zu begründen. Was passiert, wenn du statt dem Vorgänger und dem Nachfolger den Vorvorgänger und den Nachnachfolger verwendest? Begründe wieder!

5.1.2 Einführung im Unterricht

Dieses Beispiel erhielten die SchülerInnen als stummen Impuls an der Tafel vorgegeben. In einem Lehrer-SchülerInnengespräch wurden Lösungsvorschläge gemacht und diskutiert. Die SchülerInnen erkannten, dass zunächst mit Hilfe einiger konkreter Beispiele eine mögliche Besonderheit bzw. Auffälligkeit herauszufinden war. Diese musste schriftlich formuliert werden. Das wurde in Einzelarbeit durchgeführt.
Anschließend wurden in einem L-SS-Gespräch Vermutungen über die mathematische Beweisbarkeit der von den Schülern gemachten Entdeckungen angestellt. Die Schüleridee – „Beweisen mit Hilfe von Variablen“ – wurde dann in Einzelarbeit umzusetzen versucht und anschließend die Lösungen der gesamten Klasse präsentiert und diskutiert.

5.1.3 Beispiele von SchülerInnenarbeiten

Praktisch alle SchülerInnen formulierten eine der beiden folgenden Erkenntnisse: Einige Formulierungen wurden der Klasse vorgetragen.

Martin:

Wenn man zu einer natürlichen Zahl den Vorgänger und den Nachfolger addiert erhält man das gleiche Ergebnis wie wenn man diese Zahl mit 3 multipliziert

$5+4+6=15 \Rightarrow 3\cdot 5$

$19+18+20=57 \Rightarrow 57$

$118+117+119=354 \Rightarrow 354$

Jacqueline:

Der Durchschnitt von 3 aufeinander folgenden Zahlen ist immer die mittlere Zahl!

$G = \mathbb{N}$

Stefan erkannte, dass diese „Regel“ nicht nur für Vorgänger und Nachfolger gilt:

Wenn ich den Vorvorgänger einer Zahl und den nachnachfolger habe geht das auch. Das die mittlere Zahl der Durchschnit ist. z.B.: $x + x - 2 + x + 2 = 3x$

Er zeigte auch (ohne von mir dazu aufgefordert zu werden), unter welchen Bedingungen diese Behauptung nicht stimmt:

Wenn ich jedoch einen vorgänger haben und einen nachnachfolger habe funktioniert das nicht. z.B: $x + x - 1 + x + 2 = 3x + 1$

geht nicht

Das Beispiel von Stefanie zeigt einen typischen Fehler, den einige SchülerInnen (besonders jene aus der 2. und 3. Leistungsgruppe beim Aufstellen der Gleichung machten:

Stefanie:

① $5 + 4 + 6 = 15$

$19 + 18 + 20 = 57$

$118 + 117 + 119 = 354$

Der Durchschnitt von 3 aufeinanderfolgenden Zahlen ist <u>immer</u> die mittlere Zahl!

$G = \mathbb{N}$ $x + x - 1 + x + 2 = 3x$ q.e.d.

5.1.4 Festigung

Eine Woche später wiederholte ich denselben Argumentationstyp mit der Aufgabe

Denk dir eine natürliche Zahl, multipliziere ihren Vorgänger mit ihrem Nachfolger und zähle 1 dazu. Probiere das Ganze wieder mit zwei anderen Zahlen. Was fällt dir auf? Begründe!

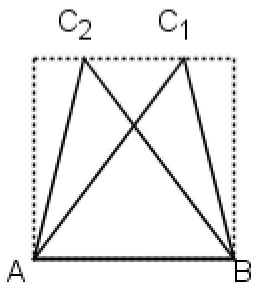
Für die SchülerInnen der 1. Leistungsgruppe war die Lösung dieser Aufgabe kein Problem – es gelang allen die Rückführung auf das erste Beispiel.
Einige SchülerInnen der 2. Leistungsgruppe schafften zwar das Aufstellen der Gleichung, scheiterten aber am Berechnen der Terme (Binom x Binom).

5.2. Argumentationsbasis 2: Begründen mit Formeln

5.2.1 Musterbeispiel

Als Impulsbeispiel an der Tafel erhielten die SchülerInnen die folgende Abbildung und Anleitung:

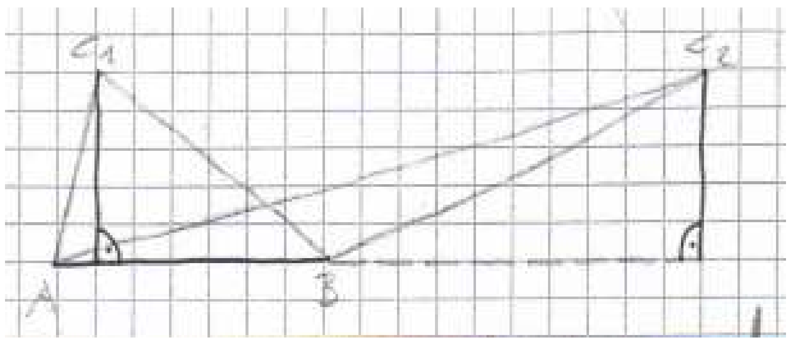
Begründe, dass die beiden Dreiecke ABC_1 und ABC_2 gleichen Flächeninhalt haben.



5.2.2 Einführung im Unterricht

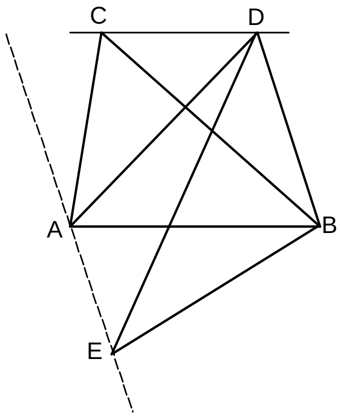
Die SchülerInnen überlegten zunächst ohne Lehreranleitung und notierten ihre Überlegungen im Heft. Einige argumentierten mit Zerlegungsbeweisen (Dreieck ABC_1 hat im Dreieck ABC_2 Platz).
Daraufhin gab ich den Hinweis auf die Flächenformel: „Überlegt, welche Größen für die Flächenberechnung des Dreiecks eine Rolle spielen!“
Nachdem auch dieser Hinweis zu keiner Antwort in meinem Sinne (Begründen mit Formeln) führte entwickelte ich an der Tafel ein Modellbeispiel für „Begründen mit Hilfe von Formelinterpretation“:
„Die beiden Dreiecke haben eine gemeinsame Seite. Die zugehörigen Höhen sind gleich lang. Nach der Formel für den Flächeninhalt des Dreiecks haben sie deshalb den gleichen Flächeninhalt.“

Anschließend erhielten die SchülerInnen den Auftrag zwei flächengleiche Dreiecke zu skizzieren. Fast alle waren imstande Zeichnungen wie die untenstehende zu entwickeln.



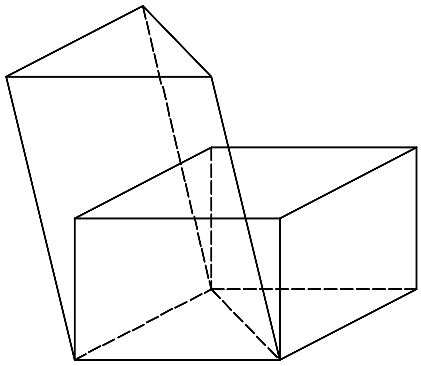
5.2.3 Festigung

Beispiel 1:
Begründe, dass die 3 Dreiecke ABC, ABD und EBD flächeninhaltsgleich sind.



Dieses Beispiel war für die (leistungsstarken) SchülerInnen der 1. Leistungsgruppe gedacht. Der Nachweis, dass Dreieck ABC und Dreieck ABD flächeninhaltsgleich sind, wurde problemlos von den meisten SchülerInnen wie im Musterbeispiel erbracht.
Dass Dreieck ABD und Dreieck EBD flächeninhaltsgleich sind, erfordert im Prinzip die gleiche Überlegung, nur ist diesmal eine andere Seite gemeinsame Grundseite (BD). Dies erkannten einige SchülerInnen.

Beispiel 2:
Begründe, dass das Prisma und der Quader in der Figur gleiches Volumen haben.



Beispiel 3:
Für den Flächeninhalt eines Trapezes mit den Seitenlängen a und c und der Höhe h gilt: $A = \frac{(a + c) \,.\, h}{2}$

a) Setze für c = a. Was erhältst du? Was bedeutet das geometrisch?
b) Setze für c = 0. Was erhältst du? Was bedeutet das geometrisch?

5.2.4 Beispiele von SchülerInnenarbeiten

Stefan:

Quadergrundfläche ist ein Rechteck:

$\Rightarrow V = G \cdot h$

Diagonale teilt das Rechteck in 2 gleiche Teile $\Rightarrow$ Prismengrundfläche ist die Hälfte:

$G_P = \frac{G_Q}{2}$

$\Rightarrow V_P = \frac{G}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}h}{1} \Rightarrow V_P = G \cdot h$

5.2.5 Komplexe Beispiele

Hier geht es um das Erkennen und Begründen von Formelumkehrungen.

Als Impuls erhielten die SchülerInnen den Term A = $(\frac{U}{4})^2$ mit der Aufforderung diesen Zusammenhang zu begründen (beim ersten Mal verwendete ich das Wort „erklären“). Im Lehrer-SchülerInnengespräch wurde dann folgende Begründung (Erklärung) formuliert:

„Ein Quadrat hat 4 gleich lange Seiten. Eine Seite ist daher ¼ des Umfangs (a = $\frac{U}{4}$). Der Flächeninhalt ist die Seite zum Quadrat A = $(\frac{U}{4})^2$.

Anschließend lösten die SchülerInnen in Partnerarbeit folgende Aufgaben:

Begründe den folgenden Zusammenhang:

$A = a \cdot \frac{U-2a}{2}$

$U = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{A}{\pi}}$

Melanie und Jakob fanden für das erste Beispiel folgende Begründung:

Für A braucht man Länge und Breite. Da in U die Länge und die Breite je 2mal vorkommen, muss man die 2fache Länge abziehen und das Ergebnis halbieren.

Bei diesen beiden Beispielen fanden die SchülerInnen der 2. und 3. Leistungsgruppe selbstständig keine Erklärungen. Dies vermute ich, da zweimal Partner aus diesen Leistungsgruppen zusammenarbeiteten und die Aufgaben nicht lösen konnten. Jene Zweit- bzw. Drittgruppler, die mit einem Partner aus der 1. Leistungsgruppe zusammenarbeiteten, gaben an, die Erklärungsmodelle verstanden zu haben.

5.3. Argumentationsbasis 3: Argumentieren mit Hilfe von mathematischen Definitionen, Begriffen und Konzepten

5.3.1 Grundidee

Beispiele aus der TIMSS-Studie verwendete ich, um den SchülerInnen zu zeigen, dass ihre Grundvorstellungen über die Rechenarten, ihr Wissen von den begriffsbestimmenden Eigenschaften von Flächen und Körpern und die Vernetzung dieses Wissens Lösungen bzw. Begründungen für Lösungen oder Rechenwege ermöglicht.
Aus der Studie wählte ich die untenstehenden „Prototypen“ aus, die die SchülerInnen als Arbeitsblatt erhielten. Im Klassengespräch versuchte ich ihnen folgende Überlegungen als Hilfe anzubieten:

- welche Regel steckt dahinter?
- welche Gemeinsamkeiten kann ich erkennen?
- welche Rechenoperation ist hier sinnvoll?
- welche mathematischen Eigenschaften werden verwendet?
- an welches mathematische Modell erinnert mich die Aufgabenstellung?

5.3.1.1 Grundvorstellungen von den Rechenarten

Als Argumentationsbasis wurde im Lehrer-SchülerInnengespräch herausgefunden: „4m ist deshalb die richtige Lösung, weil eine Addition gleicher Summanden durch eine Multiplikation ersetzt werden kann.“

P10. Welcher der folgenden Ausdrücke ist gleich $m + m + m + m$, wenn m eine positive Zahl ist ?

A. $m + 4$

B. $4m$

C. m^4

D. $4(m + 1)$

5.3.1.2 Grundvorstellung vom gemeinsamen Vielfachen

I4. Die Zahlen in der Folge 2, 7, 12, 17, 22, ... werden immer um fünf größer. Die Zahlen in der Folge 3, 10, 17, 24, 31, ... werden immer um sieben größer. Die Zahl 17 kommt in beiden Zahlenfolgen vor. Die beiden Zahlenfolgen werden fortgesetzt. Wie lautet die nächste Zahl, die ebenfalls in beiden Folgen vorkommt?

Auch hier wurde das Argumentationsmuster (zwei natürliche Zahlen „treffen sich beim gemeinsamen Vielfachen" im Klassengespräch entdeckt. In Einzelarbeit suchten die SchülerInnen vorher durch Probieren nach der richtigen Lösung.

5.3.1.3 „Platzhalterkonzept"

Q1. Jonas hat 5 Hüte weniger als Maria, und Clarissa hat dreimal so viele Hüte als Jonas. Welcher der folgenden Ausdrücke steht für die Anzahl von Clarissas Hüten, wenn Maria n Hüte hat?

A. $5 - 3n$

B. $3n$

C. $n - 5$

D. $3n - 5$

E. $3(n - 5)$

Die passende Argumentationsbasis C: 3(n – 5): „etwas, das ich noch nicht kenne, wird durch Platzhalter ersetzt und dann werden die Beziehungen zwischen den Platzhaltern in Rechenoperationen übersetzt") wurde von den SchülerInnen sehr rasch formuliert, da sie dieses Konzept bereits aus der 2. und 3. Klasse von den Textgleichungen kannten.

5.3.1.4 Grundvorstellungen von Rechengesetzen

R9. Welche der folgenden Gleichungen ist FALSCH, wenn a, b, und c verschiedene reelle Zahlen sind?

A. $(a+b)+c = a+(b+c)$

B. $ab = ba$

C. $a+b = b+a$

D. $(ab)c = a(bc)$

E. $a-b = b-a$

Auch diese Argumentationsbasis wurde von den SchülerInnen in Partnerarbeit sofort gefunden.

5.3.2 Festigung

5.3.2.1 Näherungsweises Bestimmen von Flächeninhalten

Dieses Beispiel wurde im Unterricht eingesetzt, nachdem die SchülerInnen sich 2 Wochen zu Hause mit dem Begründen von Lösungen bei TIMSS-Aufgaben beschäftigt hatten. Ich bildete Zufallsgruppen (4 – 5 SchülerInnen/Gruppe) und teilte ohne weitere Erklärungen und Anleitungen ein Blatt mit der unten abgebildeten Aufgabe aus:

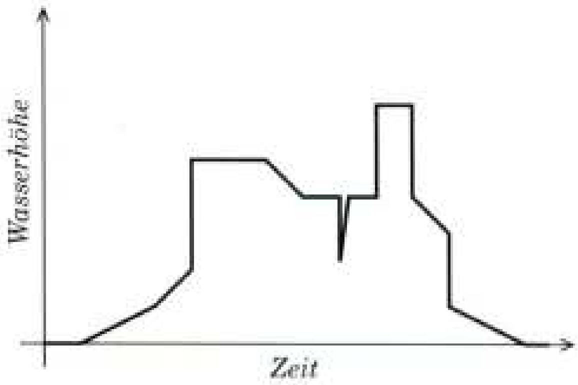
Hier siehst du die Karte der Antarktis. Schätze die Fläche der Antarktis, indem du den Maßstab der Karte benutzt. Schreibe deine Rechnung auf und erkläre, wie du zu deiner Schätzung gekommen bist.

Die Ergebnisse der 5 Gruppen wurden im Plenum präsentiert und diskutiert.
Die Lösungen der Gruppenarbeit demonstrieren meiner Meinung nach sehr gut die verschiedenen Methoden bzw. Konzepte die die SchülerInnen in Mathematik gelernt haben und die sie in dieser für sie neuen Situation anwandten (Vorstellung des Quadrats, Rechtecks, Kreises bzw. der Rastermethode, Idee des Schätzens und Approximierens) zur näherungsweisen Bestimmung der Fläche des Kontinents.
Alle SchülerInnenlösungen sind im Anhang abgebildet.

5.3.2.1 Funktionsgraphen interpretieren

Ohne weitere Erläuterungen teilte ich den SchülerInnen die untenstehende Grafik aus. Sie sollten in Einzelarbeit den Arbeitsauftrag durchführen.

Dieser Graph beschreibt den Wasserstand in einer Badewanne. Erzähle eine Geschichte dazu!



Da wir beim Thema Schlussrechnungen viel mit Graphen gearbeitet hatten und in den vergangenen Monaten viel über schriftliches Begründen und Argumentieren in Mathematik gesprochen wurde, ging ich davon aus, dass dieser Aufgabentyp für die SchülerInnen keine großen Probleme auslösen würde. Es gab auch eine Menge interessanter Bearbeitungen. Nur 5 SchülerInnen brauchten zusätzliche Erklärungen bzw. Hinweise.
Anzumerken ist, dass zu diesem Zeitpunkt das Thema Funktionen bzw. Funktionsgraphen noch nicht explizit behandelt wurde. Die SchülerInnen waren aber mit Schaubildern im Zusammenhang mit direkten und indirekten Proportionen vertraut.

Besonders „kreativ“ fand ich die Geschichte von Stefan, einem Schüler der 3. Leistungsgruppe:

> als erstes steigt das Wasser langsam an (die Wasserhöhe)
> dan Springt der Männchen ein und das wasser steig
> auf einmal Ganz hoch. Dann bleibt er liegen. Nach
> einiger zeit lasst er dan 1 ein bischen wasser aus
> Dann steigt er kurz aus der Wanne und holt seine
> Frau dann legt er wie henen und nach kurzer Zeit
> kommt seine Frau und legt sich zu ihm in die
> Wanne. Nach einer Weile steigt seine Frau wieder
> heraus und Er lässt das wasser aus. Warend
> den auslassen steigt er auf einmal aus der Wanne
> und das restliche wasser rinnt langsam in
> den Abfluss

Überhaupt war interessant, dass die SchülerInnen der 2. und 3. Leistungsgruppe – ähnlich wie Stefan – sehr „kreative“ Geschichten zu diesem Schaubild schrieben und sehr motiviert waren. Natürlich gab es auch Missverständnisse, wie das nächste Beispiel zeigt:

> DIE GESCHICHTE VON GRAPH MAXIMILIAN
>
> Eines Tages wolte der kleine Graph Maximilian badengehen.
> Er hatte das Wasser eingelassen ca. 40 cm hoch saß
> hinein und das Wasser stieg bis zu 60 cm nach 20 min

Melanie wusste offensichtlich mit dem Wort „Graph“ noch nicht viel anzufangen!

5.4. Anwenden der Argumentationsbasen auf außermathematischen Situationen zum Bewerten von Sachverhalten und Treffen von Entscheidungen

Dieser Abschnitt soll den SchülerInnen viele verschiedene Möglichkeiten aufzeigen, in denen sie die in den vorherigen Abschnitten kennen gelernten Argumentationsbasen verwenden können. Ausgewählt habe ich vor allem Beispiele aus der beschreibenden Statistik.

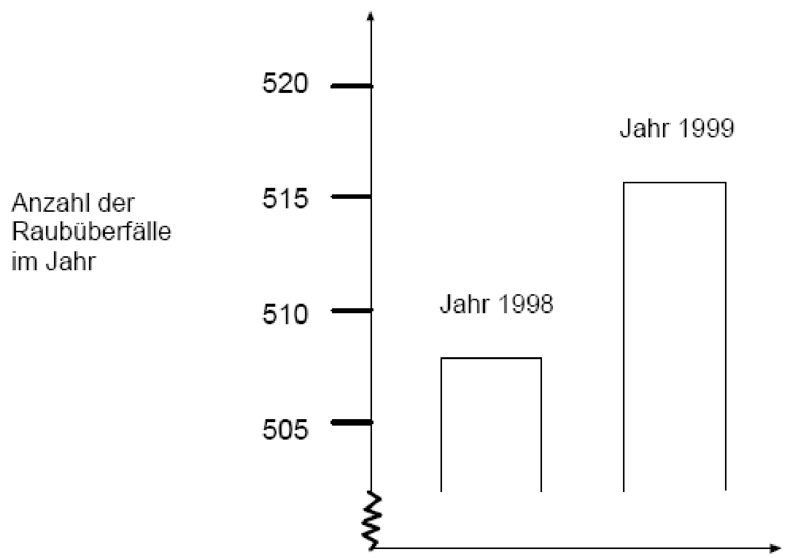
5. 4. 1. Interpretieren von Schaubildern

Bei Beispielen aus der beschreibenden Statistik sollen die SchülerInnen mit Hilfe der Mathematik Darstellungen bewerten, interpretieren und beurteilen sowie bestimmte Entscheidungen treffen und diese begründen.
Das Beispiel Raubüberfälle wählte ich aus, um ihnen zu demonstrieren, wie mit Hilfe von manipulierten Achsenabschnitten statistische Ergebnisse verzerrt dargestellt werden konnten. Es wurde als Einstiegsbeispiel im Plenum diskutiert. Ich gab die Grafik als Tafelzeichnung vor und schrieb darunter die Aussage des Journalisten.

Frage 1: RAUBÜBERFÄLLE *M179Q01 - 01 02 03 04 11 12 21 22 23 99*

Ein Fernsehreporter zeigte folgende Grafik und sagte:

„Der Graph zeigt, dass die Anzahl der Raubüberfälle von 1998 bis 1999 stark zugenommen hat."



Hältst du die Aussage des Reporters für eine vernünftige Interpretation des Diagramms? Begründe deine Antwort.

Nach einer kurzen Denkphase (ca. 5 Minuten) gab es aus dem Plenum zahlreiche Meldungen, die alle der Interpretation des Journalisten widersprachen. Als Begründung wurde meist der absolute Zuwachs der Raubüberfälle angeführt. Einige SchülerInnen argumentierten auch mit der Verkürzung der y-Achse als Ursache für den vermeintlichen Anstieg der Anzahl der Raubüberfälle.

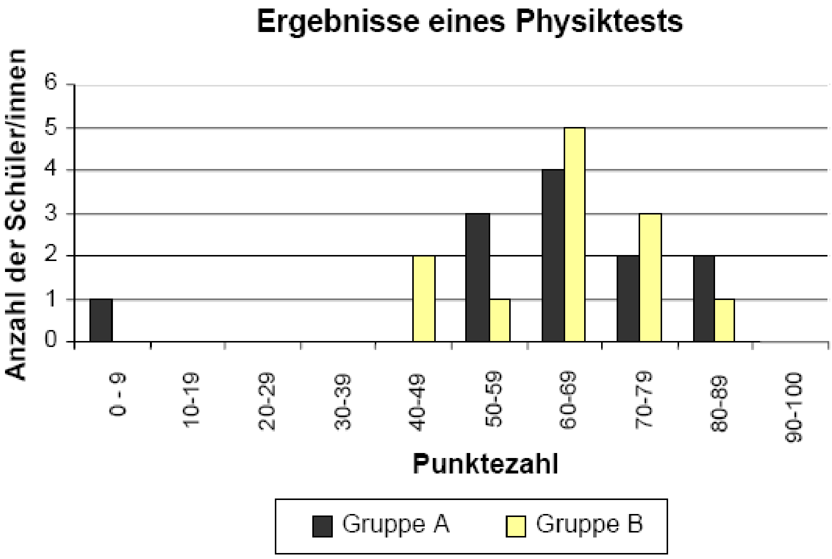
Dieses Beispiel führte in der Folge zu einer ausführlichen Diskussion über Absichten, die ein Journalist/ein Zeitungsverleger/politische Parteien mit der Veröffentlichung von Statistiken verfolgen können (außermathematische Bezüge).

Alle weiteren Aufgaben lösten die SchülerInnen in Partnerarbeit, da das mathematische Wissen, das zur Lösung der Beispiele benötigt wurde, bereits in der 1. und 2. Klasse behandelt wurde.
Die partnerschaftlich gefundenen Lösungen wurden entweder der Klasse präsentiert und diskutiert oder ich gab den SchülerInnen individuelle mündliche oder auch schriftliche Rückmeldungen zu den Lösungen (nicht alle Lösungen wurden präsentiert).

Frage 1: TESTERGEBNISSE *M513Q01 - 0 1 9*

Das nachfolgende Diagramm zeigt die Ergebnisse eines Physiktests für zwei Gruppen, die als Gruppe A und Gruppe B bezeichnet werden.

Die durchschnittliche Punktezahl von Gruppe A ist 62,0 und der Durchschnitt für Gruppe B ist 64,5. Schüler/innen haben den Test bestanden, wenn ihre Punktezahl bei 50 oder darüber liegt.



Der Lehrer betrachtet das Diagramm und behauptet, dass Gruppe B beim Test besser abgeschnitten hat als Gruppe A.

Die Schüler/innen der Gruppe A sind mit ihrem Lehrer nicht einer Meinung. Sie versuchen den Lehrer zu überzeugen, dass Gruppe B nicht unbedingt besser abgeschnitten hat.

Gib ein mathematisches Argument an, das die Schüler/innen aus Gruppe A verwenden können, indem du das Diagramm verwendest.

Die SchülerInnenlösungen waren einheitlich:

Bei Gruppe A haben mehr Schüler den Test bestanden.
Die Schüler der Gruppe A sind im Punktebereich ab 50 konstanter und zahlreicher vertreten.

Franz Josef

Anhand des Diagramms kann man erkennen, dass mehr Schüler der Gruppe A den Test bestanden haben!

Jakob, LG 2

Versicherung

Eine Versicherung veröffentlicht die abgebildete Grafik.

a) Wie ist das Verhältnis von Beitragszahlern zu den Rentenempfängern heute und wie wird es sich verändern?

b) Was beabsichtigt die Versicherung vermutlich mit dieser Veröffentlichung?

c) Wie beurteilst du die dargestellte Prognose? Was kann sie für dich bedeuten?

Alexander erkannte die folgenden Zusammenhänge:

Im Moment gibt es viel mehr Beitragszahler als Rentenempfänger. Jeder Rentenempfänger bekommt also seine angemessene Pension. Doch in den weiteren Jahren werden immer weniger Menschen geboren. Also gibt es später auch weniger Beitragszahler und für die späteren Rentenempfänger würde der Staat kein Geld mehr haben und müsste sich etwas ausleihen.

Die Versicherung beabsichtigt mehr Leute dazu bewegen sich eine Zusatzversicherung anzulegen damit sie später mehr Geld bekommen.

Leider kann man nicht vorhersehen ob sich der Staat Geld ausleihen wird um unsere Pensionsgelder bezahlen zu können. Natürlich könnte er auch die Steuern erhöhen. Daher ist es gut zu überlegen ob man eine Zusatzversicherung braucht.

Weitere SchülerInnenlösungen können im Anhang nachgelesen werden.

5. 4. 2. Erstellen von Schaubildern:

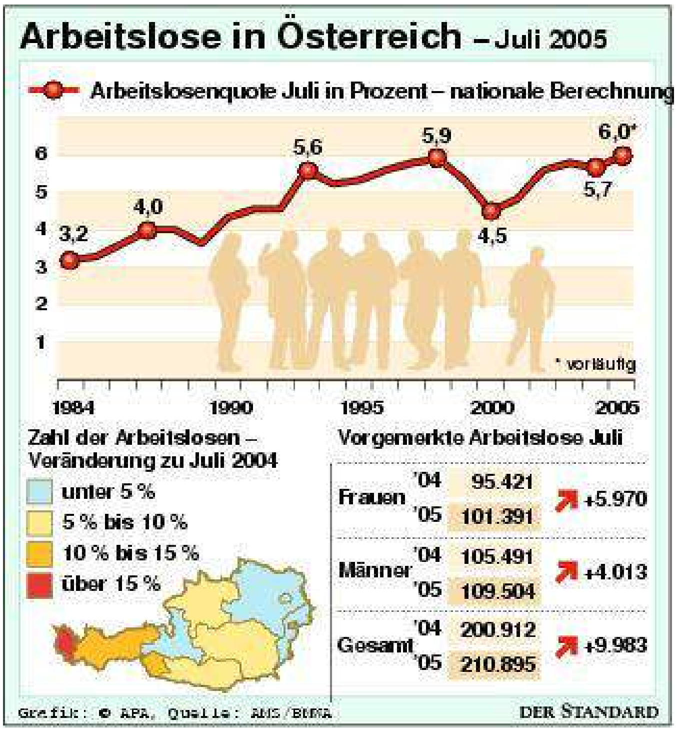
Mit diesen Beispielen sollten die SchülerInnen zeigen, dass sie auch aktiv Schaubilder manipulieren und ein gewünschtes Ergebnis herstellen konnten. In Partnerarbeit wurden je 6 Teams eine der beiden folgenden Aufgaben gestellt:

Aufgabe 1

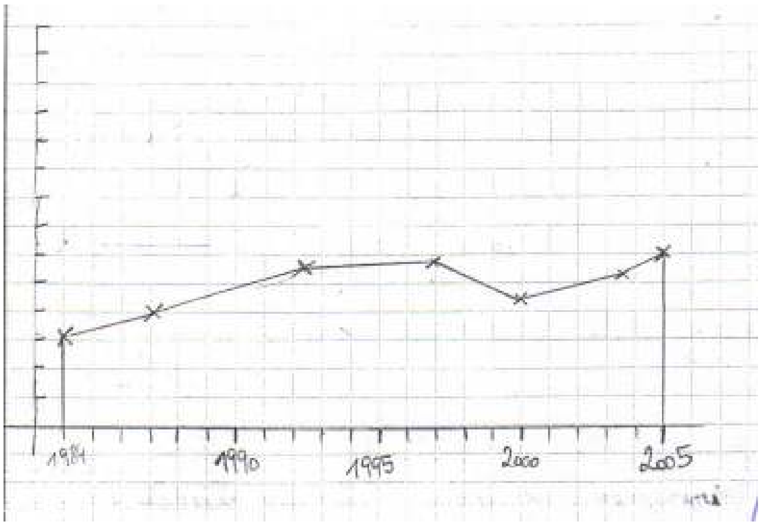
Stell dir vor, du bist Werbeberater einer Oppositionspartei in Österreich und dein Auftrag lautet: Stell die Prozentsätze der Veränderung der Arbeitslosenquote bis zum Juli 2005 so dar, dass der Betrachter das Gefühl hat, die Arbeitslosigkeit wäre ganz gewaltig gestiegen

Aufgabe 2

Stell dir vor, du bist Werbeberater des Wirtschaftsministers in Österreich und dein Auftrag lautet: Stell die Prozentsätze der Veränderung der Arbeitslosenquote bis zum Juli 2005 so dar, dass der Betrachter das Gefühl hat, die Arbeitslosigkeit hätte sich kaum verändert.

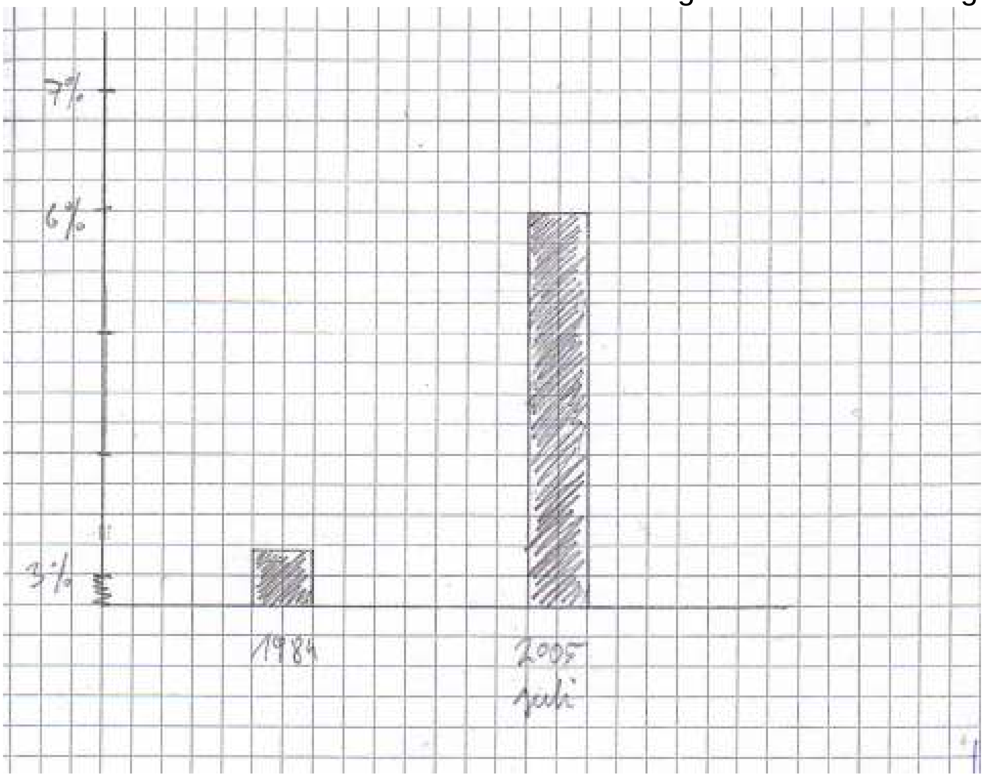


Alle Teams lösten Aufgabe 2 auf ähnliche Art und Weise:



Kevin und Franz Josef

Unterschiedlicher waren die Lösungsvorschläge für Aufgabe 1. Viele Partnergruppen arbeiteten mit stark vergrößerter y-Achse und verwendeten alle Daten. Damit konnten sie zumindest einen starken Anstieg in den letzten 5 Jahren zeigen. Veronika und Barbara entschieden sich für die unten abgebildete Darstellung:



5.5. Offene Aufgaben

Bei der Auswahl dieser Aufgaben ging es mir vor allem um das Begründen von Alltagssituationen mit Mathematik. Die SchülerInnen sollen erkennen, dass man mit Mitteln der Mathematik bestimmte Entscheidungen treffen und begründen kann. Meiner Meinung nach soll Mathematik besonders in der Unterstufe den Alltagsbezug gegenüber den innermathematischen Bezügen in den Vordergrund stellen.

Bezugnehmend auf die TIMMS-Definition von offenen Aufgaben (wie im Unterrichtskonzept beschrieben), versuchte ich für jeden der 3 Typen ein Beispiel mit der ganzen Klasse zu behandeln. Ziel war das Herausarbeiten eines „roten Fadens" bei der Behandlung von offenen Aufgaben

5. 5. 1. Typ 1 – mehrere Lösungswege:

Unser Schulwart Peter behauptet, dass der Asphalt auf dem Schulhof mindestens 200 t wiegt. Stimmt das?

Im L-SS-Gespräch wurde erarbeitet, welche Daten man zur Bestätigung bzw. Widerlegung seiner Meinung braucht (genaue Bestimmung: was ist mit Schulhof gemeint? Bestimmen des Flächeninhalts, Dichte von Asphalt herausfinden, Asphaltdicke feststellen). Als Hausübung sollten die SchülerInnen die benötigten Daten herausfinden. In der nächsten Stunde wurden dann die Berechnungen in Kleingruppenarbeit durchgeführt. 3 Lösungen wurden der Klasse präsentiert, die verschiedene Rechenmethoden zeigten, die zum Ergebnis führten.
Anschließend wurde noch einmal im L-SS-Gespräch die Vorgangsweise reflektiert. Ziel dieser Reflexion war es, den SchülerInnen eine Art „roter Faden" zur Behandlung ähnlicher Beispiele aufzuzeigen.

Anita recherchierte sogar auf der Bauabteilung des Gemeindeamtes, um die Behauptung des Schulwarts zu überprüfen:

Quelle: Bauabteilung der Gemeinde Mayrhofen

Schulhof: $A = 1130\ m^2 = 1130\,0000\ cm^2$

dicke Asphalt: ca. 10 cm $\quad \rho = g/cm^3$

$$\rho = \left.\begin{array}{l} \text{Erde } 1{,}3 - 1{,}9 \\ \text{Ziegel } 1{,}4 - 1{,}6 \\ \text{Beton } 1{,}8 - 2{,}5 \end{array}\right\} \text{Asphalt: } 2{,}1\ g/cm^3$$

$V = G \cdot h \qquad m = V \cdot \rho$

$V = 11300000 \cdot 10 \qquad m = 113000000 \cdot 2{,}1$

$V = 113000000\ cm^3 \qquad m = 237\,300\,000\ g = 237{,}3\ t$

$m = 237{,}3\ t$

A: Ja! Der Schulwart behauptet (meiner Rechnung nach) zu recht.

5.5.1.1 Weitere Beispiele

Dieses Auge hat einen Flächeninhalt von 10 m^2! Findest du diese Behauptung richtig?
Wie groß wäre ein Mensch, der so ein Auge hat?

Aug' in Aug'

Einen Sehtest der besonderen Art machten am Mittwoch diese beiden Mitarbeiter einer Werbefirma in Düsseldorf. Sie überprüften ein Werbeplakat, das vor eine Hauswand gespannt ist, auf Löcher und Risse. (Foto: AP)

Dieses Beispiel wurde auch von fast allen SchülerInnen in Einzelarbeit gelöst. Die Aufgabe stellte ich allerdings erst, nachdem wir zu allen 3 Typen von offenen Aufgaben bereits Beispiele gemacht hatten. Ich glaube, dass die SchülerInnen durch das vermehrte Bearbeiten offener Aufgaben mit Mitteln und Mut ausgestattet waren und sich daher ohne Scheu an diese Aufgabe heranwagten. Eine besonders interessante Lösung ist im Anhang 7. 2. 3. zu finden.

Im Anhang 2 sind noch weitere Beispiele zu finden.

5. 5. 2. Typ 2 – mehrere unterschiedliche Lösungen:

Die SchülerInnen erhielten eine Kopie des untenstehenden Bildes mit dem Impuls:
„Stefan behauptet, dass dieser Aussichtsturm 50 m hoch ist. Stimmt das? Außerdem glaubt er auch, dass man von der Aussichtsplattform des Turmes mindestens 100 km weit sehen kann. Hat er damit recht?
In Einzelarbeit setzten sie sich mit der ersten Behauptung auseinander. Für diese Überlegungen hatten sie 20 Minuten Zeit. Wer die richtige Turmhöhe herausgefunden hatte, konnte/sollte sich mit der zweiten Behauptung auseinandersetzen.
4 Lösungen wurden der Klasse vorgelesen und von den MitschülerInnen kommentiert.
Anschließend wurde im Plenum diskutiert, wie weit man von der obersten Plattform aus sehen kann. An dieser Diskussion beteiligten sich vor allem die SchülerInnen der 1. Leistungsgruppe, da die meisten von ihnen noch genügend Zeit hatten, sich mit der zweiten Behauptung zu beschäftigen. Dabei wurde klar, dass die Sichtweite von vielen verschiedenen Faktoren abhängt. Ein Schüler stellte auch die Behauptung auf, dass die Sichtweite von der Erdkrümmung begrenzt wird. Diese Aussage führte zum Versuch, zu dieser Aussage eine Zeichnung zu entwerfen. Mit Hilfe dieser Zeichnung war es dann möglich die Sichtweite zu berechnen. Bei der Ergebnisbesprechung wurde wieder relativiert, dass der errechnete Wert nur unter bestimmten Bedingungen (keine Gebirge, klare Sicht,…) zutrifft.

Dieses Beispiel eignet sich zur inneren Differenzierung, da die Bestimmung der Turmhöhe für SchülerInnen aller Leistungsgruppen möglich ist und je nach Können die weiteren Aufgabenstellungen gelöst werden.

Zusätzliche Überlegungen

Als Hausübung erhielten die SchülerInnen dann folgende Aufträge:
Wenn ich am Strand von Bibione, Jesolo, Cesenatico,… stehe, kann ich bei guter Sicht die Schiffe bis zu einer Entfernung von 15 km sehen! Stimmt das?
Wenn ich von Mayrhofen aus mit einem Heißluftballon 1 000 m hoch steige, kann ich 100 km weit sehen. Was hältst du davon?
Einige exemplarische Lösungsbeispiele sind im Anhang 7. 2. 4.

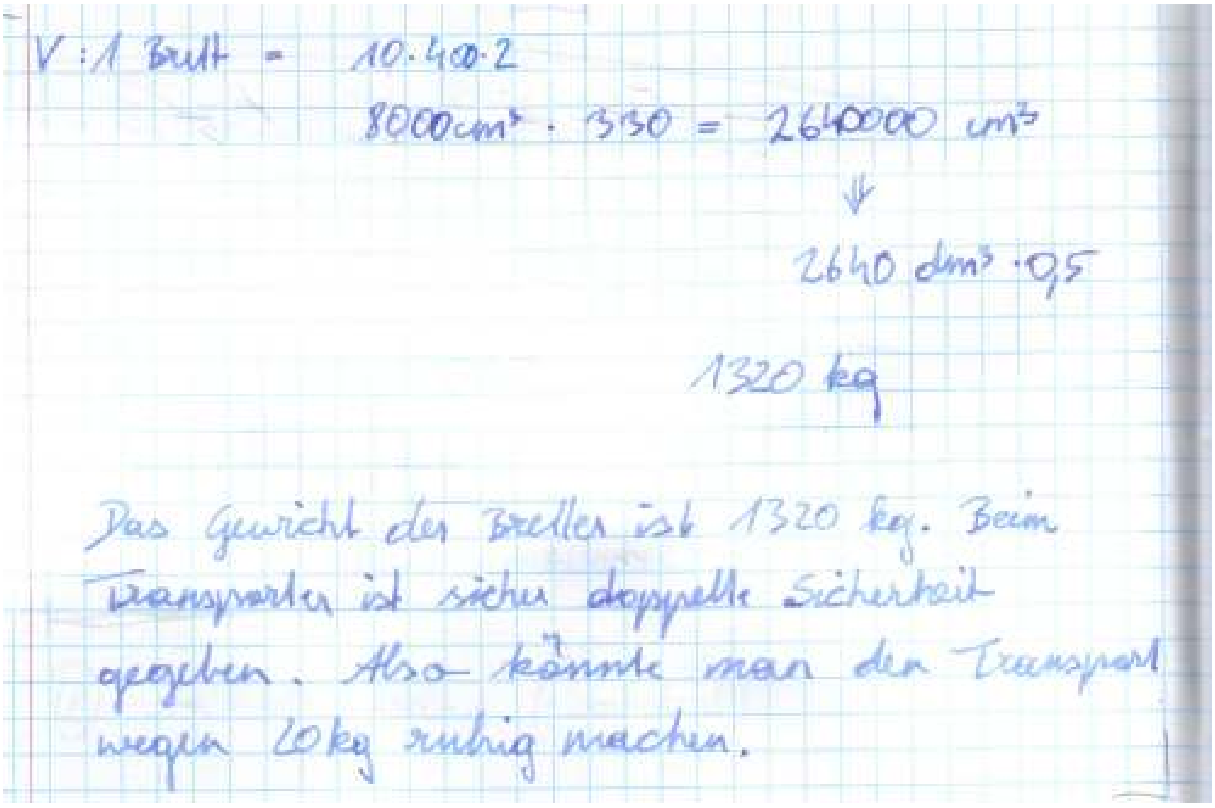
Stefan beschrieb den Lösungsvorgang:

1. Man kann erkennen, dass der Turm 9 „Stockwerke" hat. Im Vergleich zu den Menschen schätze ich ein Stockwerk ca. auf 220 cm weil ein Mensch ca. 175 – 185 cm groß ist und ein Stockwerk ist nur um weniges größer. Dieser Schätzung nach ist der Turm nicht ganz 20 Meter hoch.
Ich schätze, dass man von dort oben aus ca. 90 Kilometer sehen kann (in eine Richtung wo es Flach ist).
Ich bin schon einmal mit der Feuerwehrleiter ganz hinauf gefahren. Sie ist ca. 25 m hoch. Von dort aus kann man das ganze Zillertal (50 km) sehen und dann beginnen die Berge. Wären keine Berge da, so glaube ich könnte man 3x so weit sehen.
Man steigt auf einen Turm um weiter zu sehen weil man erstens über Hindernisse sehen kann und zweitens der Horizont dadurch weiter entfernt ist.
Es hängt von vielen Faktoren ab wie weit man sehen kann: Wetter, Staub, Hindernisse, Standort, Landschaft, ...

5.5.2.1 Weitere Beispiele

LKW – Ladegewicht:

Ein Transporter darf 1 300 kg zuladen. Es werden 4 m lange Holzbretter, die 10 cm breit und 2 cm dick sind, transportiert. 1 dm^3 dieser Holzart hat eine Masse von 0,5 kg. Man plant den Transport von 330 Brettern. Soll dieser Transport stattfinden?



V : 1 Brett = $10 \cdot 400 \cdot 2$

$8000 cm^3 \cdot 330 = 2640000 cm^3$

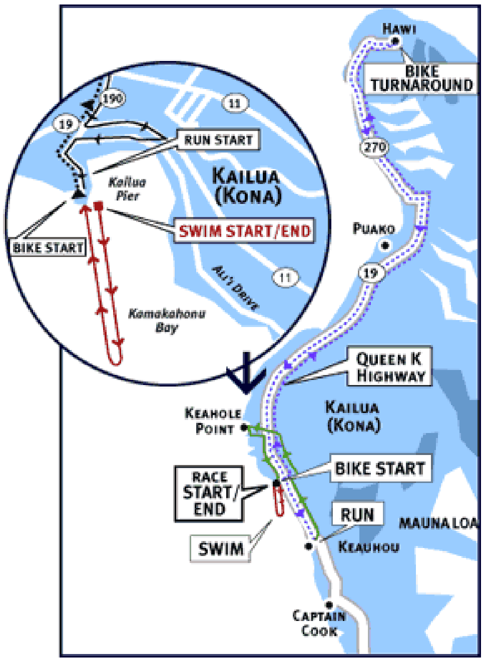
$\Downarrow$

$2640 dm^3 \cdot 0{,}5$

1320 kg

Das Gewicht der Bretter ist 1320 kg. Beim Transporter ist sicher doppelte Sicherheit gegeben. Also könnte man den Transport wegen 20kg ruhig machen.

Die Masse wurde von fast allen SchülerInnen richtig berechnet. Stark unterschiedlich waren die Antworten und ihre Begründung: von der sehr ausführlichen Begründung Stefans bis zum Verbot des Transportes (ca. die Hälfte der SchülerInnen haben den Transport wegen Überladung verboten).



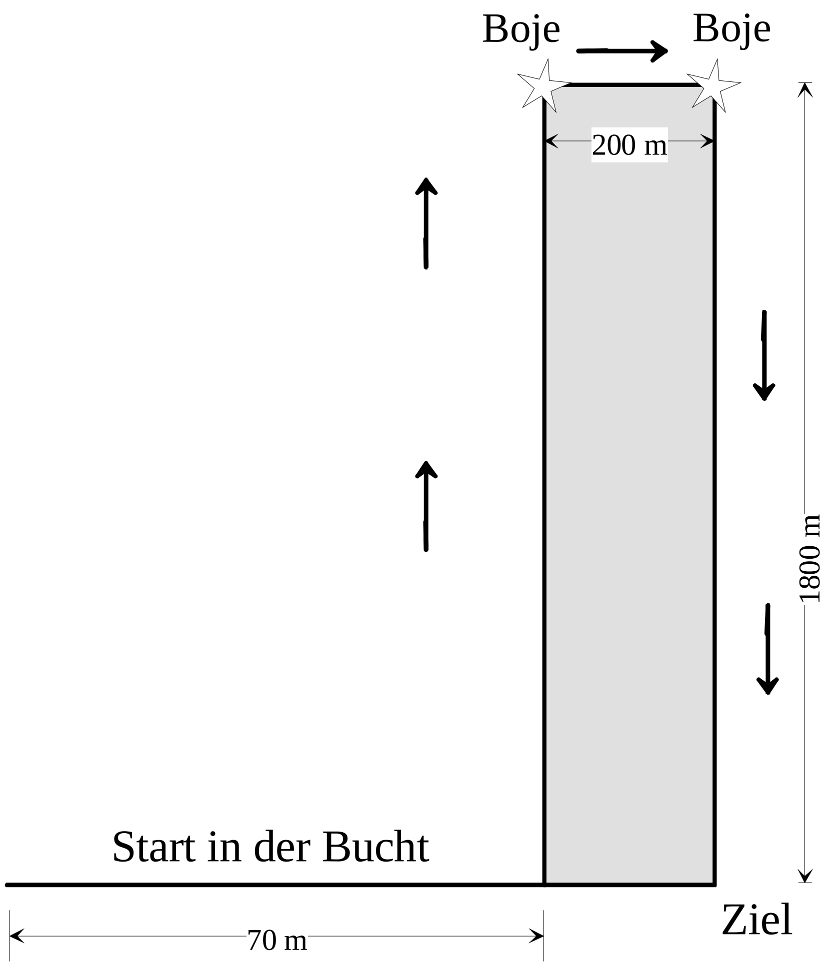
Iron Man in Hawaii

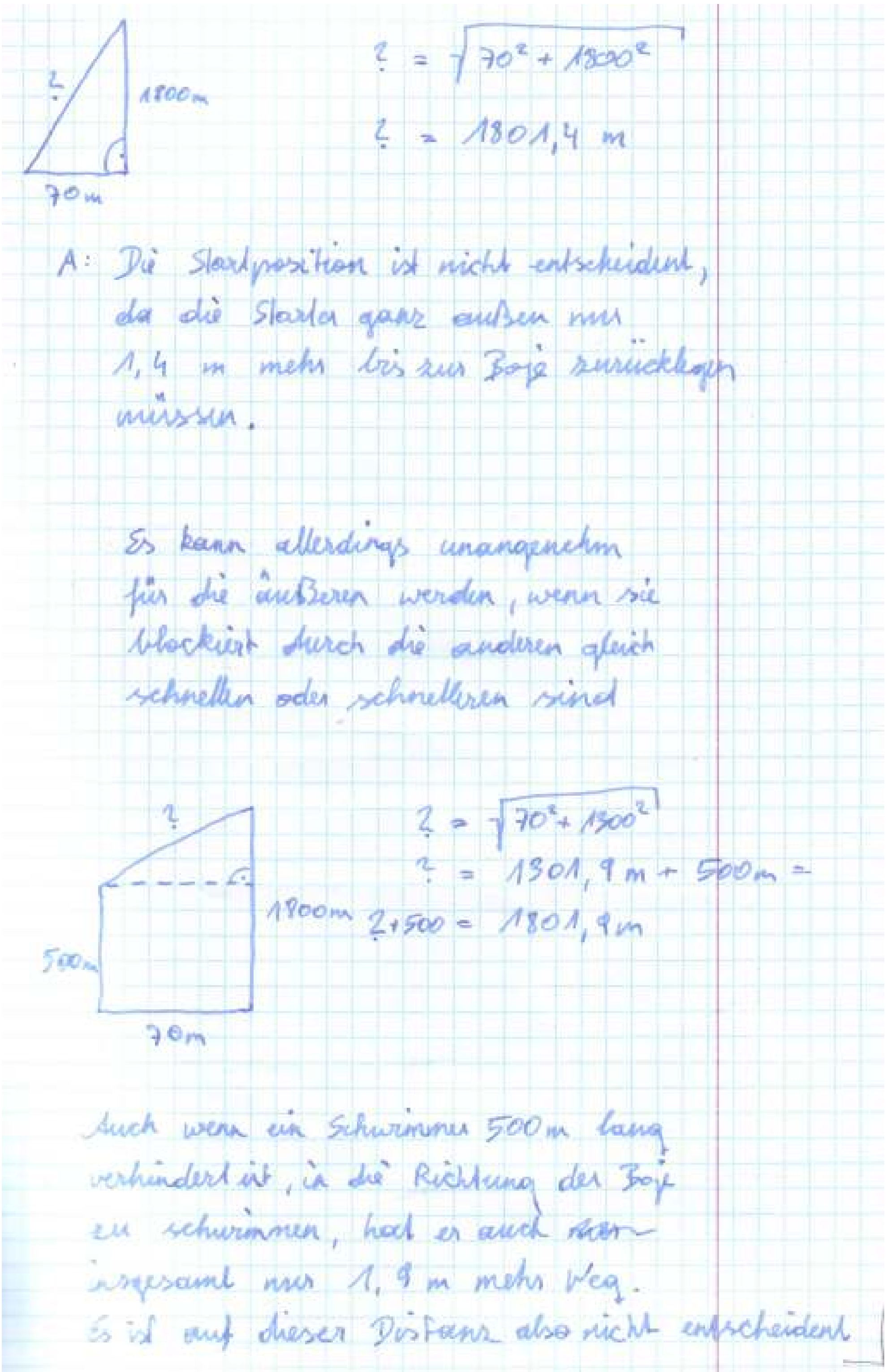
Mitte Oktober findet alljährlich die Weltmeisterschaft im Triathlon („IronMan“) auf Big Island (Hawaii) statt. Dabei müssen folgende Distanzen zurückgelegt werden:

3,8 km Schwimmen im Meer,
180,0 km Radfahren und
42,2 km Laufen (Marathon).

Die Schwimmstrecke ist ein Rechteckkurs.
Alle 1400 Teilnehmer starten gleichzeitig von der 70 m breiten Bucht. Nachdem sie die beiden Wendebojen passiert haben, gehen sie im Ziel wieder an Land.

Ist die Startposition entscheidend? Begründe!





$? = \sqrt{70^2 + 1800^2}$

$? = 1801,4\ m$

A: Die Startposition ist nicht entscheidend, da die Starter ganz außen nur 1,4 m mehr bis zur Boje zurücklegen müssen.

Es kann allerdings unangenehm für die äußeren werden, wenn sie blockiert durch die anderen gleich schnellen oder schnelleren sind

$? = \sqrt{70^2 + 1300^2}$

$? = 1301,9\ m + 500m =$

$?+500 = 1801,9m$

Auch wenn ein Schwimmer 500 m lang verhindert ist, in die Richtung der Boje zu schwimmen, hat er auch ~~[illegible]~~ insgesamt nur 1,9 m mehr Weg.
Es ist auf dieser Distanz also nicht entscheidend

Das Beispiel von Klaus zeigt die unterschiedlichen Lösungsansätze. Viele SchülerInnen rechneten wie er im ersten Teil. Sie waren erstaunt über die unbedeutende Rolle, die die Startposition spielt.
Klaus stellte dann zusätzliche Überlegungen an, die den Zeitpunkt des Querens zur Wendeboje betreffen. Es gelingt ihm ausgezeichnet seine Ergebnisse darzustellen.

5. 5. 3. Typ 3 – Eigene Aufgabenstellungen entwickeln:

Auch dieser Aufgabentyp eignet sich meiner Meinung sehr gut zur inneren Differenzierung in einer heterogenen Klasse, da die Problemstellungen verschiedene mathematische Anspruchsniveaus erfüllen können.

Ich verwendete einen Fotoimpuls, der die SchülerInnen anregen sollte sich mathematische Problemstellungen zu überlegen. Ich forderte sie auf, ein leeres Blatt Papier und einen Bleistift zu nehmen und fünf Minuten lang Antworten auf die Frage „Welche mathematischen Probleme fallen mir beim Betrachten dieses Bildes ein?" zu schreiben. Die Blätter sammelte ich ab und erstellte zu Hause eine Liste von ausgewählten Schülerantworten (siehe Anhang 2). Aus dieser Liste wählte ich Problemstellungen aus, die ich in drei Gruppen einteilte. Ein Einteilungskriterium war die Komplexität der Problemstellung (wie umfangreich sind die Lösungsüberlegungen) und die dritte Gruppe enthielt Problemstellungen zu deren Beantwortung die Mathematik nur indirekt notwendig war (siehe Anhang 2). In der folgenden Stunde suchten die SchülerInnen ein oder zwei Problemstellungen aus der Liste und versuchten in Partnerarbeit Lösungen zu finden. Die meisten Teams wurden mit der Bearbeitung während des Unterrichtes nicht fertig und arbeiteten zu Hause weiter.
Ich erwartete, dass die leistungsschwächeren SchülerInnen sich Aufgaben der Gruppe 3 auswählten. Dies traf nur in jenen Fällen zu, in denen beide Partner aus der 2. bzw. 3. Leistungsgruppe waren.

6. Evaluation oder Was hat der Unterricht gebracht?

6.1. Einleitung

So wie geplant wurde in der vorletzten Schulwoche von den SchülerInnen der 4a-Klasse der Evaluationsbogen bearbeitet. Sie hatten eine Unterrichtsstunde Zeit die Aufgaben zu lösen.
Offene Aufgaben wurden im Arbeitsblatt nicht mehr berücksichtigt, da ihre Bearbeitung sehr viel Zeit in Anspruch nimmt und – wie im vorherigen Kapitel dargestellt – sehr viele Beispiele in Einzel- oder Partnerarbeit im Unterricht aber auch zu Hause bearbeitet wurden. Die gefundenen Lösungen bzw. Problemstellungen sind meiner Meinung nach ausreichend um Aussagen über die Argumentations- und Begründungskompetenz der SchülerInnen zu treffen.
Die Evaluationsbögen für die 1. Leistungsgruppe bzw. für die 2. Leistungsgruppe sind im Anhang 4.

6.2. Auswertung

6.2.1 Allgemeine Anmerkungen

Aus organisatorischen Gründen konnte ich die Evaluationsbögen den SchülerInnen erst in der Woche nach Notenschluss zur Bearbeitung geben. Um sie trotzdem zu motivieren, erzählte ich ihnen noch einmal von meiner Teilnahme am PFL-Lehrgang und dem Zweck dieser Evaluation. Ich hatte das Gefühl, dass der Großteil von ihnen interessiert war, so gut wie möglich die Aufgaben zu lösen.
Von den 24 SchülerInnen waren 22 anwesend. Es fehlten 2 Schülerinnen der 2. Leistungsgruppe. Stefan, ein Schüler der 3. Leistungsgruppe, wollte nach dem Durchlesen des Evaluationsbogens das leere Blatt ohne einen einzigen Lösungsversuch abgeben. Nachdem ich ihn aber erinnerte, wie er gemeinsam mit seiner Gruppe ein ähnliches Beispiel (Bestimmen der Antarktisfläche) perfekt gelöst hatte, begann er zu arbeiten und löste 4 von 7 Beispielen richtig.
Die untenstehende quantitative Auswertung zeigt, dass einige SchülerInnen nicht alle Aufgaben gelöst haben. Es ist für mich jetzt nicht mehr feststellbar, ob sie ein Zeitproblem hatten oder keine Lösung gefunden haben.
Da die Zahl der ungelösten Beispiele aber sehr gering ist, denke ich, dass dies keine große Rolle für die Analyse spielt.

6.2.2 Quantitative Auswertung

LG 1

Aufgabe	Ausreichend	Teilweise	Falsch gelöst	Nicht gelöst
1	9	2	2	2
2	8	4		2
3	10			5
4	13	2		
5	13	1	1	
6	7	4	1	3
7	13		2	
8	10		4	1
9	13		1	1

LG 2 + 3

Aufgabe	Ausreichend	Teilweise	Falsch gelöst	Nicht gelöst
1		2	4	1
2	2	2	1	2
3	6			1
4	3		2	2
5	3		4	
6	3		3	1
7	5			2

Die Unterscheidung zwischen „ausreichend“ und „teilweise“ gelöst betrifft die Exaktheit der Argumentationsbasis. Ich versuche in der qualitativen Auswertung einige typische Qualitätsmuster bei den einzelnen Aufgaben zu beschreiben.

6.2.3 Qualitative Auswertung

Die Auswertung der SchülerInnenarbeiten versuche ich Aufgabe für Aufgabe nach folgendem Raster zu beschreiben:

a) Unterscheidungskriterien für „richtig gelöst“ bzw. „teilweise gelöst“
b) Richtige Lösungsbeispiele
c) Fehlerbeschreibungen
d) Versuch einer Fehlerbegründung

Aufgabe 1

a) Gelang es die „Regel“ zu erkennen und schriftlich zu formulieren galt die Aufgabe als „teilweise gelöst“. Wurde auch der Beweis mit Hilfe eines Gleichungsansatzes durchgeführt, war die Aufgabe „richtig gelöst“.

b) 13 SchülerInnen formulierten (fast identisch): „Wenn man eine Zahl mit ihrem Nachfolger addiert kommt dasselbe heraus wie wenn man das Quadrat der Zahl vom Quadrat des Nachfolgers wegzählt.“ (Karin).

c) 3 SchülerInnen der 2. Leistungsgruppe haben die Anweisung komplett missverstanden und haben anstatt zu quadrieren eine Vervierfachung vorgenommen. Die restlichen drei SchülerInnen subtrahierten das Quadrat des Nachfolgers vom Quadrat der Zahl. Eine Schülerin der 1. Leistungsgruppe formulierte dazu, dass „die Beträge der Ergebnisse gleich seien“.

d) Auch im Unterricht haben SchülerInnen ähnliche Fehler gemacht. Interessant, dass es nicht ausschließlich dieselben SchülerInnen waren, die diesen Fehler bei der Evaluation gemacht haben.

Aufgabe 2

a) „Teilweise gelöst“ war diese Aufgabe, wenn die Flächengleichheit nicht mit Hilfe der Formel begründet wurde, sondern dass überstehende Dreieck in die Restflächen des Parallelogramms eingepasst wurde. Das war zwar keine mathematisch exakte Lösung, die Idee des Zerlegungsbeweises kann aber nicht als ganz falsch bewertet werden.

b) Bei allen richtigen Lösungen wurde in die Flächenformel für das Dreieck die doppelte Höhe ($2h_a$) eingesetzt und durch Umformen die Gleichheit mit der Flächenformel für das Parallelogramm gezeigt.

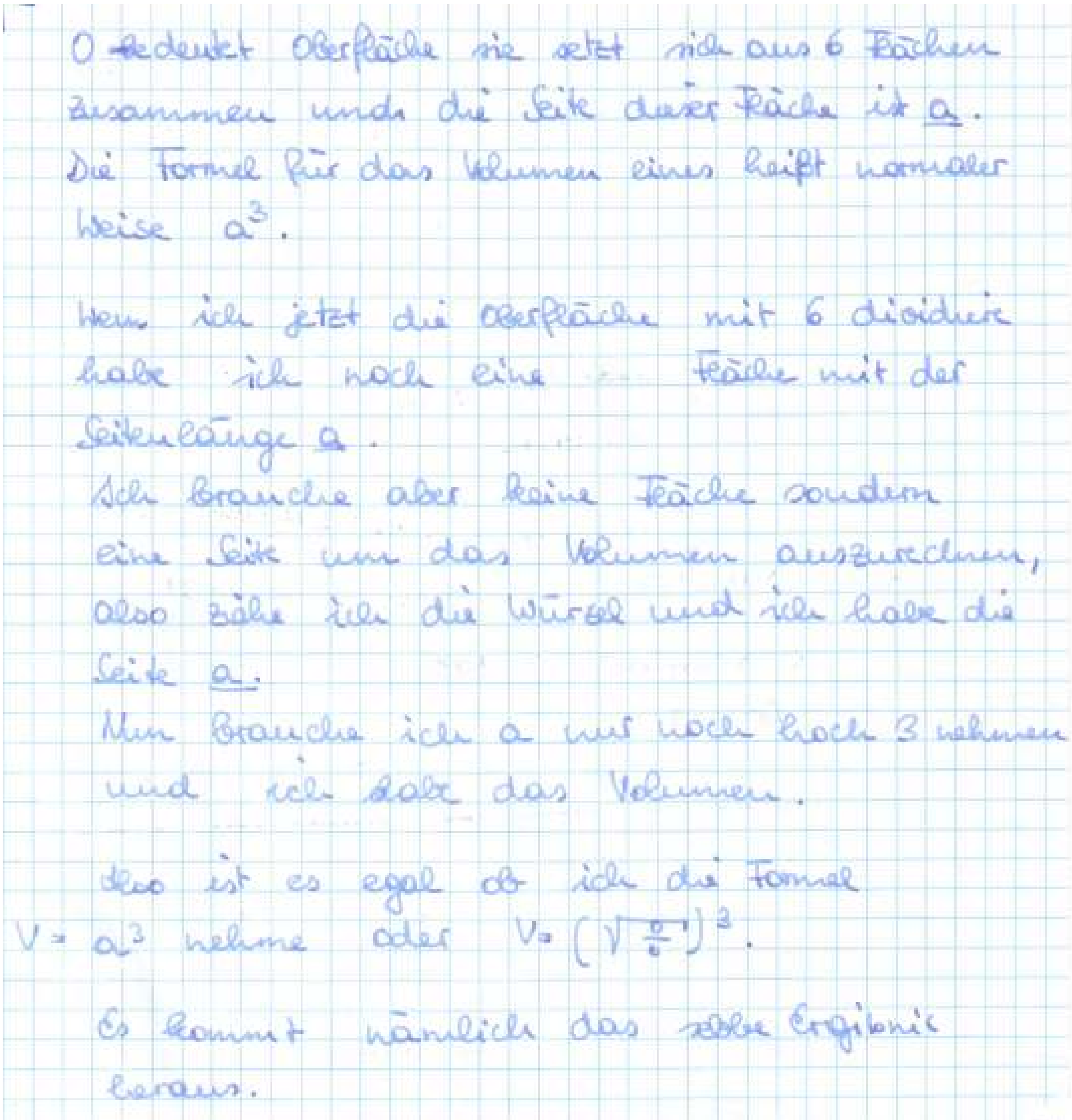
c) 4 SchülerInnen haben die Aufgabe mit Hilfe des Zerlegungsbeweises zu lösen versucht.

d) Den Zerlegungsbeweis hatten die SchülerInnen bei der Einführung des pythagoreischen Lehrsatzes kennen gelernt. Offensichtlich erinnerten sie sich noch an diesen Nachweis der Flächengleichheit.

Aufgabe 3

a) Diese Aufgabe wurde entweder ganz richtig gelöst oder falsch bzw. überhaupt nicht.

b) Besonders gut gefällt mir die Argumentation von Anna, die jeden Aspekt dokumentiert.



O bedeutet Oberfläche sie setzt sich aus 6 Flächen zusammen und die Seite dieser Fläche ist a.
Die Formel für das Volumen eines heißt normaler Weise a^3.

Wenn ich jetzt die Oberfläche mit 6 dividiere habe ich noch eine Fläche mit der Seitenlänge a.
Ich brauche aber keine Fläche sondern eine Seite um das Volumen auszurechnen, also ziehe ich die Wurzel und ich habe die Seite a.
Nun brauche ich a nur noch hoch 3 nehmen und ich habe das Volumen.

Also ist es egal ob ich die Formel
$V = a^3$ nehme oder $V = \left(\sqrt{\frac{O}{6}}\right)^3$.

Es kommt nämlich das selbe Ergebnis heraus.

c) Es gab keine falsche Lösung, aber 5 SchülerInnen haben die Aufgabe nicht gelöst

d) Dieses Beispiel mussten nur SchülerInnen der 1. Leistungsgruppe bearbeiten. Hier zeigte sich, dass ein Drittel mit dieser Umkehraufgabe nichts anzufangen wusste. Möglich, dass das Arbeiten mit solchen Aufgabentypen im Unterricht noch mehr intensiviert werden müsste.

Aufgabe 4

Dieses Beispiel wurde von fast allen SchülerInnen richtig gelöst.
Musterlösung:
„n steht für die Zahl, die in der Mitte der drei aufeinander folgenden Zahlen ist, weil n -1 ist der Vorgänger und n + 1 ist der Nachfolger.“ (Jakob)

Möglicherweise wurde diese Aufgabe deshalb fehlerlos gelöst, da die SchülerInnen im Rahmen der Freiarbeit sowohl in der 1. Klasse als auch in der 2. Klasse Lernprogramme erarbeiteten, bei denen das „Übersetzen in die mathematische Formelsprache“ im Mittelpunkt steht.

Aufgabe 5

a) „Teilweise richtig“ war dieses Beispiel, wenn zwar die richtige Zeile gefunden wurde, die Antwort aber nicht begründet wurde.

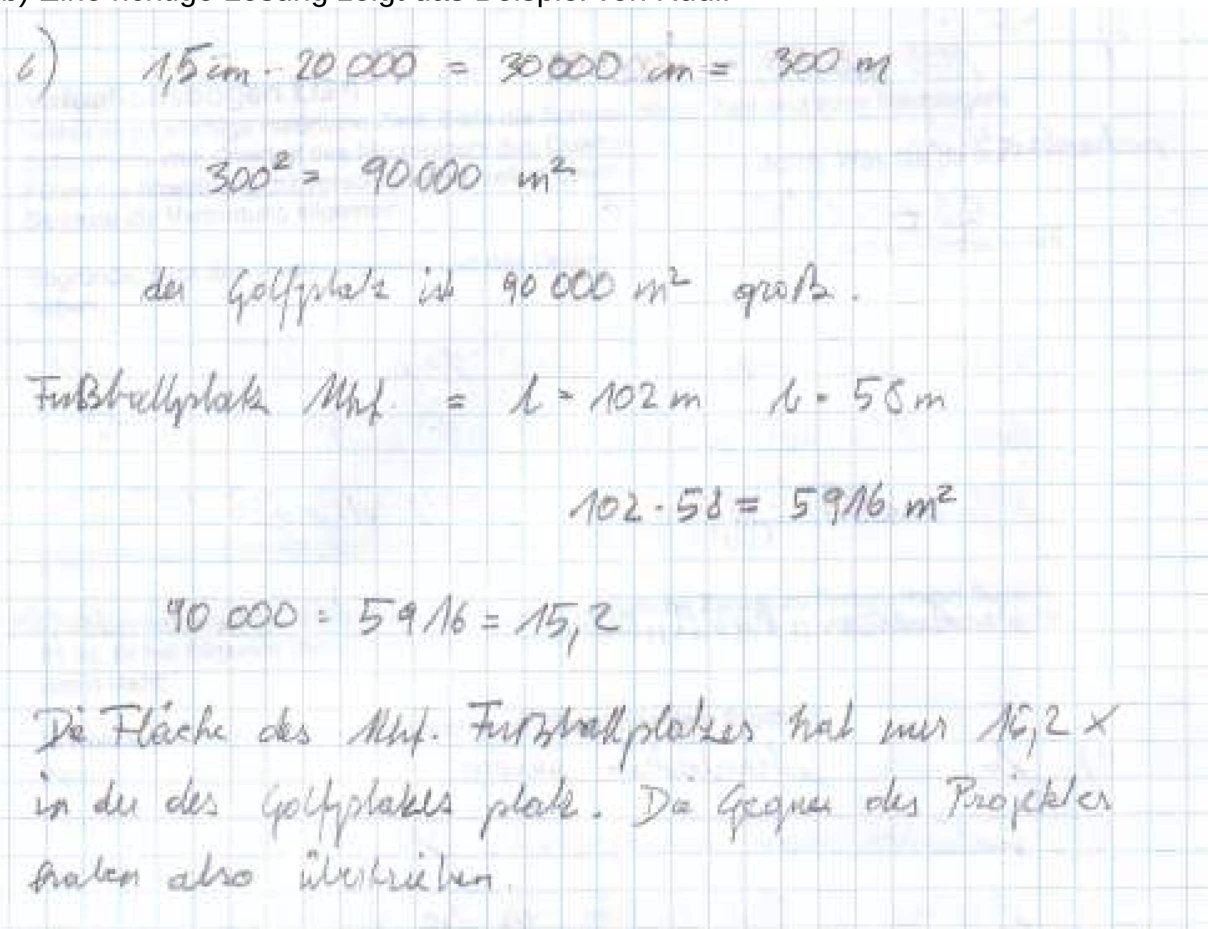
b) Die SchülerInnen mussten zwei mathematische Konzepte als Argumentationsbasis verwenden: wann sind Brüche gleich und wie können Brüche verglichen werden. Klaus formulierte: „Durch Kürzen bzw. Erweitern können alle Brüche auf den gleichen Nenner gebracht werden, die Zähler sind dann gleich.“

c) Zwei SchülerInnen markierten die falsche Zeile, begründeten ihre Auswahl aber nicht.

Aufgabe 6

a) „Teilweise richtig“ war eine Aufgabe, wenn die Lösungsschritte nachvollziehbar waren und eine richtige Antwort an Rechenfehlern bzw. Schätzfehlern scheiterte.

b) Eine richtige Lösung zeigt das Beispiel von Rudi:


b) 1,5 cm · 20 000 = 30 000 cm = 300 m

300^2 = 90 000 m^2

der Golfplatz ist 90 000 m^2 groß.

Fußballplatz Mhf. = l = 102 m b = 58 m

102 · 58 = 5916 m^2

90 000 : 5916 = 15,2

Die Fläche des Mhf. Fußballplatzes hat nur 15,2 × in der des Golfplatzes platz. Die Gegner des Projektes haben also übertrieben.

c) Die häufigsten Fehlerquellen waren, dass SchülerInnen keine Vorstellung von der Größe eines Fußballfeldes hatten bzw. auf die Berücksichtigung des Maßstabs vergaßen oder den von der Zeichnung berechneten Flächeninhalt mit Hilfe des Maßstabs verwandelten.

d) Diese Fehler wurden gemacht, obwohl einige Monate vorher bei der Gruppenarbeit zur Bestimmung der Fläche der Antarktis kein einziger Maßstabfehler passiert ist. Offensichtlich lösten während der Gruppenarbeit einzelne SchülerInnen dieses Problem ohne dass es den MitschülerInnen bewusst wurde (bei der Evaluation machten mehr als 50% Maßstabsfehler). Natürlich zeigt diese Fehlerhäufigkeit auch auf, dass das Thema Maßstab in der ersten und zweiten Klasse nicht nachhaltig behandelt wurde.

Aufgabe 7

a) Hier gab es nur richtige oder falsche bzw. gar keine Lösung.

b) Überraschend wie viele verschiedene Interpretationen von den SchülerInnen gefunden wurden. Die Interpretationen reichten vom Marathonlauf, über 100-m-Sprint, Radrennen, Zielsprint beim Radfahren, Zweikampf beim Fußballspiel und Stabhochsprung bis zum Snowboarden in einer Halfpipe. Die ausführlichen Argumentationen sind im Anhang 7.4.3 zu finden. Besonders exakt war die Interpretation von Sabrina:

Ich glaube dass dieser Graph zur Sportart SPRINTEN passt, denn man beschleunigt sein Tempo und dann läuft man kurze Zeit ganz schnell und sobald man über der Ziellinie ist bremst man ab und lauft sich langsam aus.

c) Falsch war bei den fünf SchülerInnen die Interpretation der y-Achse. Anstatt der Geschwindigkeit wurde sie von ihnen als Höhenangabe interpretiert. Kevin wechselt ständig zwischen Geschwindigkeit und Höhe:

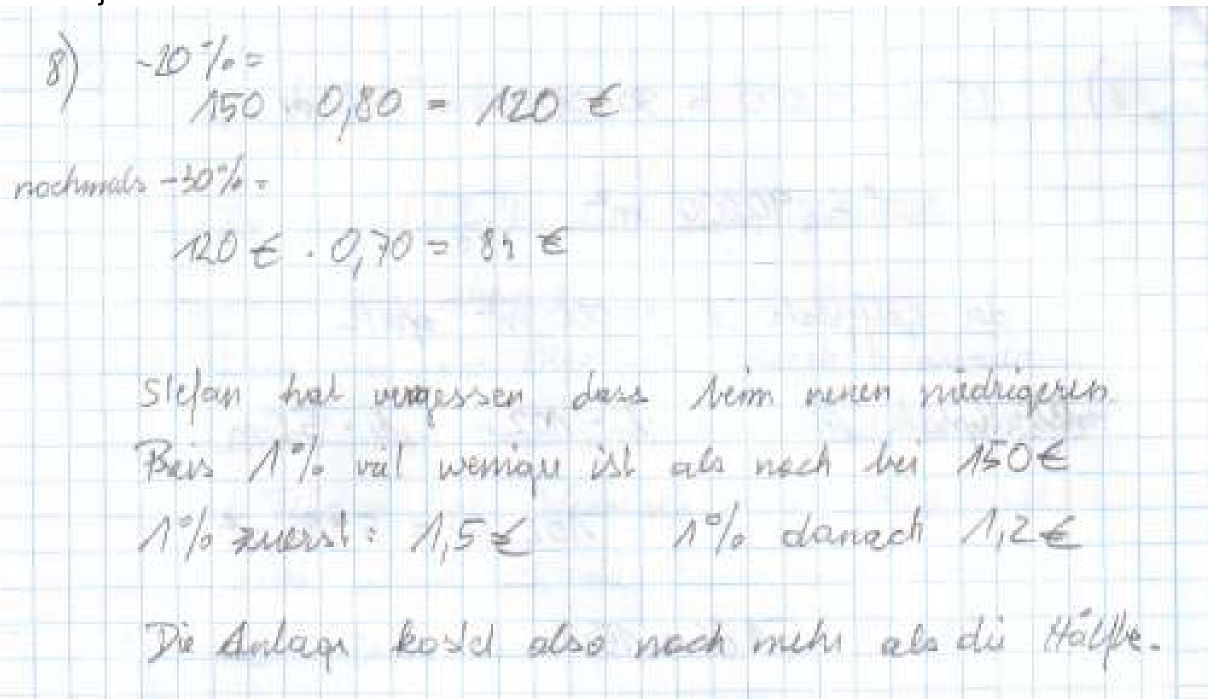
7) Zu diesem Bild passt ein Stabhochspringer. Er läuft vorher mit ein bis zwei weiten Sprüngen an und wird dann immer schneller bis er mit dem Stab sich vom Boden abstößt. Wo er nach oben steigt wird er sehr langsam und fällt dann natürlich wieder im freien Fall herunter auf die Matte. Er steht auf von der Matte und geht und lockert sich aus und geht anschließend zu seinem Platz wo er sich hinsetzt.

d) Diese Fehlinterpretation einer Achse kam auch im Unterricht immer wieder vor. Ich denke, dass dieser Fehler immer wieder passieren kann, da ich beobachtete, das einzelne SchülerInnen – einmal von einer fixen Idee überzeugt – die vorgegebenen „Tatsachen“ so hinbiegen, dass sie ihre Idee bestätigen.

Aufgabe 8

a) Auch bei diesem Beispiel gab es nur richtige oder falsche bzw. gar keine Lösungen. Ich wählte dieses Beispiel aus, da die Argumentation nur möglich war mit Hilfe der Grundvorstellung der Prozentrechnung über den Grundwert.

b) 13 SchülerInnen war klar, dass Stefans Überlegungen zur Werbeeinschaltung nicht stimmen konnten und begründeten dies auch richtig. Als Musterlösung stelle ich jene von Alex vor:



8) $-20\% =$
$150 \cdot 0{,}80 = 120$ €
nochmals $-30\% =$
120 € $\cdot\, 0{,}70 = 84$ €

Stefan hat vergessen dass beim neuen niedrigeren Preis 1% viel weniger ist als noch bei 150€
1% zuerst: 1,5 € 1% danach 1,2 €

Die Anlage kostet also noch mehr als die Hälfte.

c) Der Anteil der SchülerInnen, die Stefans Überlegungen als richtig empfanden war überraschend hoch. Dies, obwohl ich mich noch gut erinnern kann, dass wir sowohl in der 2. Klasse als auch am Beginn der 4. Klasse über diese Problematik im Unterricht diskutierten und die SchülerInnen auch einige Beispiele dazu gelöst haben.

Aufgabe 9

a) Wie schon im Unterricht (siehe Kapitel 5.4) wurden auch beim Evaluationsbogen kaum Fehler im Umgang mit der Interpretation statistischer Daten gemacht.

b) Die Lösungen von Veronika und Alexander stehen beispielhaft für die anderen Ergebnisse. Sie zeigen nicht nur, dass das mathematische Fachwissen reicht, um die verschiedenen Darstellungsarten zu interpretieren, sondern unterstreichen auch die „Lust“ der SchülerInnen zu beurteilen wer, warum und wie manipuliert.

Alexander:

9. Durch die Manipulation der Schaubilder kann jeder sein Interessen untermauern. Die Stadtregierung möchte sparen, also nehmen sie hohe Marke fürs die y-Achse. Dadurch scheint es als würde die Besucherzahl kaum steigen. Die Gegner nehmen ein „niedriges“ Mark, daher sieht es aus, als ob die Zahlen in die Höhe schießen würden

Veronika:

9) Für das erste Schaubild wurden bewusst die Abstände für die Jahre so ausgewählt, dass sie eng beieinander liegen! Für die Zahlen wurden große Abstände gewählt, damit das insgesamte Bild so aussieht, als ob es in kurzer Zeit eine gewaltige Steigerung gegeben hätte!
Beim zweiten Schaubild ist es umgekehrt: die Jahreszahlen wurden mit weiten Abständen versehen und die Zahlen der Besucher wurden eng aneinander gegeben! Somit ergibt sich das Bild mit fast gar keiner Steigerung!
> Den Schaubildern nach haben beide Recht! <
Man kann nämlich Schaubilder so manipulieren, wie man sie braucht!

6.3. Zusammenfassung

Wenn ich die Ergebnisse der Evaluationsbögen meinen Ausgangsüberlegungen zum Thema „Begründen und Argumentieren“ (Kapitel 2) gegenüber stelle, so stelle ich fest, dass die These von Malle („Begründen bzw. Beweisen ist auf jeder Schulstufe in intellektuell ehrlicher Form möglich und wünschenswert“) für die 4a-Klasse richtig ist.

Insgesamt habe ich 21 Unterrichtsstunden für die Durchführung der im Kapitel 5 beschriebenen Themen verwendet. Das Ergebnis bestätigt meine These, dass es möglich ist, den SchülerInnen Strategien zu vermitteln, wie man in Mathematik begründen und argumentieren kann und sie auch fähig sind, diese Argumente schriftlich darzustellen.

Mir ist aber auch klar, dass für dieses – meiner Meinung nach außerordentlich überzeugende – Ergebnis nicht nur die verwendeten 21 Unterrichtsstunden allein ausschlaggebend sind. Sehr wichtig waren wahrscheinlich die in Kapitel 3.1.1 beschriebenen Übungen zum „Schreiben über Mathematik“, die bereits seit der 3. Klassen kontinuierlich durchgeführt wurden und in deren Zusammenhang oft über die Bedeutung des Begründens und Argumentierens – auch in Mathematik – gesprochen wurde.

Nach meiner Erfahrung (bestätigt durch die Ergebnisse der Evaluation und der Beobachtungen während des Unterrichts) haben die SchülerInnen (besonders die nicht so leistungsstarken) Probleme bei innermathematischen Themen (Beweisen mit Hilfe einer Gleichung, Begründen mit Hilfe von Formeln). Viel weniger Schwierigkeiten haben sie bei der Anwendung ihres Mathematikwissens zum Begründen von außermathematischen Situationen bzw. beim Treffen von Entscheidungen mit Hilfe von mathematischen Konzepten oder Ideen (Beschreibende Statistik, Offene Aufgaben).

Besonders vielfältig und kreativ waren die Lösungen und Argumente bei den Themen „Interpretieren von Funktionsgraphen“ und „Interpretieren bzw. Erstellen von Schaubildern in der Beschreibenden Statistik“. Hier fiel mir auf, dass insbesondere auch die leistungsschwächeren SchülerInnen (2. und 3. Leistungsgruppe) teilweise hochmotiviert arbeiteten und auch sehr interessante und richtige Ergebnisse erzielten.

Abschließend möchte ich noch erwähnen, dass ich die Evaluationsbögen auch von den SchülerInnen der 4b und 4c Klasse bearbeiten ließ. Dass dies möglich war, verdanke ich der Kooperationsbereitschaft meiner KollegInnen, die die SchülerInnen in zwei ersten, einer zweiten und einer dritten Leistungsgruppe unterrichten. Aus organisatorischen Gründen nahm die 3. Leistungsgruppe nicht teil.

Die quantitative Auswertung, die ich nach den oben beschriebenen Kriterien vornahm, kann man im Anhang (Kapitel 7.4.4) nachlesen.

Diesem Vergleich möchte ich aber keinen besonders hohen Stellenwert einräumen, da die Durchführungsbedingungen sicher nicht ideal waren. Die Aufgaben wurden in der vorletzten Schulwoche (nach Notenschluss) gestellt, in den beiden ersten Leistungsgruppen noch dazu von SupplierlehrerInnen. Die Frage der Motivation bei den SchülerInnen dürfte sicher eine Rolle gespielt haben.

Trotzdem möchte ich einige auffallende Punkte zusammenfassen:

- Die SchülerInnen wussten bei den meisten Beispielen nicht, was sie tun sollten.
- Niemand verstand die Aufforderung bei Beispiel 1 („Beweise die Vermutung allgemein“).
- Bei Beispiel 6 (Golfplatz) und bei Beispiel 9 (Strandbad Klagenfurt) kam niemand auf die Idee, dass das etwas mit Mathematik zu tun haben könnte.

In persönlichen Gesprächen mit KollegInnen, die sich für meine Arbeit im Rahmen des PFL-Lehrgangs interessierten, ging es meist um das Thema „Welchen Stellenwert soll das Begründen und Argumentieren im Mathematikunterricht der Hauptschule haben". Der Großteil fand meinen Ansatz zwar interessant, befürchtete aber, dass dadurch zu viel Zeit für „die wichtigen Themen" vertan wurde, dass die SchülerInnen „sprachlich überfordert" wären bzw. dass „Diskutieren und Vermuten im Mathematikunterricht nichts verloren habe".
Ich möchte trotz allem die Evaluationsergebnisse nach den Ferien in einer Fachkonferenz präsentieren und hoffe, dass damit ein neuer Anlauf zu fachlichen Gesprächen zu diesem – meiner Meinung nach sehr wichtigen – Thema gemacht werden kann.