Reihe „Pädagogik und Fachdidaktik für LehrerInnen“

Herausgegeben von der
Abteilung „Schule und gesellschaftliches Lernen“

des Instituts für Interdisziplinäre Forschung und Fortbildung
der Universität Klagenfurt

Angelika Baumgartner

Polynomfunktionen – ein Vorkurs zur Analysis

PFL-Mathematik

IFF, Klagenfurt, 2002

Betreuung:
Werner Pescheck

Die Universitätslehrgänge „Pädagogik und Fachdidaktik für LehrerInnen“ (PFL) sind interdisziplinäre Lehrerfortbildungsprogramme der Abteilung „Schule und gesellschaftliches Lernen“ des IFF. Die Durchführung der Lehrgänge erfolgt mit Unterstützung des BMBWK.

Inhaltsverzeichnis

Abstract

Polynomfunktionen – ein Vorkurs zur Analysis

In der vorliegenden Arbeit geht es um die experimentelle Erforschung von Phänomenen der Polynomfunktionen von den SchülerInnen einer 4. Klasse Handelsakademie. In vier Unterrichtsstunden werden deren Eigenschaften an Hand ihrer Graphen untersucht und nach einem Zusammenhang mit ihrer Termdarstellung gesucht. In dem nachfolgenden Test wird der Wissensstand der SchülerInnen überprüft. Eine Fragebogenerhebung und zwei Gruppeninterviews informieren über Selbsteinschätzung der SchülerInnen, deren Gefühle bei der Arbeit und die Evaluation der Unterrichtseinheit. Möglichkeiten und Grenzen des Vorkurses werden dargestellt, kommentiert, interpretiert und bewertet. Schließlich werden Konsequenzen für die Zukunft aufgezeigt.

Angelika Baumgartner

Bundeshandelakademie und Bundeshandelsschule Althofen

A-9330 Althofen, Friesacherstrasse 4

e-mail: baumgartner.angelika@gmx.at

1. Ausgangssituation

1.1 Beschreibung der Ausgangssituation

In meiner 20-jährigen Erfahrung als Mathematiklehrerin an der Handelsakademie habe ich Polynomfunktionen (PF) an verschiedensten Stellen und in unterschiedlichem Umfang in meinem Unterricht behandelt. Das Resümee dieser Erfahrung ist, dass ich diese Funktionen sehr gerne unterrichte. Sie sind meines Erachtens nach leicht begreifbare, stetige, leicht differenzierbare und leicht integrierbare Funktionen, also in meinen Augen kein schwieriger mathematischer Stoff.
Sie kommen bei den SchülerInnen „gut" an, denn sie sind frei von Lücken und Polstellen, sie nähern sich keinen Asymptoten und haben keine nicht differenzierbaren Stellen. Die Definitionsmenge ist leicht zu bestimmen – mit einem Wort, sie verbergen keine mathematischen Tücken und Fallen für den Durchschnittsschüler. Die Unkompliziertheit dieser Funktionen ist wahrscheinlich mit ein Grund, warum diese auch den Absolventen nach der Matura in durchaus positiver Erinnerung bleiben.

Aus Gesprächen mit 2 ehemaligen SchülerInnen entnehme ich, dass sie die Polynomfunktionen in guter Erinnerung aus ihrem Mathematikunterricht haben. Exakte Definitionen sind den beiden zwar nicht geblieben, aber sie erinnern sich, dass PF verschiedenen Grades sein können, leicht zu differenzieren und integrieren sind, PF über Wendepunkte und Steigungen aufgesucht werden können und man dazu eine Bedingung mehr braucht als der Grad angibt. Als „Nachnutzung" werden Steigungen als Hilfsmittel für bewegliche Systeme in der Juristerei und das Aufsuchen von PF über Gleichungssysteme als Werkzeug gesehen, wie man an ein Problem herangeht; die Behandlung von PF wird als ein Beitrag zum analytischen Grundverständnis gesehen.

Ich weiß diese Funktionen als Lehrerin auch deshalb sehr zu schätzen, da sie eine große Vielfalt an Schularbeits- und Prüfungsfragen erlauben. SchülerInnen bearbeiten diese Aufgabenstellungen sehr bald eigenständig und haben dadurch viele, kleine Erfolgserlebnisse. Sie legen ihre Scheu und Angst ab und arbeiten und hantieren mit den PF. Sie sind nicht mehr so in aufwendige Rechenabläufe verstrickt, dass sie den roten Faden bei der Lösung des Problems verlieren.

Meinen Beobachtungen nach sind PF bei den SchülerInnen ein beliebtes Kapitel der Schulmathematik in der Handelsakademie.
Auf Grund dieser Tatsache geschieht noch etwas anderes in der Mathematikstunde: die SchülerInnen unterhalten sich über PF, einerseits untereinander, andrerseits mit der Lehrerin. PF fördern und entwickeln also die Kommunikation über die Mathematik. Dies ist für mich auch ein interessanter Aspekt, doch soll er nicht in dieser Arbeit untersucht werden.

Diese vielen angenehmen Eigenschaften der PF für Lernende und Lehrende stellen insgesamt einen großen Vorteil dar. Das Wissen des Lehrers um diesen Vorteil macht für mich den Mythos aus, der diese Funktionen umgibt und diese bei SchülerInnen, AbsolventInnen und LehrerInnen so beliebt macht.

Ich möchte als Lehrerin diesen Vorteil nützen und PF als Mittel einsetzen, um verschiedene Begriffe zu wiederholen; vor allem aber sollen die SchülerInnen Phänomene der PF an ihren Graphen untersuchen und dann beschreiben. Damit sollen Begriffe anschaulich vorbereitet werden, die in der Differential- und Integralrechnung von zentraler Bedeutung sind.

Im Lehrplan der Handelsakademie sind PF in der 2. Klasse erwähnt. In der 4. Klasse werden sie nicht explizit aufgezählt, aber im Rahmen der Analysis werden die Funktionsdiskussion, Extremwertaufgaben, die Integrationsregeln und die Kosten- und Preistheorie wohl kaum ohne die „gutmütigen“ Polynomfunktionen auskommen.
Da ich in der 2. Klasse meist nur lineare und quadratische Funktionen behandle, haben wir in den letzten 2 Jahren in der 4. Klasse vor der Analysis Funktionen im allgemeinen, sowie PF im speziellen wiederholt. Dabei habe ich mich stets bemüht, einerseits einige Grundbegriffe zu wiederholen und zu festigen, besonders aber jenes Wissen in den SchülerInnen zu entwickeln, das in weiterer Folge in der Analysis gebraucht wird.

1.2 Worum geht es eigentlich?

Durch den vorliegenden Vorkurs sollten die Definitionen der beobachteten Phänomene in der dann folgenden Differentialrechnung für die Lernenden verständlicher sein. Verständlicher deshalb, weil ich meine, dass die Zusammenhänge zwischen Funktionsgraphen und Funktionsvorschriften von den SchülerInnen reproduziert werden können, da die Bilder der PF im Gedächtnis frisch und präsent sind. Auch bin ich der Meinung, dass die mathematische Präzisierung der bereits in der Vorbereitung beobachteten Wahrnehmungen leichter verstanden werden wird.

In der Folge werde ich die Inhalte anführen, denen besondere Bedeutung im Rahmen meiner Untersuchung zukommt.
Zu den Wiederholungsbegriffen (WH 1, 2, 3), die zwar nicht der eigentliche Gegenstand meiner Untersuchung, aber doch von Bedeutung bei der Untersuchung der Funktionsgraphen von PF sind, gehören unter anderen die folgenden:

<u>WH 1: Was ist das überhaupt - eine PF?</u>
Die Begriffe „Funktion“ und „Polynom“ einschließlich der bereits bekannten linearen und quadratischen Funktionen aus der 2. Klasse werden wiederholt. Ich möchte auf 2 Arten der Darstellung einer Funktion konkret hinweisen: Zum einen die Termdarstellung, die übersichtlich, kurz und gut für Berechnungen zu brauchen ist. Man kann sich aber nicht sehr viel darunter vorstellen – sie ist zunächst abstrakt. Um diese Abstraktheit anschaulicher zu machen, gibt es die Möglichkeit eine Funktion graphisch darzustellen. Diese ist zwar wesentlich anschaulicher, hat aber den Nachteil, dass für Berechnungen die Termdarstellung durch das Aufstellen und Lösen eines Gleichungssystem erst herausgefunden werden muss.
Die folgende Frage erhebt sich daraus für mich:
Können Zusammenhänge zwischen der Termdarstellung einer PF (ihrem Grad = höchste vorkommende Potenz von x) und ihrem Verlauf in den Lernenden experimentell entwickelt werden?

WH 2: Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

Schnittpunkte mit der y-Achse (S_y) werden als die „Zahlen“ in der Termdarstellung in Erinnerung gerufen. Sie ergeben sich , wenn x = 0 gesetzt wird. Bei der Untersuchung von Kostenfunktionen ergeben sich aus S_y die fixen Kosten.

Schnittpunkte mit der x-Achse (Nst = N) werden durch y = 0-Setzen herausgefunden. Die Nullstellen von linearen und quadratischen PF wurden in der 2. Klasse bereits besprochen, ebenso die Unterschiedlichkeit von einfachen und doppelten Nullstellen. Es sollte hier nochmals auf einen weit verbreiteten Fehler bei Mathematik-Lernenden eingegangen werden: Gleichungen (wie sie sich bei der Nullstellenberechnung ergeben) können durch Äquivalenzumformungen vereinfacht werden, nicht so Funktionsvorschriften. Die Berechnung der Nullstellen von PF, deren Grad höher als 2 ist, führt auf Gleichungen 3. und höheren Grades. Möglichkeiten zu deren Lösung können aufgezeigt werden. Auf die Möglichkeit des Einsatzes der Excel-Zielwertsuche möchte ich extra hinweisen. Anwendungen sind in der Kosten- und Preistheorie zu erwarten, wo die Nullstellen von Gewinn- und Erlösfunktionen wirtschaftliche Bedeutung haben.

WH 3: Definitionsbereich

Wir wiederholen den Definitionsbereich (D) einer Funktion und worauf dabei zu achten ist. Weiters legen wir fest, dass der D einer Funktion (durch eine zusätzliche Angabe) dadurch eingeschränkt werden kann, sodass die Funktion in einem bestimmten Intervall für x gezeichnet und interpretiert wird. Durch Verändern dieser Einschränkungen kann der Bildschirmausschnitt sinnvoll gestaltet werden.

Die folgenden Begriffe stellen Inhalte dar, die als Vorbereitung für die Differential- und Integralrechnung sinnvoll erscheinen.

1. Das Monotonieverhalten und dessen Änderungspunkte

Zunächst erscheint es mir wichtig, den mathematischen Begriff „monoton“ vom umgangssprachlichen abzugrenzen. Die Beschreibung des Auf- und Abwärtstrends einer Funktion auf Grund seines Graphs ist den meisten Lernenden leicht möglich. Ich bin auch der Meinung, dass die Unterscheidung von absoluten und relativen Extremstellen an Hand des Graphs gut erklärbar ist. Es können die relativen Hochpunkte („Berggipfel“) und die relativen Tiefpunkte („Talsohlen“), also die Änderungspunkte des Monotonieverhaltens, einerseits aus dem Graphen abgelesen werden, andrerseits mit Hilfe des Excel- Solvers bestimmt werden. Durch wiederholte Beschreibung von Funktionsgraphen ausgewählter PF sollte es den SchülerInnen möglich sein, eine Vermutung über den Zusammenhang zwischen der maximalen Anzahl der Extremstellen und dem Grad der PF herauszufinden. Die Bereiche eines konstanten Monotonieverhaltens sollen durch Intervalle angegeben werden. Es soll auch ersichtlich sein, dass die Anzahl der Änderungen des Monotonieverhaltens ungleich der Anzahl der Bereiche eines konstanten Monotonieverhaltens ist.

Basierend auf diesem Wissen sollte Einführung und Definition der 1. Ableitung und ihrer Bedeutung für die Funktionsdiskussion als wesentlich leichter empfunden werden als ohne dieses Vorwissen.

2. Das Krümmungsverhalten und dessen Änderungspunkte

Die Vorstellung, mit einem Auto dem Funktionsgraphen entlang zufahren und dies mit Rücksicht auf die "mathematische Vorgangsweise“ (von links nach rechts fortschreitend), ist ein probates Hilfsmittel für die Entscheidung, ob nach links oder

nach rechts eingeschlagen werden muss. Bereiche des Linkseinschlags daher als linksgekrümmt, Bereiche des Rechtseinschlags als rechtsgekrümmt zu bezeichnen, ist nun selbstverständlich. Die Krümmung der Kurve in Hochpunkten als stets rechtsgekrümmt, in Tiefpunkten als stets linksgekrümmt zu erkennen ist auch ein Anliegen meiner Untersuchung. Die Änderungsstellen des Krümmungsverhaltens sollen aus dem Graphen ungefähr abgelesen werden. Manchmal wird es notwendig sein, den Bildausschnitt zu verändern, um diese Ablesungen durchführen zu können. Mit diesem Hintergrundwissen über die Krümmung einer Funktion und deren visueller Vorstellung sollte die Einführung der 2. Ableitung in der Differentialrechnung für die Lernenden verständlicher und daher leichter sein als ohne dieses. Auch hier sollen die SchülerInnen als mathematisches Muster erkennen: die maximale Anzahl der Änderungspunkte des Krümmungsverhaltens = Grad der Funktion minus 2.
Vorbereitet wird damit auch das leichtere Verstehen und Erkennen von progressivem und degressivem Anwachsen von Kostenfunktionen, die Interpretation der Kostenkehre und die Absatzelastizität.

1.3 Forschungsfrage

Kann durch die vorliegende Unterrichtseinheit in der 4. Klasse für die Analysis wesentliches Grundwissen über die oben angeführten Prä-Analysis-Inhalte (1 und 2) und den Begriff WH 2 (Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen) entwickelt werden?

Welche der oben aufgelisteten Punkte können intuitiv erkannt und in einem zufriedenstellenden Ausmaß verstanden werden? Können diese Begriffe in einem solchen Ausmaß erfasst werden, das deren Behandlung in der Analysis zu erleichtern verspricht? Wird das anschaulich erworbene Wissen beispielsweise verwendet werden können, um Wendepunkt und Wendetangente zu verstehen und nicht nur in einem Reiz-Reaktions-Mechanismus nach einem Schema-F zu bestimmen? Wie viel Hilfe könnte in dem anschaulich erworbenen Wissen für spätere konkrete Definitionen der Differentialrechnung stecken?

In der Unterrichtseinheit sollen die SchülerInnen durch einen experimentellen Zugang zum Kapitel PF ermuntert und angeregt werden, den Verlauf von PF zu studieren und Zusammenhänge zwischen der Termdarstellung und der graphischen Darstellung empirisch zu erfassen. Durch einen anschließend durchgeführten Test soll der Lernerfolg festgestellt werden.
Neben der Vermittlung von empirischem Wissen sollen möglichst viele „Aha-Erlebnisse“ in den SchülerInnen erzeugt werden und so (eigentlich als Nebeneffekt) Angst und Scheu vor Mathematik überwunden werden.

2. Arbeitsphase

2.1 Beschreibung

15. November 2001 (Doppelstunde)
Als Vorübung findet unter Zuhilfenahme von Excel FREIES EXPERIMENTIEREN mit PF 1. bis 4. Grades statt.
Excel ist den SchülerInnen der HAK aus dem Informatikunterricht der 2. Klasse bekannt. Das Werkzeug zur graphischen Darstellung von PF, der Diagramm-Assistent, wird erläutert und auf einige Besonderheiten, die für den Mathematikunterricht wichtig sind (zB: Diagrammtyp: Punkt xy, Gitternetzlinien, Veränderung des Maßstabs auf den Achsen und ähnliche), hingewiesen. Das Formatieren der gezeichneten Graphen wird kurz besprochen.
In der Klasse, in der der Vorkurs stattfindet, sind 26 SchülerInnen, die paarweise (in selbstgewählter Zusammensetzung) an einem Computer arbeiten. Das Arbeitsprogramm besteht in der Darstellung beliebiger Funktionsgraphen von PF 1. – 4. Grades, wobei die Koeffizienten durch Konstruktion eines Schiebereglers in Excel variiert werden und im Herausfinden ihrer mathematischen Eigenschaften. Dann werden die Nullstellen mit der Zielwertsuche ermittelt und im Graphen kontrolliert. Der Unterschied zwischen einfachen und Doppelnullstellen wird erläutert. „Bergspitzen“ und „Talsohlen“ (wie die relativen Extremwerte zunächst bezeichnet werden) werden über den Einsatz des Excel-Solvers bestimmt.

22. November 2001 (Doppelstunde)
Die Arbeit erfolgt in Zweiergruppen im DV-Saal mit 14 einsatzfähigen Computern unter Inanspruchnahme von Excel (zur Zeit einziges verfügbares Programm für Mathematik), wobei die Partnerwahl den SchülerInnen überlassen wird. Nur bei 2 sehr homogenen (jeweils 2 sehr gute bzw. sehr schlechte SchülerInnen) Paaren empfehle ich eine polare Aufteilung, die auch ohne Probleme angenommen wird. Ein (guter) Schüler arbeitet alleine; durch die räumliche Nähe und die dadurch mögliche Kommunikation zu seinem Freund ist das kein Problem.

Jede(r) SchülerIn erhält das Arbeitsprogramm mit Informationen und Arbeitsaufträgen für die nächsten 2 Stunden darstellt.
Am Beginn der 1. Stunde werden die Eigenschaften von PF genau und die Aufträge vom Arbeitsblatt 1 besprochen. Die Graphen der Funktionen y1, y3, y5 und y7 sind in Excel zu zeichnen und danach die Tabellen am Arbeitsblatt 1 und 2 auszufüllen bzw. Kurzantworten einzutragen. Für verschiedene Eintragungen (wie Nullstellen) sollten die Zielwertsuche, für andere (wie relative Extremwerte) der Solver eingesetzt werden. Die Funktionen y2, y4, y6 und y8 sind freiwillige Übungsaufgaben im Hinblick auf Test und Schularbeit.
Die Vermutungen am Ende vom Arbeitsblatt 1 und 2 sollten nach Auseinandersetzung mit den PF zu Hause eingetragen werden.
Arbeitsblatt 3 und 4 sind die Hausübung.
Eine weitere Empfehlung an die SchülerInnen ist, in den Schulstunden möglichst viel zu erarbeiten, um den Aufwand zu Hause so gering wie möglich zu halten.

Das Arbeitsprogramm im Anhang A1 wird an jede(n) SchülerIn ausgeteilt.

2.2 Beobachtungen während der Arbeitsphase

Um von der Arbeitshaltung, der Art des Problemlösens und schließlich vom Ergebnis der Arbeit der SchülerInnen möglichst viel einzufangen, habe ich meine Fachkollegin an der Schule gebeten, mich dabei zu unterstützen und gemeinsam sind wir zu folgenden Ergebnissen gekommen.

Besonders auffallende Beobachtungen:

- Alle waren intensiv und konzentriert bei der Sache. Jeder war interessiert und wollte die Bearbeitung der Arbeitsaufträge weitestgehend erfüllen.
- Allen SchülerInnen war die Aufgabenstellung klar, bei einigen zeigten sich fachliche und technische Probleme.
- Niemand beschäftigte sich mit anderen Inhalten.
- Es gab fachliche Kommunikation innerhalb der Zweierteams, zwischen den Teams und mit den Lehrerinnen.

Für meine Kollegin besonders auffallend war das unterschiedliche Arbeitstempo und die unterschiedlichen Fertigkeiten im Umgang mit Excel der einzelnen Arbeitspaare. Für mich war diese Beobachtung nicht so überraschend, da ich vom unterschiedlichen mathematischen Wissensstand dieser Klasse weiß.
Für mich war eine interessante Beobachtung, dass wirklich alle SchülerInnen konzentriert und mit Interesse gearbeitet haben.

Beobachtungen am Rande:

- Jasmin und Bernadette schauen im Schulübungsheft nach
- Viele drucken sich die Kurven aus, weil sie leichter am Papier nachschauen als am Bildschirm
- Martina und Barbara haben technische Probleme (Zielwertsuche und Solver) und erhalten von mir die erforderlichen Erklärungen
- Andreas: „Sind die verschiedenen Anzahlen des Krümmungsverhaltens gleich der Anzahl, wie oft sich das Krümmungsverhalten ändert?“
- Arnulf und Hartmut entdecken unabhängig voneinander einen Fehler von mir beim Graphenpuzzle (Punkt e)
- Rat an Hartmut und Christiane: um genaue Angaben über Änderungspunkte zu machen, muss der Bildschirmausschnitt verändert werden.
- Die Partnerzusammensetzung erweist sich bei Christian und Wilfried als sehr gut: Wilfried ist der Ideenlieferant und Christian der genaue, exakte Arbeiter.
- Arbeitstempo ist sehr unterschiedlich und wird von den Teams selbst bestimmt. Einige sind am Ende der Doppelstunde mit allen Funktionen vom AB 1 + 2 und Arbeitsblatt 3 fertig, einige (6 Mädchen) haben erst mit dem AB 2 begonnen.
- Melanie und Doris kennen sich besonders schlecht aus und halten oft bei den anderen Nachschau
- Viele nützen die Gelegenheit, ihre Unklarheiten durch ein Gespräch mit mir zu beseitigen

Persönliche Beobachtungen und Kommentar:

- Ich persönlich hatte ein sehr gutes Gefühl während der Doppelstunde.
- Auf Grund des Einsatzes und des Interesses der SchülerInnen glaube ich, dass das Arbeitsprogramm passend zusammengestellt war. Damit gab es in mir ein Gefühl der Erleichterung.
- Den auffallenden Arbeitseinsatz der SchülerInnen führe ich auch auf deren Neugierde zurück.
- Durch die Ausgabe des Arbeitsprogramms konnte jeder sein Arbeitstempo selbst bestimmen: also waren die besseren SchülerInnen schneller, die schwächeren langsamer. Dadurch gab es bei den Besseren keine Langeweile.
- Meine Rolle war eine Doppelrolle: einerseits war ich der „coach" für die auftretenden Probleme und andrerseits schlüpfte ich in die Rolle des Beobachters. Meine Hilfestellungen gab ich in Form von Einzelgesprächen (mit 1 oder 2 SchülerInnen), die meiner Meinung nach sehr klärend wirkten. Die Rolle des Beobachters fand ich sehr spannend, da ich im „normalen" Unterrichtsgeschehen dafür eigentlich keine Zeit habe.

3. Kontrollphase

3.1 Ablauf

<u>*29. November 2001 (Doppelstunde):*</u>

Die Unterrichtseinheit findet in der Klasse statt. Einer der Gründe dafür ist die Tatsache, dass der DV-Saal meistens durch den Unterricht in den kommerziellen Gegenständen belegt ist und die „Mathematikstunde am Computer" nur durch einen Stundentausch möglich ist. Ein weiteres organisatorisches Problem ergibt sich daraus, dass der Test im DV-Saal nur in Partnerarbeit geschrieben hätte werden können. Ich wollte aber über den Wissensstand des einzelnen Bescheid wissen. Es war mir jedoch bewusst, dass die Prüfungssituation jetzt eine andere als in den letzten 2 Doppelstunden war. Um dieser unterschiedlichen Situation gerecht zu werden, versuchte ich den Test unter Einbeziehung von Excel-Graphiken dem Bildschirmausschnitt anzunähern.

Zuerst werden die Ergebnisse der Arbeitsaufträge, die Hausübung und damit verbundene Unklarheiten besprochen.
Die am häufigsten auftretende Unklarheit: die Änderungspunkte des Monotonieverhaltens werden auch für die Änderungspunkte des Krümmungsverhaltens aufgefasst. Ich versuche ausführlich, diesen Fehler zu klären und die Unterschiede der Änderungspunkte durch Interpretieren an den Funktionsgraphen darzulegen.

Im Anschluss daran wird ein Test über PF (Gruppe A, B) ausgeteilt, den jeder Schüler in 30 Minuten einzeln zu bearbeiten hatte.
Die Note des Tests ist Teil der Mitarbeitsnote.

Test (A, B): siehe Anhang A2

3.2 Ergebnisse des Tests

Sehr Gut	4
Gut	4
Befriedigend	10
Genügend	5
Nicht Genügend	3

Durchschnittlich erreichte Punktezahl: 14,27 Punkte.
Die beste Arbeit erreichte 23 Punkte, die schlechteste 3 Punkte.
Die Maximalzahl von 26 Punkten erreichte niemand und wurde auch von mir nicht erwartet. Leistungen mit mehr als 21 Punkten erschienen mir reif für ein „Sehr gut". 50% davon, also 10,5 Punkte, wären für mich das untere Limit für ein „Genügend". Da ich keine halben Punkte verwendete, legte ich als untere Grenze für „Genügend" 10 Punkte fest.

Folgendes Notenschema war die Grundlage der Beurteilung:

0-9 Punkte	10-12 Punkte	13-16 Punkte	17-20 Punkte	21-26 Punkte
Nicht genügend	Genügend	Befriedigend	Gut	Sehr gut

Beispiel 1:
Für die 2 Teile a und b gab es je 5 Punkte. Für die Skizze und für die 4 Fragen gab es je 1 Punkt
Von 10 möglichen wurden durchschnittlich pro SchülerIn 6,42 Punkte (64,2%) erreicht.
Beispiel 2:
Für die 2 Teile a und b wurden je 6 Punkte vergeben. Für die Feststellung des Grades und das Ablesen der Nullstellen wurde je 1 Punkt vergeben, für die Angabe von Hoch- und Tiefpunkt 2 Punkte, für die Beschreibung des Krümmungsverhaltens und die Angabe des(r) Änderungspunkte(s) auch 2 Punkte.
Von 12 möglichen wurden durchschnittlich pro SchülerIn 6,76 Punkte (56,3%) erreicht.
Beispiel 3:
Für das Herausfinden der Funktionsgleichung erreichte man 2 Punkte, die Angabe der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen war 1 Punkt und einer Besonderheit war ebenfalls 1 Punkt wert.
Von 4 möglichen wurden durchschnittlich pro SchülerIn 1,08 Punkte (27%) erreicht.

Für mich ergeben sich folgende **Überlegungen** zu den Ergebnissen dieses Tests:
Die Testergebnisse stellen im Vergleich zu den Mathematiknoten dieser Klasse ein gutes und für Lehrerin und SchülerInnen zufriedenstellendes Ergebnis dar. Von den nicht genügenden Arbeiten gab es eine mit 3 Punkten, die beiden anderen erreichten mit 8 und 9 Punkten die Nähe des Genügend.

Das erste Beispiel hat am besten abgeschnitten. Der Verlauf der Graphen war zwar händisch zu skizzieren, doch da es PF vom Grad 1 und 2 waren, bereitete dies den meisten SchülerInnen keine Probleme.

Beobachtete Fehler:

- die Nullstellen wurden mit vertauschten Koordinaten angegeben
- S_y wurde auf Grund ungenauen Arbeitens für den Tiefpunkt der Funktion gehalten

Erwartungsgemäß gut hat das zweite Beispiel abgeschnitten.
Grund: die abgeprüften Inhalte waren den vorausgegangenen Übungen sehr ähnlich.
Beobachtete Fehler:

- die Änderungspunkte des Monotonieverhaltens wurden auch als Änderungspunkte des Krümmungsverhaltens angesehen, obwohl es kurz vorher eine genaue Erklärung von mir gegeben hat.
- Schwierigkeiten beim Erkennen der x- und y- Achse
- Bei Angaben über das Krümmungsverhaltens werden nur einzelne Kurvenpunkte angegeben, die Intervallschreibweise wird selten verwendet.

Das schlechte Abschneiden des dritten Beispiels (niemand hat mehr als 2 Punkte) ist meiner Meinung nach darauf zurückzuführen, dass ich mit dem Problem des Herausfindens der Funktionsgleichung gute SchülerInnen zum Vernetzen ihres Wissens von PF herausfordern wollte. Einige „Gute" haben sich auch sehr intensiv damit auseinandergesetzt.
Die nächste Frage nach den Schnittpunkten mit den Achsen ist von der ersten Frage unabhängig und ist wesentlich leichter zu beantworten.
Die Frage nach der „Besonderheit" wurde von vielen gar nicht beantwortet, vielleicht weil es die letzte Frage war.
Als Besonderheit hätte gegolten:
Doppelnullstelle, x-Achse = Tangente, Nullstelle = Hochpunkt (bzw. Tiefpunkt)
Anmerkung:
Die Fragen zum Beispiel 3 in anderer Reihenfolge zu stellen erscheint mir im Nachhinein günstiger, weil viele SchülerInnen sich gar nicht an die 2. und 3. Frage heranwagten, wenn sie die 1. Frage nicht beantworten konnten oder sie hatten sich zu lange mit der 1. Frage beschäftigt, dass einfach keine Zeit für die 2. und 3. Frage mehr zur Verfügung war.

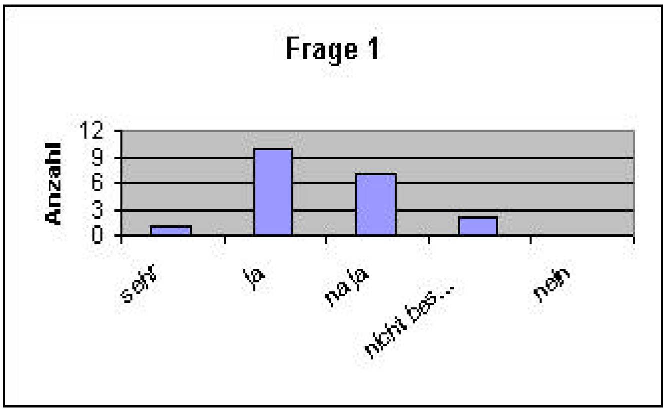
4. Fragebogenerhebung

Die Fragebogenerhebung wurde Mitte Dezember 2001, also ca. 3 Wochen nach der Arbeitsphase mittels des Fragebogens im Anhang 3 durchgeführt.
Eine Befragung der SchülerInnen mittels Fragebogen wählte ich, weil mich über die Forschungsfrage hinaus die Selbsteinschätzung der Lernenden und deren subjektive Gefühle über die Unterrichtseinheiten mit den PF interessierten. Von Interesse war auch die Meinung der SchülerInnen, in wie weit Wissen über die PF entwickelt worden ist.

4.1 Auswertung der Fragebogenerhebung

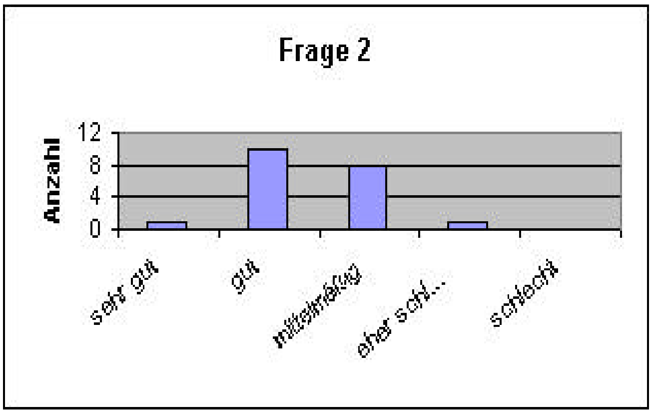
Frage 1
Hast du das Arbeiten mit Polynomfunktionen interessant gefunden?

sehr	1
ja	10
na ja	7
nicht besonders	2
nein	0



Frage 2
Die Erklärungen zu den Polynomfunktionen waren meiner Meinung nach:

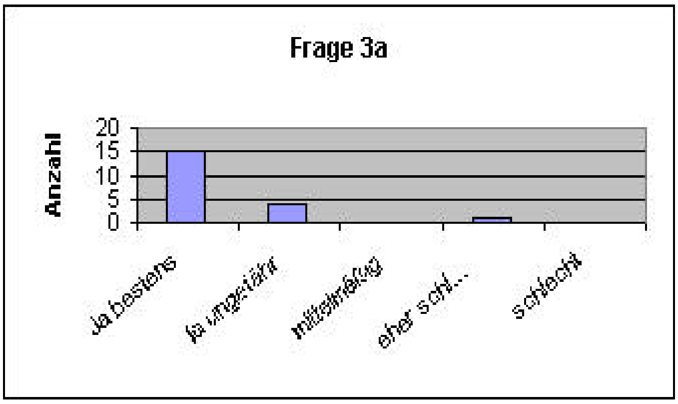
sehr gut	1
gut	10
mittelmäßig	8
eher schlecht	1
schlecht	0



Frage 3
Meine Einschätzung meiner jetzigen Kenntnisse über einige Eigenschaften der Polynomfunktionen:

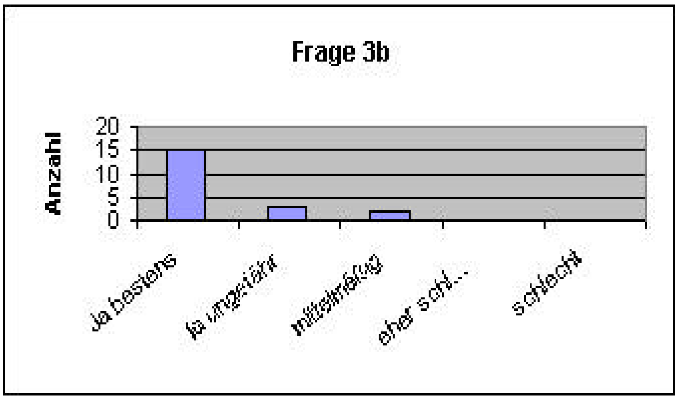
a) Definitionsbereich

Ja bestens	15
ja ungefähr	4
mittelmäßig	0
eher schlecht	1
schlecht	0



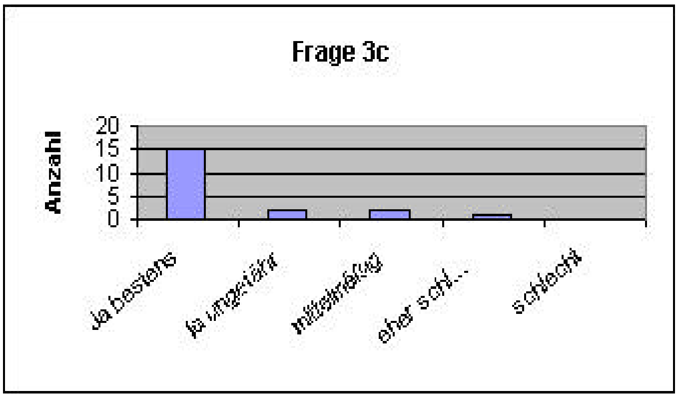
b) Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

Ja bestens	15
ja ungefähr	3
mittelmäßig	2
eher schlecht	0
schlecht	0



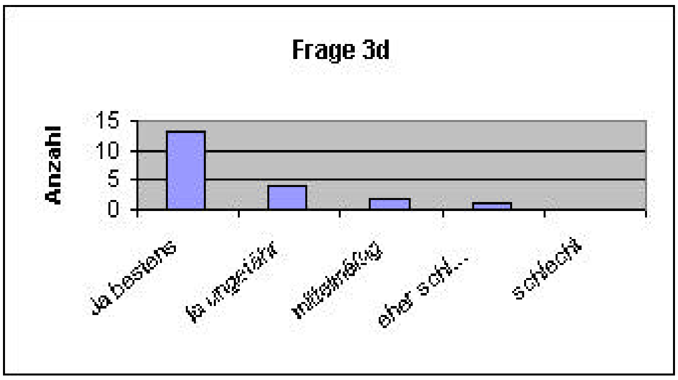
c) Beschreibung des Monotonieverhaltens

Ja bestens	15
ja ungefähr	2
mittelmäßig	2
eher schlecht	1
schlecht	0



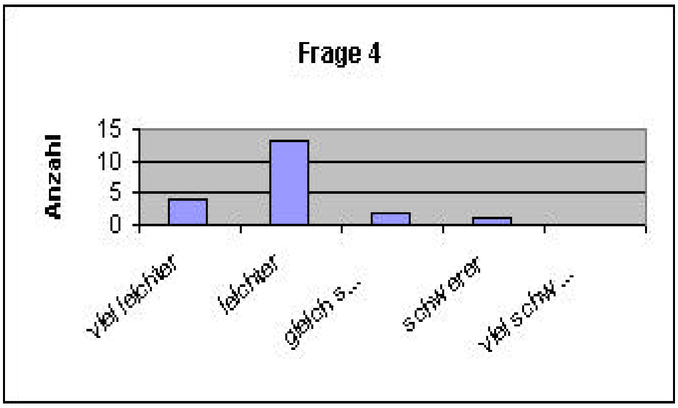
d) Beschreibung des Krümmungsverhaltens

Ja bestens	13
ja ungefähr	4
mittelmäßig	2
eher schlecht	1
schlecht	0



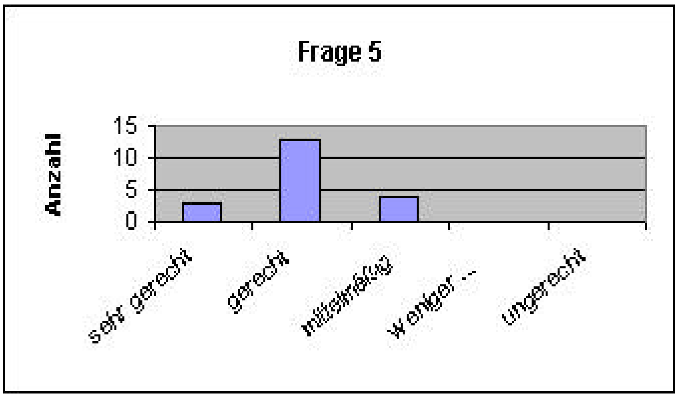
Frage 4
Die Polynomfunktionen sind mir leichter / schwerer als andere Kapitel in der Mathematik gefallen:

viel leichter	4
leichter	13
gleich schwer	2
schwerer	1
viel schwerer	0



Frage 5
Meine Kenntnisse über Polynomfunktionen wurden von meiner Mathematiklehrerin beurteilt:

sehr gerecht	3
gerecht	13
mittelmäßig	4
weniger gerecht	0
ungerecht	0



4.2 Kommentar und Interpretation

Die Beantwortung der Fragen 1 und 2 hat mich als Lehrerin zufrieden mit dem Ablauf der Untersuchung gemacht. Wenn SchülerInnen das Arbeiten in Mathematik zum überwiegenden Teil interessant finden, dann habe ich „Verbindungen zwischen SchülerInnen und Polynomfunktionen" knüpfen können. Die meisten finden auch, dass meine Erklärungen gut bis mittelmäßig waren, schlecht werde ich von niemandem beurteilt.
So wie die SchülerInnen das eigene Können (Frage 3) einschätzen, hätte es bei dem Test fast nur Sehr gut und Gut geben dürfen, denn die überwiegende Mehrheit (eigentlich fast alle) kennt sich (nach eigener Einschätzung) bestens und ungefähr aus. Entweder haben sich viele überschätzt oder die Auswahl der Antwortmöglichkeiten war zu wenig exakt von mir vorgegeben. Vor allem erscheint mir die Wahlantwort „ja ungefähr" zu vage und zu undeutlich. Es kann auch eine Diskrepanz der SchülerInnen - Auffassung und meiner Auffassung der Wahlantwort „ja ungefähr" vorliegen.

Bei den Antworten zur Beschreibung des Krümmungsverhaltens hätte ein deutlicher Unterschied zum Monotonieverhalten auftreten müssen, wenn man den Wissensstand der SchülerInnen bei den Tests als Vergleich heranzieht. Danach nämlich hat es vor allem bei der Beschreibung der Krümmung große Mängel gegeben.
Dem Großteil der Klasse ist die Behandlung der PF leichter als anderes in der Mathematik gefallen – resultiert aus der Beantwortung der Frage 4. Die Ursachen dafür können sein:

- die Unkompliziertheit der PF
- die eingehende Behandlung
- der etwas andere Zugang zu dem Thema – das Experimentieren
- mehr Freude durch den Einsatz des Computers.

Nach der Beantwortung von Frage 5 fühlen sich die meisten in dieser Klasse von mir gerecht beurteilt. Das ist für mich sehr zufriedenstellend, trotzdem sehe ich einen Widerspruch: Die Selbsteinschätzung über den Wissensstand ist laut Frage 3 sehr hoch, die Testnoten spiegeln diesen Sachverhalt nicht ganz wider (wenn auch das Testergebnis für die Klasse sehr schön ist) und trotz dieses Widerspruchs wird die Benotung generell als gerecht empfunden.

5. Schülerinterviews

5.1 Ankerfragen und Präzisionsfragen

1. Ankerfrage - Einstieg
Hat dir die Unterrichtseinheit über die Polynomfunktionen Spaß gemacht oder nicht?

Präzisionsfragen:

- Gründe dafür und dagegen
- Beschäftigung lieber als mit anderen Themen der Mathematik
- War der Unterricht anders als sonst?
- Hast du dir vom Experimentieren mit den Funktionen mehr gemerkt als von einem Lehrervortrag oder ist es umgekehrt?

2. Ankerfrage - Hauptfrage
Welche Eigenschaften der Polynomfunktionen waren für dich am ehesten verständlich – was war am ehesten unklar?

Präzisionsfragen:

- Warum verständlich - warum unklar?
- Was hätte deiner Meinung nach zum Verständnis noch beitragen können?

3. Ankerfrage – Schluss vom 4. Grad auf 5. Grad
Stichwort: Gegeben ist eine Polynomfunktion vom Grad 5.
Was fällt dir dazu ein?

Präzisionsfragen:

- Funktionsvorschrift
- Nullstellen / S_y
- Hoch- und Tiefpunkte im Zusammenhang mit der Monotonie
- Links-Rechtskurve / Änderungspunkte
- Stetige Funktion

5.2 Forschungsziel der Interviews

Ist es mir gelungen durch das Experimentieren mit Polynomfunktionen in meinen SchülerInnen ausreichend mathematisches Wissen über diese Funktionen zu erzeugen?
Durch die Forschungsfragen wollte ich differenzierter wissen, wie es den SchülerInnen ergangen ist, um daraus zu Hinweisen für ein nächstes Mal zu gelangen. Durch die Antworten der SchülerInnen wollte ich Zusatzinformationen für eine Optimierung dieses Unterrichtsmodells bekommen.

5.3 Zur Durchführung der Interviews

Es wurden 2 Gruppeninterviews mit je 3 SchülerInnen durchgeführt.
Gruppeninterviews wählte ich deshalb, weil ich durch die Anwesenheit von mehreren Gesprächspartnern eine ungezwungenere Atmosphäre schaffen wollte. Ein Ein-Schüler-Lehrer Interview scheint mir oft einer Prüfungssituation ähnlich. Außerdem interessierte mich die Kommunikation innerhalb der SchülerInnen Gruppe.

Meine Interviewpartner waren nur zögerlich bereit, einige haben dies überhaupt abgelehnt.

Die Interviews fanden in der Unterrichtszeit (letzte Stunde vor Weihnachten) statt. Die Interviewpartner des 2. Interviews wurden gebeten während des 1. Interviews in den Pausenraum zu gehen.

Die Interviews wurden mit einem Diktiergerät aufgenommen, um ihre Dokumentation zu ermöglichen.

Gruppe 1:

Wilfried (W) : leistungsmäßig mittelmäßiger Schüler, versteht sehr schnell, ist leicht zu motivieren, steht dem Experimentieren mit PF sehr positiv gegenüber, freut sich sehr, mein Interviewpartner zu sein

Corina (C): außerordentlich schwache Schülerin, bei der auch der erforderliche Einsatz fehlt, erforderliche Vorkenntnisse nur äußerst mangelhaft vorhanden

Michael (M): erlebt heuer einen „Aufschwung", hat in diesem Schuljahr viel Freude und Einsatz in der Schule und freut sich über Lob und gute Noten, arbeitet viel lieber mit Papier und Bleistift als am Computer

Gruppe 2:

Harald (H): nach 2 „mathematikschwachen" Jahren ist er heuer mit viel Engagement bei der Sache und lässt seine Umgebung seine Begeisterung spüren, sehr extrovertiert und voll Initiativen

Andreas (A): Repetent (nicht Mathematik), durch außerschulische Tätigkeiten viel abwesend, seine positive Einstellung zu unseren Mathematikstunden deutlich spürbar, arbeitet geschickt und gerne mit Excel

Iris (I): sehr gute und fleißige Schülerin, konstante gute Leistungen

5.4 Ergebnisse der Interviews

Zur 1. Ankerfrage

Wenn man von Michaels „Computerunlust" (*Das hass ich echt!*) und Corinas „Mathematikunlust" (*Exponentialfunktionen und Polynomfunktionen – das ist ein rotes Tuch!*) absieht, ist es für die SchülerInnen interessant gewesen und hat ihnen Spaß gemacht. Für Harald war es sogar super (3mal in einem Statement). Für Andreas war es anders als normaler Unterricht – gemeint hat er wohl das Experimentieren mit „Excel". Und bekanntlich kommt ja jeder Unterricht, der anders als der Normalfall abläuft, bei SchülerInnen gut an und erzeugt längere Konzentrationsphasen. Bis auf Corina sind alle der Meinung, dass sie sich mehr mathematisches Wissen als sonst mitgenommen haben, auch Michael. Iris bringt klar zum Ausdruck, dass der Stoff leichter war, sich alle mehr angestrengt haben als sonst, weil selber gearbeitet werden musste und nicht nur von mir präsentiert worden ist (*Arbeit am PC geht leichter in den Kopf hinein!*). Dieses „Selber-Erarbeiten" begünstigt meiner Meinung nach das bessere und längere Behalten von mathematischen Inhalten. Ein wesentlicher Aspekt ist, dass der Computer mit „Excel" für die meisten ein Motivationsfaktor war. Als negative Aspekte werden die Zeitknappheit und die Wahl des Zeitpunkts für die Unterrichtseinheit genannt. Meine Interviewpartner sind der Meinung, dass dieses Thema noch ausführlicher erörtert hätte werden sollen, und nicht nur als kurzer Lehrgang, so wie es von mir gedacht war.
Andreas wünscht sich den gesamten Mathematikunterricht am Computer.

Zur 2. Ankerfrage

Am unklarsten sind noch immer die Änderungspunkte des Krümmungsverhaltens. Michael meint, dass es sehr leicht ist, diese zu erkennen, vertritt jedoch überzeugt und wiederholt die falsche Meinung, dass diese identisch mit den Extremstellen sind. Bei der 3. Ankerfrage jedoch antwortet er, dass es bei einer PF 5. Grades 4 Extremwerte, aber nur 3 Änderungen des Krümmungsverhaltens gibt; eigentlich ein Widerspruch zu seiner vorigen Aussage?
Der Vergleich mit dem Autofahren (Rechtskurve, Linkskurve) ist in guter Erinnerung geblieben und damit das Erkennen von Rechts- und Linkskrümmung. Iris meint, dass der Vergleich für sie klärend gewirkt hat, Wilfried dagegen ist sich da nicht so sicher. Die übrigen Eigenschaften, den Verlauf betreffend, scheinen keine Probleme bereitet zu haben. Technische Probleme mit den Excel-Werkzeugen „Zielwertsuche" und „Solver"

haben alle gehabt, deren Handhabung dann aber sehr schnell verstanden wurde. Unser „Computermuffel“ Michael glaubt, dass er deren Gebrauch schon wieder vergessen hat, Harald und Andreas meinen, dass sie sich das besonders lange merken werden.

Zur 3. Ankerfrage

Die Anzahlen der Nullstellen sowie der Änderungspunkte von Monotonieverhalten und Krümmungsverhalten im Zusammenhang mit dem Grad der PF sind den SchülerInnen bekannt, auch die mathematikschwache Corina weiß darüber ziemlich genau Bescheid.

5.5 Kommentar zu den Interviews

- Leider sind die Interviews nicht so gelaufen, dass eine eindeutige Antwort auf meine Forschungsfrage herausgelesen werden konnte. Der Grund dafür ist, dass meine Interviewfragen zu allgemein gestellt waren und sich zu wenig auf die untersuchte Unterrichtseinheit bezogen.
- Die wesentliche Erkenntnis aus den Gruppeninterviews ist, dass es hauptsächlich der experimentelle Zugang über „Excel“ ist, der die SchülerInnen beeindruckt hat.
- Es hat sich weiters gezeigt, dass auch an einer Handelsakademie nicht alle SchülerInnen „Computerfreaks“ sind: Michael steht der Computerarbeit äußerst negativ gegenüber und Corina der Mathematik überhaupt. Obwohl bei diesen beiden eine ablehnende Haltung gegenüber dieser Unterrichtseinheit ersichtlich ist, höre ich aus den Interviews heraus, dass
- mathematisches Wissen in den SchülerInnen entwickelt worden ist:
    - W*: Ich glaub, die Kurvenbeobachtung und das ganze, das wird ich mir jetzt ziemlich gut merken, weil das ist mir am Computer relativ leicht gefallen..*
    - M*: Ich glaub, die Schnittpunkte sind nicht so schwer auszurechnen oder zum Ablesen...*
    - W*: Ich glaub, dass die Kurven – Linkskurve, Rechtskurve – das war das schwerste für mich, weil ich mir zuerst gedacht habe, die Kurven ändern sich einfach...*
    - C*: Nullstellen! Dann... ich hab mir das gemerkt, dass so viele Nullstellen sind, so vielten Grades es ist; so hab ich das auch ausrechnen können!*
    - H*: Es ist am Computer leichter als es so zu rechnen – find ich, weil du gehst auf den Solver und der macht das mit der Formel und man kann das dann super kontrollieren; bei Graphiken kann man super nachschauen. Man sieht auch super die Nullstellen – ich muss sagen, das ist ziemlich leicht! Das merkt man sich geschwind!*
    - H*: Aber wo sie das mit dem Auto gesagt haben, das war dann ziemlich leichter! (Anm.: es geht um die Krümmung)*
    - I*: Dann hab ich die auch verstanden! (Anm.: die Krümmung) Und das andere, das war eh alles kein Problem!*
    - H*: Potenz minus 1, minus 2; das merkt man sich ganz gut! (Anm.: Anzahl der Änderungspunkte des Monotonie- bzw. Krümmungsverhaltens)*

- A*: Höchstens 5 Nullstellen! Es kann auch nur eine geben (Anm.: PF 5. Grades)*

- Inwiefern dieses Wissen den Zugang zur Analysis tatsächlich leichter macht, wird sich erst im Laufe des Schuljahres herausstellen. Meiner persönlichen Einschätzung nach sind Begriffsvorstellungen durch Beobachtung der Phänomene der PF erzeugt worden, die gute Voraussetzungen für das Verständnis der Differentialrechnung darstellen.
- Ich glaube auch, dass ich ehrliche Meinungen gehört habe. Die Verschiedenartigkeit der einzelnen Stellungnahmen machen die Interviews und ihre Interpretation interessant.

Wenn auch die zufriedenstellende Antwort auf die am Anfang dieser Arbeit gestellte Frage nicht gefunden werden konnte, so gibt es nach den Gruppeninterviews einige gedankliche „Brücken“ zu dieser Antwort.
Obwohl sich die SchülerInnen mehr Zeit für diese Unterrichtseinheit wünschen, finde ich, dass in der Kürze ein Teil der Effektivität gelegen ist. Als Vorteile sehe ich die Vorbereitung in Form von Arbeitsunterlagen, die an die Schüler ausgeteilt wurden; und die doch etwas andere Aufbereitung eines Stoffkapitels. Die Neugierde der SchülerInnen war da und diese Neugierde war auch die Antriebsfeder für deren vermehrten Arbeitseinsatz. Eine weitere Motivation für viel SchülerInnen war das Arbeiten im DV-Saal. Im Verhältnis zum aufgewendeten Schulstundeneinsatz sehe ich das Ergebnis positiv, da die Effektivität meines Erachtens nach hoch war. Etwas ist auf alle Fälle hängen geblieben und dies rechtfertigt meinen kurzen „Vorkurs zur Analysis“.
Erwähnen möchte ich auch, dass ich selber viel Freude in dieser Arbeitsphase empfunden habe; auch glaube ich, dass meine Nebenanliegen (Zugänge zur Mathematik zu schaffen, Abbau der Mathematikangst) erfüllt worden sind. Der Vorkurs stellt eine Art „Erlebnismathematik“(für die SchülerInnen und für mich) dar und war zusätzlich ein Förderer der Kommunikation.
Als negative Komponenten erscheinen mir die manchmal mathematisch zu wenig exakt definierten Begriffe zB: Definitionsmenge, Stetigkeit, Zusammenhang zwischen dem Grad der PF und (maximaler) Anzahl der Nullstellen, Änderungspunkte des Monotonie- und Krümmungsverhaltens. Ich bin jedoch der Meinung, dass sich meine mangelnde mathematische Exaktheit zugunsten von Verständlichkeit ausgewirkt hat. Außerdem wird die Präzisierung und Exaktifizierung von einigen Begriffen in der Differentialrechnung stattfinden.

6. Zusammenfassung und Konsequenzen

6.1 Was wurde gemacht?

Die in der Differential- und Integralrechnung immer wieder verwendeten und auf Grund ihrer Unkompliziertheit angestrebten PF werden in einem kurzen Lehrgang vor der Differentialrechnung in der 4. Klasse der Handelsakademie mit ihren Phänomenen den SchülerInnen vorgestellt.

Nach einer Einführung in die Excel-Werkzeuge „Zielwertsuche“ und „Solver“ und einer freien Experimentierstunde werden die Lernenden mit konkreten Arbeitsaufträgen ausgestattet, um auffallende Erscheinungen der PF zu untersuchen und Regelmäßigkeiten herauszufinden. Eine dazu konzipierte Hausübung soll helfen, das Muster zwischen der Termdarstellung und der graphischen Darstellung herauszufinden. In einem anschließendem Test wird das vorwiegend experimentell entwickelte Wissen überprüft. Eine Fragebogenerhebung und Gruppeninterviews geben über Selbsteinschätzung der SchülerInnen, deren Gefühle bei der Arbeit und deren Evaluierung der Unterrichtseinheit Auskunft.
Der Ablauf dieser 6 Unterrichtsstunden war bis auf die freie Experimentierstunde genau geplant. Als sehr positiv habe ich dabei gesehen, dass die Klasse eine sehr konzentrierte Arbeitshaltung gezeigt hat, gut motiviert war und sehr gute Ergebnisse (im Vergleich mit anderen Mathematik-Leistungsfeststellungen) beim Test aufgewiesen hat. Sehr interessant war für mich die Möglichkeit, die SchülerInnen in der Arbeitsphase bei ihren Strategien, ein Problem zu lösen, beobachten zu können. Das Arbeiten im DV-Saal mit Hilfe von „Excel“ war für die Lernenden und für mich eine Bereicherung - eine Erkenntnis, die wir (die Klasse und ich) schon aus früheren Arbeiten kennen.
Im speziellen habe ich versucht herauszufinden, wie weit die Kurvenuntersuchung von PF ohne Differentialrechnung möglich und sinnvoll ist, wo die Grenzen liegen und welche Vorarbeit damit für die Differentialrechnung geleistet werden kann. Mein Anliegen war, durch anschauliche Darstellungen von PF in meinen SchülerInnen Assoziationen mit deren Termdarstellungen zu wecken. Extremwerte und Wendepunkte sollten durch wiederholtes Experimentieren (in Excel) mit verschiedenen PF intuitiv herausgefunden werden.

6.2 Was weiß ich jetzt?

☺ Sehr gut war meine eigene Auseinandersetzung mit dem Thema. Bereits in den letzten 2 Jahren habe ich vor der Differentialrechnung in der 4. Klasse Handelsakademie PF als Wiederholung behandelt. Doch diesmal war eine genaue Analyse für mich erforderlich, was von den PF für den weiterführenden Mathematik-Unterricht wesentlich ist (siehe 1.2). Danach ist das Konzept für diese Unterrichtseinheit entstanden.

☺ Wie aus den Interviews hervorgeht, sind Faktoren, die zum Gelingen beitragen, die Arbeit am Computer und die eigene, exemplarische Untersuchung, das eigene Tun der SchülerInnen.

☺ Durch das Erforschen der PF durch „learning by doing“ und die Erreichbarkeit der angestrebten Ziele konnten bei den Lernenden mathematische Begriffe verankert werden, bei dem einen sehr seicht und locker, beim anderen tiefer und fester.

☹ Durch die Zeitknappheit (nur 2 Unterrichtsstunden pro Woche) war das Programm dicht gedrängt. Für manche SchülerInnen wäre durch eine zusätzliche Besprechungsstunde in der Klasse vieles klarer geworden.

☹ Intuitive Verständlichkeit versus formale Exaktheit! Hier müsste ich mich um eine bessere Symbiose bemühen. Diesmal hat die Verständlichkeit Vorrang gehabt! Ich wollte den SchülerInnen das Gefühl vermitteln, durch ihre

Untersuchungen auf eine Erkenntnis zu stoßen (siehe: Vermutung 1 und 2 am Ende von Arbeitsblatt 1 und 2). Verschwiegen habe ich ihnen, dass es nicht mit allen PF so funktioniert und ein allgemein gültiger Zusammenhang rein graphisch nicht gefunden werden kann. Um diese Unexaktheit in Grenzen zu halten, habe ich von einer „maximalen“ Anzahl von Nullstellen, Extremwerten und Wendepunkten gesprochen. Andreas erinnert sich im Gruppeninterview daran, wenn seine Antwort auf die Frage nach der Anzahl der Nullstellen einer Polynomfunktion 5. Grades lautet: *Höchstens 5 Nullstellen! Es kann auch nur eine geben...*

☹ Antwortmöglichkeiten bei der Fragebogenaktion sollten exakter und unmissverständlicher sein. Die Interviewfragen sollten die Fragebogenfragen vertiefen und daher viel detaillierter gestellt werden. Der Bezug zur Forschungsfrage sollte deutlicher und direkter sein. Dann wären genauere Aussagen möglich.

6.3 Konsequenzen

Die wesentlichste Erkenntnis nach Verfassen dieser Studie ist, dass ich einen ähnlichen kurzen Lehrgang über PF vor Einführung der Differentialrechnung sicher wieder unterrichten werde.

Durch Beobachtung verschiedener Funktionsgraphen von PF konnten in den SchülerInnen Assoziationen zwischen der Termdarstellung und der graphischen Darstellung erzeugt und verankert werden.

Der Zusammenhang zwischen der maximalen Anzahl der Nullstellen und dem Grad der PF war den meisten klar.

Das Monotonieverhalten einer PF und seine Änderungspunkte sowie deren numerische Auffindung wurde vom Großteil verstanden und konnte bei den Testbeispielen angewendet werden.

Probleme bereiteten hingegen die Änderungspunkte des Krümmungsverhaltens. Diese wurden von vielen Lernenden immer wieder als die Extremwerte angesehen. Das ungefähre Ablesen aus dem Graphen erschien wahrscheinlich vielen nicht als probate mathematische Methode, weshalb dann einfach die Extremwerte zu diesen erklärt wurden. Das exakte mathematische Verfahren zur Berechnung eines Wendepunktes in der Differentialrechnung, also das Bilden der 2. Ableitung, das Einsetzen des errechneten x-Wertes in die Funktionsgleichung, die Berechnung des Wertes f(x) und das Hinschreiben des Wendepunktes (x / f(x)), gewinnt an Bedeutung, wenn der Wendepunkt in einem Vorkurs intuitiv erkannt wurde und als Änderungspunkt des Krümmungsverhaltens verstanden wurde.

Eine weitere Schwierigkeit für die SchülerInnen war die Angabe der Intervalle für Monotonie und Krümmung; statt Intervallen wurden vielfach nur Kurvenpunkte für ein bestimmtes Verhalten angegeben. In Zukunft müsste auf diese Möglichkeit, einen Bereich anzugeben, vorher extra hingewiesen werden.

Generell möchte ich bei Wiederholung eines solchen Kurses versuchen, besonders drei Aspekte zu berücksichtigen:

1. Der freien Experimentierstunde möchte ich mehr Stellenwert geben. Dies könnte so ablaufen, dass einige Funktionen als Ausgangspunkte angegeben werden, jedoch ohne konkrete Aufgabenstellung. Offenes Ausprobieren soll den SchülerInnen möglich sein und damit auch der Kreativität die Tür geöffnet werden. Darauf basierend sollte ein „Programm über PF" erstellt werden. Diese Systematik, die wahrscheinlich in jeder Klasse ein bisschen anders ausschauen wird, sollte die Grundlage für die weitere Anleitung zum Untersuchen von PF sein.
2. Den 2 Vermutungen am Ende vom Arbeitsblatt 1 und 2, die von den SchülerInnen getätigt werden sollen, werde ich im Rahmen einer Wiederholung des Kurses etwas an Bedeutung nehmen. Sie sind experimentell nur bei speziellen Funktionen, wie ich sie diesmal ausgewählt habe, machbar. Um sie im Rahmen dieser Arbeit beantworten zu können, habe ich immer nach der <u>maximalen</u> Anzahl der Nullstellen, Änderungspunkten des...gefragt.
3. Zur Evaluierung des Kurses möchte ich die SchülerInnen veranlassen, mind-maps zu zeichnen. Dadurch könnte ich zweierlei erreichen: einerseits sollen die Lernenden veranlasst werden, mögliche Vernetzungen von bereits erworbenen Wissen herzustellen und andrerseits kann ich durch Überdenken solcher mind-maps Einblick in die Denkstrukturen von Mathematik-Lernenden gewinnen.

7. Aus meinem Forschungstagebuch

21. Februar 2002 (Doppelstunde)

Thema: Kurvendiskussion von PF 2. und 3. Grades

1. Stunde
Wir wiederholen die Eigenschaften Monotonie und Krümmungsverhalten. Eigentlich bin ich überrascht, wie viel noch gewusst wird. Rasch besprechen wir die Stationen der Kurvendiskussion an Hand von $f(x) = x^2 - 5x$. Probleme gibt's beim Wendepunkt! Die SchülerInnen vermuten, dass es einen gibt. Haben sie denn so viel von unserem Vorkurs vergessen? Nach einer kurzen Diskussion können wir die Frage klären! Gott-sei-Dank, als passives Wissen ist's ja in ihren Köpfen gespeichert! Zögernd, aber richtig kommt die Antwort: Die Kurve ändert ja ihr Krümmungsverhalten nicht! Also kann sie keinen Wendepunkt besitzen.

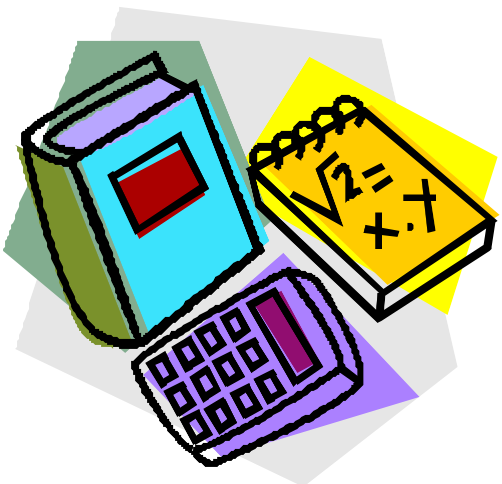
2. Stunde
Im DV-Saal untersuchen wir PF 3. Grades und variieren die Koeffizienten über einen Schieberegler. Graphen, Nullstellen und Extremwerte gehen gut und schnell. Wendepunkt und Wendetangente werden über die Differentialrechnung bestimmt und in den Graphen kontrolliert. Viele Aha-Erlebnisse bei den SchülerInnen! Vorkurs und die ganze Arbeit waren also doch nicht umsonst! Echt schön!

Anhang

Anhang 1: Arbeitsprogramm für die SchülerInnen

Meine Einsichten

in Polynomfunktionen



Name:________________________________

Klasse:________________________________

Datum:________________________________

Katalog von Eigenschaften von Polynomfunktionen (PF)
$f(x) = y = a.x^n + b.x^{n-1} + c.x^{n-2} + d.x^{n-3} + ...$

Ein 10-Punkte-Programm zur Hilfe beim Experimentieren mit Polynomfunktionen.

1.
Grad n einer PF = in der Termdarstellung höchster vorkommender Exponent
2.
PF sind **stetige** Funktionen, sie können „ohne Absetzen" gezeichnet werden.
3.
Der **Definitionsbereich D** ist jener Bereich, aus dem die x-Werte zu entnehmen sind. Für PF gilt: Definitionsbereich =R. Zusätzlich ist der Angabe ein Definitionsintervall als Teilmenge von R zu entnehmen, das auf den Bildschirmausschnitt einschränkt.
4.
Der **Graph** einer PF ist die Darstellung im Koordinatensystem
5.
Das **Monotonieverhalten** drückt den Aufwärts- oder Abwärtstrend der Funktionswerte aus, man spricht von einer monoton steigenden oder monoton fallenden Funktion (Vergleiche: unendliche Zahlenfolgen). Aufgrund des Graphen der Funktion kann dieses festgestellt werden. An bestimmten Stellen kann es zu einer Änderung des Monotonieverhaltens kommen.
6.
Die Extremstellen:
1.Art: **absolute** Extremstellen = höchste und tiefste Werte in einem bestimmten Definitionsbereich
2. Art: **relative** Extremstellen = „Bergspitzen" und „Talsohlen" in einer bestimmten Umgebung dieser.
7.
Die **Nullstellen N** sind die Schnittpunkte mit der x-Achse und werden durch f(x) = 0 bestimmt. Wenn $x_1 = x_2$, dann spricht man von einer Doppelnullstelle.
8.
Die **Schnittpunkte mit der y-Achse** werden mit **S_y** bezeichnet und werden durch x = 0 bestimmt.
9.
Der Funktionsterm einer PF (mindestens Grad = 2) kann als **Produkt von Linearfaktoren** dargestellt werden:
$(x - x_1) . (x - x_2) . (x - x_3) . ...$, wobei $x_1, x_2, x_3,....$die Nullstellen der Funktion darstellen.
10.
Bei der Untersuchung der **Krümmung** unterscheidet man eine **Linkskurve** und eine **Rechtskurve**. Beachtet muss dabei immer die mathematische Vorgangsweise (von links nach rechts oder mit steigenden x-Werten) werden.

Arbeitsblatt 1

Verhalten von Funktionsgraphen

An den Graphen der folgenden Funktionen soll im Definitionsintervall D = [-4,+5]

- das Monotonieverhalten
- das Krümmungsverhalten

näher untersucht werden.

Lineare Funktionen:

$y1 = 2x - 3$
$y2 = -1/2x + 4$

Quadratische Funktionen:

$y3 = x^2 - 5x + 4$
$y4 = -x^2 + 3$

Funktionen 3. Grades:

$y5 = x^3 - 2x^2 - 8x$
$y6 = x^2.(x-1)$

Funktionen 4. Grades:

$y7 = x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18$
$y8 = x^4 - 17x^2 + 16$

	Lin.Fkt.(n=1)		**Quadr.Fkt.(n=2)**		**Fkt.3.Gr.(n=3)**		**Fkt.4.Gr.(n=4)**	
	y1	**y2**	**y3**	**y4**	**y5**	**y6**	**y7**	**y8**
Monotonsteigend								
Monoton fallend								
Wie oft ändert sich die Monotonie?								
Wo ändert sich die Monotonie?								
Ist eine Krümmung feststellbar?								
Rechtskurve								
Linkskurve								
Wie oft ändert sich die Krümmung?								

Stellen Sie nun eine **Vermutung 1** auf über
die maximale **Anzahl der Änderungen des Monotonieverhaltens**:___________ und die **maximale Anzahl der Änderungen des Krümmungsverhaltens**: _______
einer PF vom **Grad n**.

Arbeitsblatt 2

Wichtige Punkte von Funktionsgraphen

An den Graphen der PF vom Arbeitsblatt 1 sollen die folgenden Punkte näher untersucht werden:

1. Nullstellen N (Zielwertsuche im Excel verwenden)
2. Schnittpunkte mit der y-Achse S_y (aus der Termdarstellung ablesen)
3. Relative Extremwerte („Bergspitzen“ und „Talsohlen“)
   (Solver im Excel verwenden)
4. Änderungspunkte des Krümmungsverhaltens (aus dem Funktionsgraphen ~ ablesen)

	Lin.Fkt.(n=1)		**Quadr.Fkt.(n=2)**		**Fkt.3.Gr.(n=3)**		**Fkt.4.Gr.(n=4)**	
	y1	**y2**	**y3**	**y4**	**y5**	**y6**	**y7**	**y8**
Anzahl der Nst.								
Nullstellen								
S_y								
Bergspitzen								
Talsohlen								
Anzahl der rel. Extremwerte								
Anzahl der Änderungspunkte des Kr.verhaltens								
Änderungspunkte des Kr.verhaltens								

Stellen Sie nun eine **Vermutung 2** auf über
die maximale **Anzahl der Nullstellen**:___________, die maximale **Anzahl der relativen Extremwerte**: _______und die maximale **Anzahl der Änderungspunkte des Krümmungsverhaltens**:_________ einer PF vom **Grad n.**

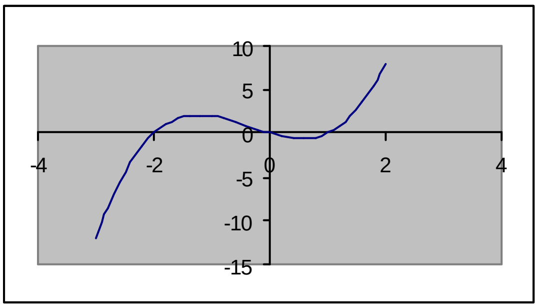
Erkennen Sie Zusammenhänge zwischen dem Verhalten von Funktionen verschiedenen Grades und ihren wesentlichen Punkten? Wenn ja, welche?

Arbeitsblatt 3

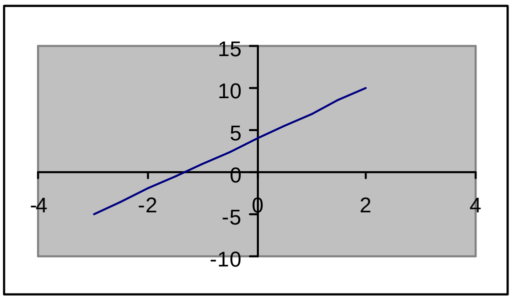
Graphenpuzzle

Versuchen Sie die unten angeführten Termdarstellungen von Funktionen den Funktionsgraphen zuzuordnen:

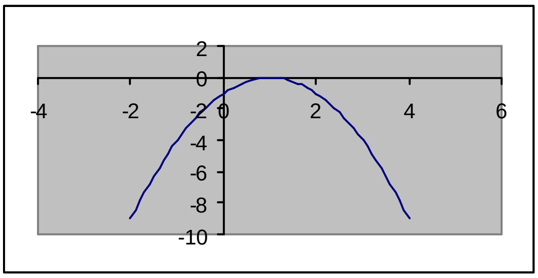
1.



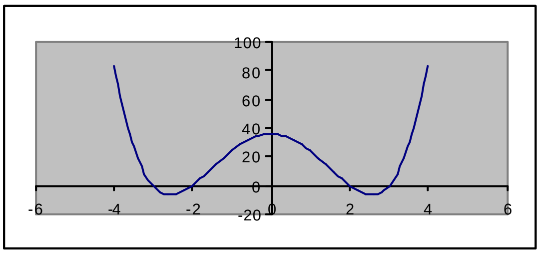
2.



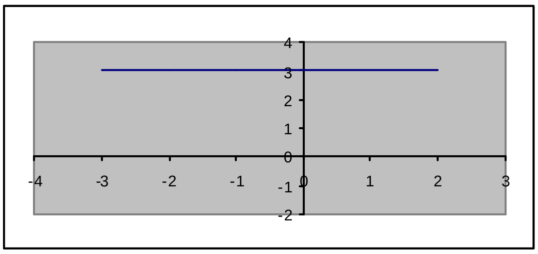
3.



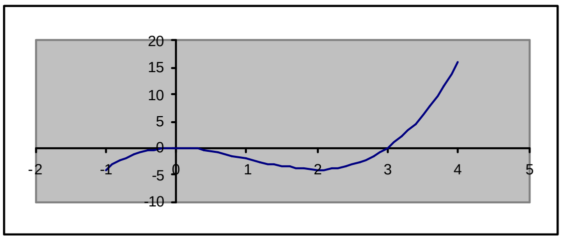
4.



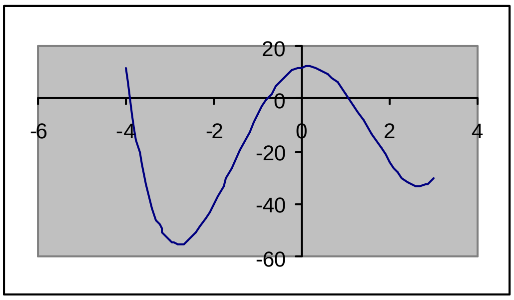
5.



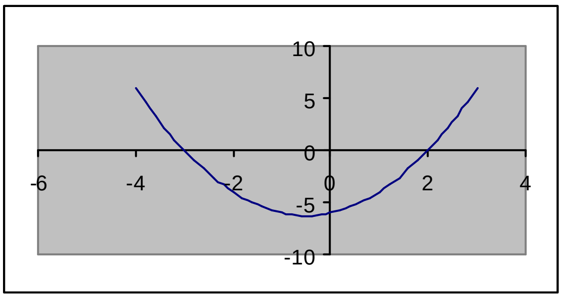
6.



7.

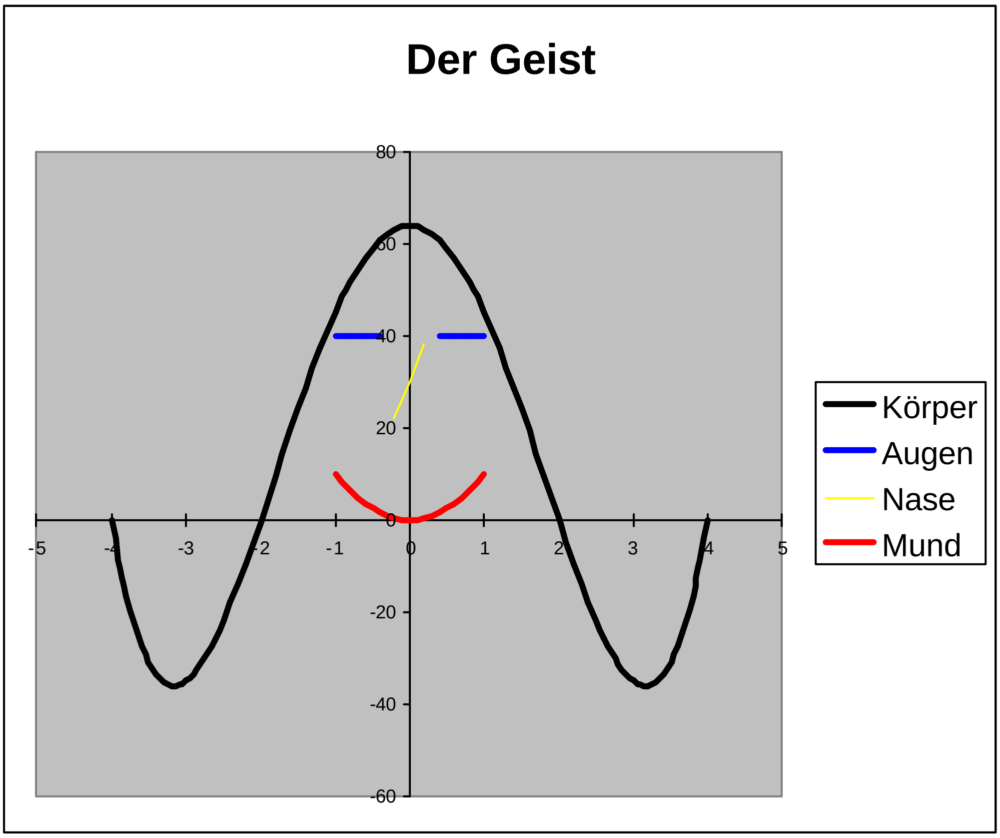


8.



a) $y = 3$ entspricht Bild ______
b) $y = x^4 - 15x^2 + 4x + 12$ entspricht Bild______
c) $y = -x^2 + 2x - 1$ entspricht Bild______
d) $y = x^3 - 3x^2$ entspricht Bild______
e) $y = 3x + 4$ entspricht Bild______
f) $y = x^4 - 13x^2 + 36$ entspricht Bild______
g) $y = x^2 + x - 6$ entspricht Bild______
h) $y = x^3 + x^2 - 2x$ entspricht Bild______

Arbeitsblatt 4



Problemstellung:
Für die Umrisse des Geistes, seine Augen, den Mund und die Nase sind Funktionsterme mit einem jeweils geeigneten Definitionsbereich zu finden.

Geist:
y1 = ________________________________
Definitionsbereich:__________________________________

Augen:
y2 = ________________________________
Definitionsbereich:__________________________________

Nase:
y3 =_________________________________
Definitionsbereich:__________________________________

Mund:
y4 = __________________________________
Definitionsbereich:___________________________________

Anhang 2: Tests Gruppe A, B

Test über Polynomfunktionen / 4AHH / 29. November 2001

Gruppe A

Name :________________________________Punkte:__________Note:_____________

1.
Bei den folgenden 2 Funktionen ist auf Grund einer Skizze zu untersuchen:

- Grad
- Nullstellen
- Monotonieverhalten
- Krümmungsverhalten

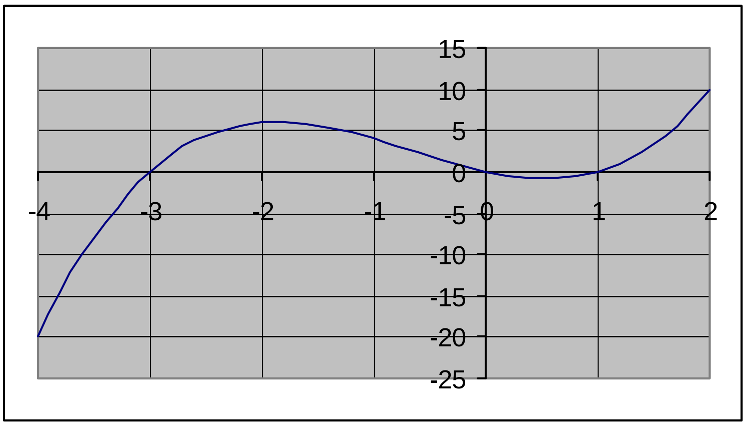
$y = x^2 + x - 6$ D = [-4, +3]

$y = 1/2x - 4$ D = [-1, +9]

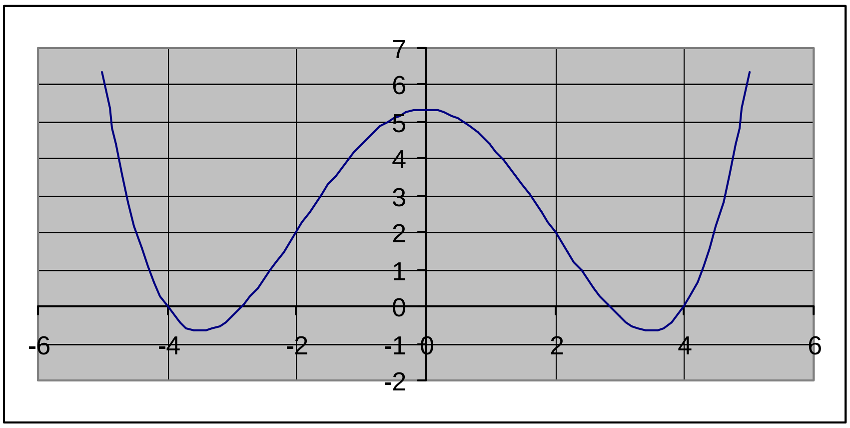
2.
Aus den folgenden 2 Funktionsgraphen sind folgende Eigenschaften und Punkte abzulesen:

- Grad
- Nullstellen
- Hoch – und Tiefpunkte
- Änderungspunkte des Krümmungsverhaltens (wo ändert sich das Krümmungsverhalten in welcher Art?)

a)



b)

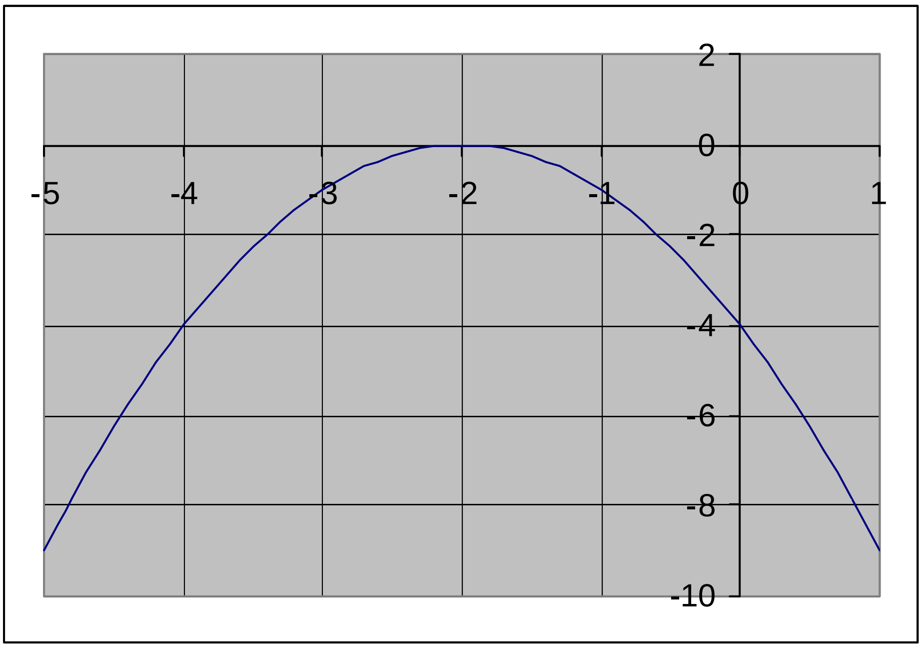


3.

- Versuchen Sie die Gleichung des vorliegenden Funktionsgraphen herauszufinden!

- Wo liegen die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen?

- Welche Besonderheit fällt auf?



Viel Erfolg!

Test über Polynomfunktionen / 4AHH / 29. November 2001

Gruppe B

Name :______________________________Punkte:_________Note:____________

1.
Bei den folgenden 2 Funktionen ist auf Grund einer Skizze zu untersuchen:

- Grad
- Nullstellen
- Monotonieverhalten
- Krümmungsverhalten

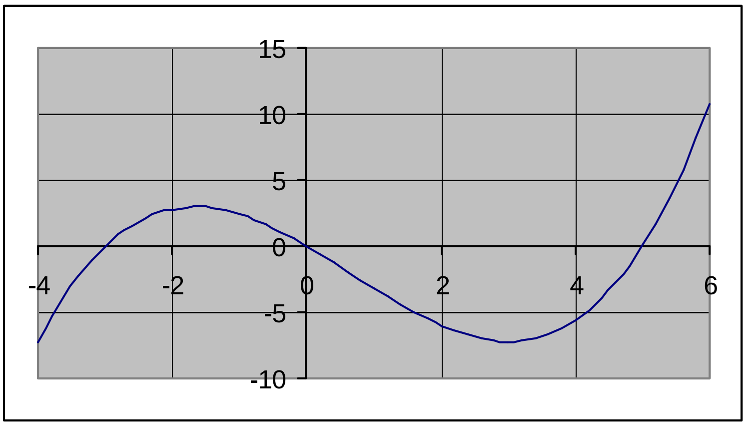
$y = x^2 + x - 2$ D = [-3, +2]

$y = -1/2x + 4$ D = [-1, +9]

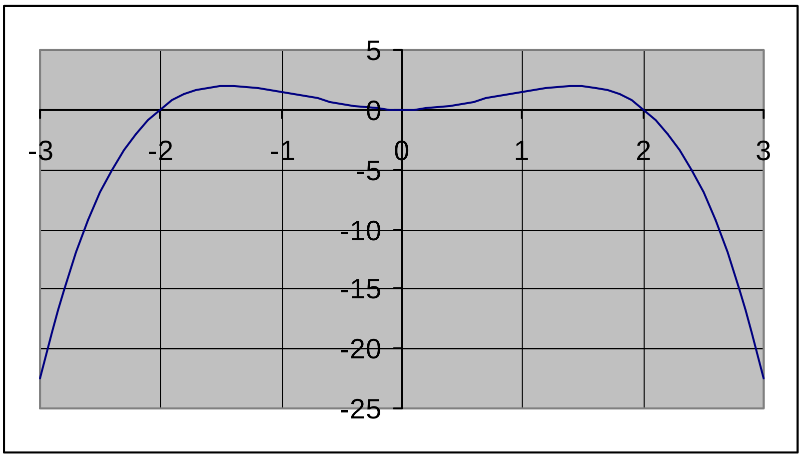
2.
Aus den folgenden 2 Funktionsgraphen sind folgende Eigenschaften und Punkte abzulesen:

- Grad
- Nullstellen
- Hoch – und Tiefpunkte
- Änderungspunkte des Krümmungsverhaltens (wo ändert sich das Krümmungsverhalten in welcher Art?)

a)

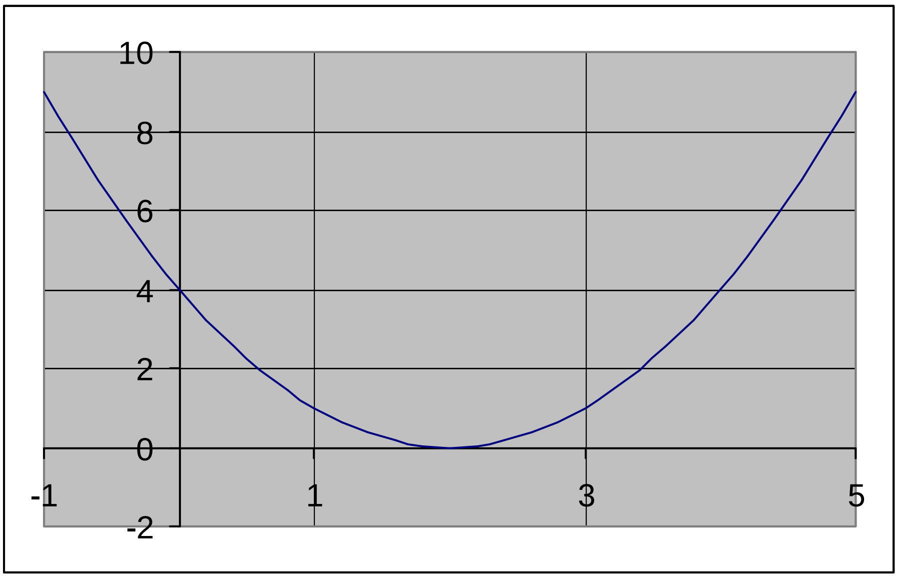


b)



3.

- Versuchen Sie die Gleichung des vorliegenden Funktionsgraphen herauszufinden!
- Wo liegen die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen?
- Welche Besonderheit fällt auf?



Viel Erfolg!

Anhang 3: Fragebogen

Fragebogen zur Unterrichtseinheit mit dem Thema „Polynomfunktionen“

Dieser Fragebogen dient der Analyse des Mathematikunterrichts und somit euch Schülern. Daher bitte ich euch um gewissenhafte Antworten!

1.
Hast du das Arbeiten mit den Polynomfunktionen interessant gefunden?

☐	☐	☐	☐	☐
sehr	ja	na ja	nicht besonders	nein

2.
Die Erklärungen zu den Polynomfunktionen waren meiner Meinung nach:

☐	☐	☐	☐	☐
sehr gut	gut	mittelmäßig	eher schlecht	schlecht

3.
Meine Einschätzung meiner jetzigen Kenntnisse über einige Eigenschaften der Polynomfunktionen:

a) Definitionsbereich

☐	☐	☐	☐	☐
ja bestens	ja ungefähr	mittelmäßig	eher schlecht	schlecht

b) Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

☐	☐	☐	☐	☐
ja bestens	ja ungefähr	mittelmäßig	eher schlecht	schlecht

c) Beschreibung des Monotonieverhaltens

☐	☐	☐	☐	☐
ja bestens	ja ungefähr	mittelmäßig	eher schlecht	schlecht

d) Beschreibung des Krümmungsverhaltens

☐	☐	☐	☐	☐
ja bestens	ja ungefähr	mittelmäßig	eher schlecht	schlecht

4.
Die Polynomfunktionen sind mir leichter / schwerer als andere Kapitel in der Mathematik gefallen:

☐	☐	☐	☐	☐
viel leichter	leichter	gleich schwer	schwerer	viel schwerer

5.
Meine Kenntnisse über Polynomfunktionen wurden von meiner Mathematiklehrerin beurteilt.

☐	☐	☐	☐	☐
sehr gerecht	gerecht	mittelmäßig	weniger gerecht	ungerecht

Für deine Antworten danke ich dir und werde dich über die Ergebnisse informieren!